УДК 517.977.5 : 519.866
DOI: 10.17277/vestnik.2026.02.pp.211-220

# ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСНОГО ПРОЦЕССА В ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

**© Н. В. Антипина[1]✉**

[1] *Кафедра математических методов и цифровых технологий, natant2012@mail.ru; ФГБОУ ВО «Байкальский государственный университет», Иркутск, Российская Федерация*

**Ключевые слова:** динамические модели; достаточные условия оптимальности; импульсное управление; квазивариационное неравенство; разрывные траектории; системный анализ.

**Аннотация:** Исследована прикладная модель экономической динамики, которая формализуется как задача оптимального управления с линейным полуограниченным управлением. Основная сложность анализа подобных моделей связана с нарушением условий регулярности, что приводит к необходимости привлечения специализированного математического аппарата. Показан системный подход к верификации оптимальности в импульсных процессах, основанный на синтезе обобщенного принципа максимума и достаточных условий, базирующихся на построении разрывных решений – функций Ляпунова–Кротова. Доказана оптимальность найденной импульсной экстремали в классической одномерной модели управления рекламным бюджетом. Обоснована оптимальность стратегии «импульс – магистральный период – прекращение финансирования» для широкого класса экономических систем с неограниченными управляющими воздействиями в короткие периоды времени.

## Введение

Задачи динамической оптимизации, описывающие процессы управления в экономике, часто не содержат ограничения на управляющие эндогенные переменные в рамках конечных временных интервалов. Одним из таких примеров являются задачи распределения инвестиций в рекламу, где темпы финансирования формально не ограничены сверху. Такого типа задачи линейны по управляющим переменным, удовлетворяющим конусным ограничениям. В силу отсутствия ограничений на управление, они трактуются как неразрешимые в классической теории управления и относятся к классу нерегулярных задач оптимального управления [1, 2]. Естественный путь их исследования – это расширение до импульсной постановки задачи с управлениями в виде векторных мер (импульсных управлений) и разрывными траекториями ограниченной вариации [1, 3 – 5] или переход к рассмотрению на множестве допустимых последовательностей.

Направление развития теории достаточных условий оптимальности импульсных процессов продолжает быть актуальным уже в течение нескольких десятилетий [6 – 10], поскольку позволяет провести проверку найденных с помощью необходимых условий экстремалей и доказать их оптимальность. Применение достаточных условий, полученных на основе методов динамического программирования и уравнении Беллмана, для задач с разрывными траекториями

напрямую невозможно [2 – 4]. В этом контексте плодотворным оказался подход, основанный на построении специальных функций – аналогов функций Ляпунова–Кротова, удовлетворяющих квазивариационным неравенствам [9 – 11]. Для импульсных систем ключевой особенностью становится необходимость работы с разрывными решениями таких неравенств, что связано с условиями скачка фазовых и сопряженных переменных [1, 4, 12,13]. Состояние вопроса характеризуется поиском конструктивных методов построения этих функций, особенно для задач с нарушением условия корректности Фробениуса [4], в частности, для экономических прикладных моделей с неограниченным управлением [3 – 5, 14, 15].

*Цель работы* – прикладная иллюстрация эффективности использования системного подхода к анализу содержательной экономической модели, а также выявление и преодоление характерных для этой модели проблем исследования.

В статье поставлены и решены следующие *задачи*:

– анонсированы достаточные условия оптимальности, основанные на построении семейства разрывных решений квазивариационного неравенства – обобщения метода функций Ляпунова–Кротова [9 – 11];

– детально построено разрешающее семейство функций для конкретной прикладной модели экономической динамики (модели управления рекламным бюджетом) и строго доказана оптимальность найденной ранее импульсной экстремали, включая анализ случая нарушения условия корректности.

## 1. Квазивариационные неравенства и методика построения их решений

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = f(t,x,u); \quad u(t) \in U, \tag{1}$$

где функция $f$ непрерывна по всем своим аргументам, $U \subseteq R^m$ – произвольное множество пространства $R^m$.

*Допустимым процессом системы* (1) называется пара функций $\sigma = (x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$, удовлетворяющих условиям:

1) траектория $x(t)$ и управление $u(t)$ определены на отрезке времени $\Delta = [t_0, t_1]$;

2) траектория $x(t)$ является абсолютно непрерывной функцией;

3) управление $u(t) \in U$ – измеримая ограниченная функция;

4) пара $\sigma$ удовлетворяет на отрезке $\Delta$ системе (1).

*Квазивариационным неравенством* для системы (1) назовем следующее неравенство в частных производных [9]:

$$\mathrm{P}^{\varphi}(t,x,u) := \varphi_t + \langle \varphi_x, f(t,x,u) \rangle \le 0, \quad (t,x) \in Q, \quad u \in U, \tag{2}$$

где $Q \subset R^1 \times R^{d(x)}$ – открытое множество расширенного фазового пространства.

*Решением неравенства* (2) назовем дифференцируемую, липшицевую функцию $\varphi(t,x)$, не возрастающую вдоль любой траектории $x(t)$ системы (1) на $Q$ [9].

Введем в рассмотрение классическую терминальную задачу:

$$\begin{gathered} J(\sigma) := l_0(b) \to \min, \quad b := (t_0, x_0; t_1, x_1) \\ b \in C \subset R \times R^{d(x)} \times R \times R^{d(x)} \\ (t, x(t)) \in Q. \end{gathered} \tag{3}$$

Следующая теорема дает достаточные условия оптимальности экстремалей в задаче (3) и обобщает классические условия В. Ф. Кротова [2] на класс вырожденных задач.

Теорема 1 ([9]). Пусть имеется семейство $\left\{\varphi^a \mid a \in \mathrm{A}\right\}$ решений квазивариационного неравенства на открытом множестве $Q \subset R^1 \times R^{d(x)}$ и $\overline{\sigma} = \left(\overline{x}(t), \overline{u}(t) \mid t \in \left[\overline{t}_0, \overline{t}_1\right]\right)$ является допустимым процессом в задаче (3) с траекторией в $Q$.

Если $\overline{b} = \left(\overline{t}_0, \overline{x}(\overline{t}_0); \overline{t}_1, \overline{x}(\overline{t}_1)\right)$ доставляет глобальный минимум в задаче:

$$l_0(b) \to \inf, \quad b \in C,$$

$$\varphi^a(t_1, x_1) - \varphi^a(t_0, x_0) \le 0 \ \ \forall a \in \mathrm{A}, \tag{4}$$

$$b := (t_0, x_0; t_1, x_1) \in Q \times Q,$$

то процесс $\overline{\sigma}$ оптимален в задаче (3) и доставляет сильный минимум в задаче (1).

Семейство функций Ляпунова–Кротова $\varphi^a$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, называется *разрешающим*.

Далее сосредоточимся на задаче импульсного управления (линейной по управлению, с ограничением на него в виде конуса $U$):

$$\dot{x} = f_0(t, x) + G(t, x)u, \quad u(t) \in U. \tag{5}$$

Выполнение условия корректности Фробениуса [4] гарантирует существование единственной импульсной траектории в задаче (5), тогда как его нарушение дает воронку импульсных траекторий.

Введем функцию $H_0(t, x, \psi_x) = \langle \psi_x, f_0(t, x) \rangle$. Для задачи (5) квазивариационное неравенство принимает вид:

$$\varphi_t + H_0(t, x, \psi_x) \le 0; \tag{6}$$

$$G^*(t, x)\, \varphi_x \in U^- \ \text{ на } Q, \tag{7}$$

где $U^-$ – отрицательно двойственный конус к $U$, то есть $U^- = \{l \mid \langle l, U \rangle \le 0\}$. Это весьма специфическая система в частных производных, совместность которой не гарантируется.

Систему (7) называют *системой кратных максимумов* [1, 2]. Ее условие совместности заключается в том, что она *допускает пополнение* [1].

Особенностью задач импульсного управления является разрывность траекторий и сопряженных переменных в моменты приложения импульсов. Этим объясняется использование разрывных функций Ляпунова–Кротова для доказательства оптимальности их допустимых процессов. Конструктивно эти функции строят как склейку гладких решений $\varphi_1(t, x), \ldots, \varphi_N(t, x)$, определенных на цилиндрических множествах

$$Q_1 = (a, s_1] \times \Omega_1, \ldots, Q_i = \left[s_{i-1}, s_i\right] \times \Omega_i, \ldots, Q_N = [s_{N-1}, b) \times \Omega_N,$$

соответствующих этапам непрерывного движения и моментам скачка, где:

$$a < \overline{t}_0, \ \ b > \overline{t}_1, \ \ \Omega_i \subseteq R^{d(x)}.$$

Следовательно, структура решений неравенства (3) определяется формулой

$$\varphi(t,x)=\sum_{i=1}^{N}\chi_{Q_i}(t,x)\,\varphi_i(t,x)\,, \tag{8}$$

где $\varphi_i$ – решения (6), (7); $\chi_{Q_i}(t,x)$ – характеристическая функция множества $Q_i$, $i=\overline{1,N}$.

Методика построения $\varphi_i$ такова:

– на интервалах особости ($u_j(t)>0$, $j=\overline{1,m}$) градиент $\varphi_x$ должен обнулять соответствующие множители $\langle\varphi_x, g_j\rangle=0$, что приводит к системе кратных максимумов. Оставшийся произвол используется для удовлетворения неравенства (6);

– на не особых интервалах ($u_j(t)=0$, $j=\overline{1,m}$) используется «укороченное» уравнение Гамильтона–Якоби

$$\varphi_t+H_0(t,x,\varphi_x)=0\,. \tag{9}$$

Его решение должно удовлетворять системе (7).

Итак, методика построения разрывных решений квазивариационного неравенства описана и может быть успешно использована для доказательства оптимальности решений одномерных и некоторых многомерных задач. Таким же путем докажем оптимальность экстремального процесса в модели управления рекламными инвестициями. Следует отметить, что задача оптимального управления, соответствующая рассматриваемой модели, не обладает свойством корректности. Однако на помощь приходит тот факт, что построенная на ее основе система кратных максимумов (7) допускает пополнение. Оптимальность экстремального процесса в этой задаче устанавливается только с применением решения квазивариационного неравенства.

## 2. Исследование импульсной экстремали в прикладной модели экономической динамики

Эффективность достаточных условий, представленных в п. 1, покажем на основе модели оптимизации рекламного бюджета [15]:

$$\begin{gathered} J=-y(T)\to\inf\,; \\ \dot{x}=-bx+au(1-x)\,,\quad x(0)=x_0\,; \\ \dot{y}=\mathrm{e}^{-rt}(px-u)\,,\quad y(0)=0\,; \\ \dot{z}=u\,,\quad z(0)=0\,,\quad u\ge 0\,, \end{gathered} \tag{10}$$

где параметры модели положительны ($a,b,p,r,x_0>0$), $[0,T]$ – фиксированный отрезок.

Математически модель (10) классифицируется как задача оптимального импульсного управления, поскольку управляющая переменная $u$ не ограничена сверху ($u\ge 0$).

С результатом применения необходимых условий экстремума [4] к задаче (10) можно ознакомиться в работе [15]: найден экстремальный импульсный процесс:

$$\bar{x}(t)=\begin{cases} x_0, & t=0, \\ x^*, & t\in(0,\tau], \\ x^*\mathrm{e}^{b(\tau-t)}, & t\in(\tau,T], \end{cases} \tag{11}$$

$$\bar{y}(t)=\begin{cases} 0, & t=0, \\ \dfrac{u^*-px^*}{r}\left(\mathrm{e}^{-rt}-1\right)-c, & t\in(0,\tau], \\ \dfrac{px^*}{b+r}\left(\mathrm{e}^{-r\tau}-\mathrm{e}^{b\tau-(b+r)t}\right)+\dfrac{u^*-px^*}{r}\left(\mathrm{e}^{-rt}-1\right)-c, & t\in(\tau,T], \end{cases} \tag{12}$$

$$\bar{u}=c\delta(t)+u^*\chi(0,\tau]. \tag{13}$$

Здесь $x^*, u^*$ – значения первой компоненты фазовой траектории и управления на особом промежутке $(0,\tau]$, $\tau$ – момент переключения управления $u$; $c$ – величина импульса управления:

$$x^*=1-\frac{r+\sqrt{r^2-4abp}}{2ap}; \quad u^*=\frac{bx^*}{a\left(1-x^*\right)}; \tag{14}$$

$$\tau=T+\frac{1}{b+r}\ln\left(1-\frac{b+r}{ap\left(1-x^*\right)}\right); \quad c=\frac{1}{a}\ln\frac{1-x_0}{1-x^*}.$$

Отметим важность выполнения условия $x_0<x^*$, обеспечивающего существование экстремали (11) – (13).

Экономическая интерпретация данной экстремали такова: начальный импульсный «вклад» в рекламу резко увеличивает исходную долю рынка $x_0$ до магистрального уровня $x^*$, который поддерживается далее в течение периода времени $(0,\tau]$ постоянным вложением в рекламу $u^*$, и снижается за счет прекращения рекламы после момента $\tau$.

Докажем с помощью квазивариационного неравенства, что экстремальный процесс (11) – (13) является оптимальным в задаче (10). Согласно теореме 1 п. 1, необходимо найти решения квазивариационного неравенства и с их помощью решить концевую задачу (5).

Начнем с решения неравенства (6), (7). На основе гамильтониана [4, 9] задачи (10)

$$\mathrm{H}(t,x,y,\psi)=\begin{cases} -bx\psi_x+px\mathrm{e}^{-rt}\psi_y, & \text{если} -a(1-x)\psi_x-\mathrm{e}^{-rt}\psi_y\le 0; \\ +\infty, & \text{если} -a(1-x)\psi_x-\mathrm{e}^{-rt}\psi_y>0, \end{cases}$$

выпишем квазивариационное неравенство:

$$P^{\varphi}(t,x,y)=\varphi_t-bx\varphi_x+px\mathrm{e}^{-rt}\varphi_y\le 0; \tag{15}$$

$$a(1-x)\varphi_x-\mathrm{e}^{-rt}\varphi_y\le 0. \tag{16}$$

Наличие точки переключения управления исследуемой экстремали (11) – (13) дает право искать решение неравенства (15), (16) в виде разрывной функции:

$$\Phi(t,x,y)=\begin{cases} \varphi^1(t,x,y), & t\in(0,\tau]; \\ \varphi^2(t,x,y), & t\in(0,T]. \end{cases}$$

Таким образом, на особом интервале $(0,\tau]$ функцию

$$\varphi_1(t,x,y) = y - \frac{e^{-rt}}{a}\ln(1-x) + \frac{\theta(x^*)}{ar}\left(e^{-rt}-1\right), \tag{17}$$

где $\theta(x) = apx + r\ln(1-x) - \dfrac{bx}{1-x}$, найдем методом кратных максимумов как решение уравнения

$$a(1-x)\varphi_x - e^{-rt}\varphi_y = 0 .$$

Затем проведем ее нормировку, максимизируя функцию $\theta(x)$ при $x \in (0;1)$.

На не особом интервале $(\tau,T]$ выберем линейную функцию $\varphi^2(t,x,y)$, которая порождается коэкстремалью исследуемой экстремали,

$$\varphi^2(t,x,y) = y + \frac{p}{b+r}\left(e^{-rt} - e^{bt-(b+r)T}\right)x . \tag{18}$$

Непосредственная проверка подтверждает, что обе функции (17) и (18) удовлетворяют квазивариационному неравенству (15), (16).

Далее перейдем к рассмотрению концевой задачи (4). Конкретизируем ее вид, учитывая найденные функции Ляпунова–Кротова $\varphi^1, \varphi^2$:

$$-y(T) \to \inf ;$$

$$y(\tau) \le \frac{1}{a}\left[e^{-r\tau}\ln(1-x(\tau)) - \ln(1-x_0) + \frac{\theta(x^*)}{r}\left(1-e^{-r\tau}\right)\right]; \tag{19}$$

$$y(T) \le \frac{p}{b+r}\left[e^{-r\tau} - e^{b\tau-(b+r)T}\right]x(\tau) + y(\tau) .$$

Для решения задачи (19) используем метод Лагранжа [2]. Ее решение является глобальным экстремумом, поскольку ограничения-неравенства выпуклы по $x(\tau), y(\tau), y(T)$.

Необходимые условия экстремума лагранжиана примут вид следующей системы:

$$L'_\tau = 0; \quad L'_{x(\tau)} = 0; \quad L'_{x(T)} = 0; \quad L'_{y(T)} = 0 ,$$

решениями которой являются:

$$\bar{\tau} = T + \frac{1}{b+r}\ln\left(1 - \frac{b+r}{ap\left(1-x^*\right)}\right), \quad \bar{x}(\bar{\tau}) = x^*;$$

$$\bar{y}(\bar{\tau}) = \frac{u^* - px^*}{r}\left(e^{-rt}-1\right) - \frac{1}{a}\ln\frac{1-x_0}{1-x^*};$$

$$\bar{y}(T) = \frac{px^*}{b+r}\left(e^{-r\tau} - e^{b\tau-(b+r)T}\right) + \bar{y}(\bar{\tau}),$$

где $x^*$ и $u^*$ определяются формулами (14).

Таким образом, по теореме 1 доказана оптимальность исследуемой импульсной экстремали (11) – (13).

## Заключение

Проведенное исследование демонстрирует эффективность комбинированного подхода к решению нерегулярных задач, являющихся математическими моделями экономики. На основе полученных результатов можно сформулировать следующие выводы:

– нарушение условия корректности – не просто техническая трудность, а содержательная особенность, приводящая к необходимости перехода к рассмотрению задач импульсного оптимального управления;

– используемая в статье методика построения разрывных решений квазивариационного неравенства (6), (7) эффективна для доказательства достаточных условий оптимальности в импульсных задачах, в том числе при отсутствии свойства корректности;

– на примере модели управления рекламным бюджетом строго доказана оптимальность импульсной экстремали, соответствующей стратегии с начальным скачкообразным вложением, последующим магистральным развитием и прекращением финансирования. Ключевую роль в доказательстве сыграло пополнение системы кратных максимумов, позволившее построить нужное семейство функций.

На основе проведенного анализа предлагаются рекомендации для дальнейших исследований. Разработанный подход рекомендуется применять для анализа и верификации оптимальности в других экономических моделях с концентрированными (импульсными) управлениями, таких как задачи оптимальных инвестиций, управления запасами или реструктуризации долга. Перспективным направлением является обобщение методики на многомерные импульсные задачи, где построение разрешающего семейства функций сопряжено с анализом более сложных систем уравнений в частных производных. Для практической реализации метода в сложных моделях целесообразно разрабатывать численные алгоритмы аппроксимации решений квазивариационного неравенства или системы кратных максимумов.

Полученные результаты могут быть применены для анализа широкого круга моделей в маркетинге, управлении инвестициями и других областях экономики, где управляющие воздействия носят концентрированный, «импульсный» характер.

*Список литературы*

1. Гурман, В. И. Принцип расширения в задачи оптимального управления / В. И. Гурман. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Физматлит, 1997. – 287 с.

2. Кротов, В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. – Москва : Наука, 1973. – 446 с.

3. Миллер, Б. М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями и ударными воздействиями / Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович. – Москва : ЛЕНАНД, 2019. – 736 с.

4. Дыхта, В. А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонюк. – Москва : Физматлит, 2000. 255 с.

5. Göllmann, L. Theory and Applications of Optimal Control Problems with Multiple Impulses / L. Göllmann, H. Maurer // Journal of Industrial and Management Optimization. – 2014. – Vol. 10, No. 2. – P. 419–438. doi: 10.3934/jimo.2014.10.413

6. Доронин, С. В. Модель ударного импульса при трамбовании угольной загрузки для производства кокса / С. В. Доронин, Р. В. Зеленов, Е. М. Рейзмунт, А. П. Черняев // System Analysis & Mathematical Modeling. – 2023. – Т. 5, № 4. – С. 392–408. doi: 10.17150/2713-1734.2023.5(4).392-408

7. Завалищин, С. Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин. – Москва : Наука, 1991. – 256 с.

8. Марчук, Р. А. Всплески геомагнитных пульсаций во время событий стационарной магнитосферной конвекции / Р. А. Марчук // System Analysis & Mathematical Modeling. – 2025. – Т. 7, № 1. – С.124–133. doi: 10.17150/2713-1734.2025.7(1).124-133

9. Дыхта, В. А. Неравенство Ляпунова–Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении / В. А. Дыхта // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2006. – Т. 110. – С. 76–108.

10. Кротов, В. Ф. Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем // Доклады АН СССР. –1967. – Т. 172, № 1. – С. 18–21.

11. Бенсусан, А. Импульсное управление и квазивариационные неравенства : пер. с фран. / А. Бенсусан, Ж.-Л. Лионс . – Москва : Наука, 1987. – 596 с.

12. Arutyunov, A. Linear impulsive control problems / A. Arutyunov, D. Karamzin, F. Lobo Pereira // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – 2019. – Т. 477. – С. 1–18.

13. Ащепков, Л. Т. Оптимальное управление разрывными системами / Л. Т. Ащепков ; отв. ред. Р. Ф. Габасов. – Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1987. – 225 с.

14. Dorroh, J. R. A Multistate, Multicontrol Problem with Unbounded Controls / J. R. Dorroh, G. A. Ferreira // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1994. – Vol. 32, No. 5. – P. 1322–1331.

15. Sethi, S. P. Optimal Control Theory. Applications to Management Science and Economics / S. P. Sethi, G. L. Thomson. – Springer US, 2006. – 536 p.

*References*

1. Gurman V.I. *Princip rasshirenija v zadachi optimal'nogo upravlenija* [The principle of expansion into optimal control problems], Moscow, Fizmatlit, 1997, 287 p. (In Russ.)

2. Krotov V.F., Gurman V.I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravlenija* [Methods and problems of optimal management], Moscow, Nauka, 1973, 448 p. (In Russ.)

3. Miller B.M., Rubinovich E. YA. *Optimizaciya dinamicheskih sistem s impul'snymi upravleniyami i udarnymi vozdejstviyami* [Optimization of dynamic systems with impulsive controls and shock effects], Moscow, LENAND, 2019, 736 p. (In Russ.)

4. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. *Optimal'noye impul'snoye upravleniye s prilozheniyami* [Optimal Impulse Control with Applications], Moscow: Fizmatlit, 2000, 255 p. (In Russ.)

5. Göllmann L., Maurer H. Theory and Applications of Optimal Control Problems with Multiple Impulses. *Journal of Industrial and Management Optimization.* 2014, vol.10, no. 2, pp. 413–441.doi: 10.3934/jimo.2014.10.413

6. Doronin S.V., Zelenov R.V., Rejzmunt E.M., Chernyaev A.P. [Impact pulse model for compacting coal loading for coke production]. *Sistemnyj analiz i matematicheskoe modelirovanie* [System Analysis & Mathematical Modeling], 2023, vol. 5, no. 4, pp. 392-408. doi: 10.17150/2713-1734.2023.5(4).392-408 (In Russ., abstract in Eng.)

7. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. *Impul'snye processy: modeli i prilozheniya* [Impulsive processes: models and applications]. Moscow, Nauka, 1991, 256 p. (In Russ.)

8. Marchuk R.A. [Bursts of geomagnetic pulsations during stationary magnetospheric convection events], *Sistemnyj analiz i matematicheskoe modelirovanie* [System Analysis & Mathematical Modeling], 2025, vol. 7, no. 1, pp. 124-133. doi:10.17150/2713-1734.2025.7(1).124-133 (In Russ., abstract in Eng.)

9. Dyhta V.A. [Lyapunov-Krotov inequality and sufficient conditions for optimal management]. *Itogi nauki i tehniki. Sovremennaja matematika i ee prilozhenija* [Results of science and technology Modern math. and its applications], 2006, vol. 110, pp. 76-108. (In Russ., abstract in Eng.)

10. Krotov V.F. [Sufficient optimality conditions for discrete control systems]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1967, vol. 172, no 1, pp. 18-21. (In Russ., abstract in Eng.)

11. Bensusan A., Lions ZH.-L. *Impul'snoe upravlenie i kvazivariacionnye neravenstva* [Impulsive control and quasi-variational inequalities], Moscow, Nauka, 1987, 596 p. (In Russ.)

12. Arutyunov A., Karamzin D., Lobo Pereira F. Linear impulsive control problems, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 2019, vol. 477, pp. 1-18.

13. Ashhepkov L.T. *Optimal'noe upravlenie razryvnymi sistemami* [Optimal management of discontinuous systems], Novosibirsk: Nauka, 1987, 226 p. (In Russ.)

14. Dorroh J.R., Ferreira G.A. A Multistate, Multicontrol Problem with Unbounded Controls, *SIAM Journal on Control and Optimization,* 1994, vol. 32, no. 5, pp. 1322-1331.

15. Sethi S.P., Thomson G.L. *Optimal Control Theory. Applications to Management Science and Economics*, Springer US, 2006, 536 p.

---

## On Impulse Process Optimality in One Model of Economic Dynamics

**© N. V. Antipina[1]✉**

[1] *Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, natant2012@mail.ru; Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation*

**Keywords:** dynamic models; sufficient optimality conditions; impulse control; quasi-variational inequality; discontinuous trajectories; systems analysis.

**Abstract:** This paper examines an applied model of economic dynamics, formalized as an optimal control problem with linear semi-bounded control. The main difficulty in analyzing such models is related to the violation of regularity conditions, which necessitates the use of specialized mathematical apparatus. A systematic approach to verifying optimality in impulse processes is demonstrated. It is based on the synthesis of a generalized maximum principle and sufficient conditions based on the construction of discontinuous solutions – the Lyapunov–Krotov functions. The optimality of the resulting impulse extremal is proven in a classical one-dimensional advertising budget management model. The optimality of the "impulse – main period – funding termination" strategy is substantiated for a wide class of economic systems with unlimited control actions over short periods of time.

---

## Zur Optimalität des Impulsprozesses in einem Modell der Wirtschaftsdynamik

**Zusammenfassung:** Diese Arbeit untersucht ein angewandtes Modell ökonomischer Dynamik, die als optimales Steuerungsproblem mit linearer halbbegrenzter Steuerung formalisiert wird. Die Hauptschwierigkeit bei der Analyse solcher Modelle liegt in der Verletzung von Regularitätsbedingungen, was den Einsatz spezialisierter mathematischer Methoden erforderlich macht. Es ist ein systematischer

Ansatz zur Überprüfung der Optimalität in Impulsprozessen vorgestellt. Dieser Ansatz basiert auf der Synthese eines verallgemeinerten Maximumprinzips und hinreichenden Bedingungen, die auf der Konstruktion diskontinuierlicher Lösungen – Lyapunov-Krotov-Funktionen – beruhen. Die Optimalität des resultierenden Impulsextremals ist in einem klassischen eindimensionalen Werbebudgetmanagementmodell bewiesen. Die Optimalität der Strategie „Impuls – Hauptperiode – Beendigung der Finanzierung“ ist für eine breite Klasse ökonomischer Systeme mit unbegrenzten Steuerungsmaßnahmen in kurzen Zeiträumen begründet.

---

## Sur l'optimalité du processus impulsif dans un modèle de la dynamique économique

**Résumé:** Est étudié un modèle appliqué de la dynamique économique, qui est formalisé comme un problème de la gestion optimale avec une commande semi-limitée linéaire. La principale difficulté de l'analyse de ces modèles est liée à la violation des conditions de régularité, ce qui conduit à la nécessité de faire appel à un appareil mathématique spécialisé. Est montrée une approche systémique à la vérification de l'optimalité dans les processus impulsifs, basée sur la synthèse du principe généralisé du maximum et des conditions suffisantes, basée sur la construction de solutions discontinues - fonctions de Lyapunov – Krotov. Est prouvée l'optimalité de l'extrême impulsion trouvée dans le modèle unidimensionnel classique de la gestion du budget publicitaire. Est justifiée l'optimalité de la stratégie «impulsion - période principale – fin de financement» pour une large classe de systèmes économiques avec des influences de contrôle illimitées sur de courtes périodes.

---

**Автор:** ***Антипина Наталья Валерьевна*** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математических методов и цифровых технологий, ФГБОУ ВО «Байкальский государственный университет», Иркутск, Российская Федерация.