УДК 519.816
DOI: 10.17277/vestnik.2025.04.pp.603-610

ПОСТРОЕНИЕ МНОГОУРОВНЕВОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ДИАЛОГОВОЙ ПРОЦЕДУРЫ ВЫБОРА НАИЛУЧШЕГО РЕШЕНИЯ

А. В. Литвицкая✉

*Кафедра «Высшая математика», alexandralitvickaya@yandex.ru,
ФГБОУ ВО «ТГТУ», Тамбов, Россия*

Ключевые слова: лицо, принимающее решение; многоуровневая модель; принятие решений; степень превосходства; человеко-машинная процедура.

Аннотация: Предложен общий подход к построению модели конечной задачи принятия решений (ПР) для случая векторного отношения предпочтения на множестве возможных решений. Введено понятие степени превосходства между решениями. На ее основе построена l-уровневая модель ПР и определено решающие правило в виде человеко-машинной процедуры (l-правило). Исследовано свойство бинарных отношений предпочтений на множестве возможных решений.

Введение

Особое место в теории принятия решений (**ПР**) занимают задачи, в которых каждое решение характеризуется некоторым набором параметров [1]. Без ограничения общности можно говорить об этих задачах как о многокритериальных. Параметры при этом выступают в качестве критериев эффективности. Каждый критерий задает на множестве возможных решений бинарное отношение предпочтения [2]. Совокупность таких решений предпочтения образует векторное отношение предпочтения, в соответствии с которым должно быть выбрано наилучшее решение [3].

При проведении исследований в области принятия решений теоретические (формальные) и экспериментальные (неформальные) методы выступают на равных правах [4]. Эксперимент позволяет сформулировать положения и гипотезы, на основе которых строится формальная математическая модель – аналитическая или программно реализованная на ЭВМ. Задание параметров решений и определения отношения предпочтения осуществляется в результате проведения экспертного опроса и на основе обработки полученных при этом данных [5].

В связи с этим актуальной проблемой теории принятия решений является разработка моделей и процедур, совмещающих в себе формальные и неформальные стороны [6]. При этом формальная часть может быть реализована в виде соответствующих программ для ЭВМ, а неформальная обеспечивается включением в процедуру непосредственно эксперта – лица, принимающего решения (**ЛПР**). Соответствующие процедуры называются человеко-машинными процедурами ПР, которые позволяют устранить недоверие к решению, выработанному ЭВМ, так как выбор окончательного решения предоставляется ЛПР, которое руководствуется при этом характеристиками, рассчитанными ЭВМ, а также своими неформализуемыми соображениями [7].

Цель работы – исследование свойств бинарных отношений предпочтений на множестве возможных решений.

Степень превосходства между решениями

Обозначим через H класс кососимметричных скалярных функций двух аргументов

$$H = \{\varphi(x_i, x_j) : \forall x_i, x_j \in H \;\; \varphi(x_i, x_j) = -\varphi(x_j, x_i)\},$$

где φ – процедура измерения, сохраняющая определенный тип шкалы для критерия.

Рассмотрим пару решений x_i и x_j из множества X. В зависимости от модели конкретной задачи есть та или иная информация об этих решениях: предпочтения группы экспертов, наборы значений векторного критерия эффективности, значения оценочной функции для различных состояний «природы» и т.д. [2].

Скалярную функцию $\Phi(x_i, x_j)$, определенную на множестве пар решений на X, назовем степенью превосходства (**СП**) решения x_i над решением x_j, если $\Phi \in H$.

Из определения СП следует

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\Phi(x_i, x_j) = 0,$$

где m – число возможных решений в X.

Пусть информация о решениях задана в виде векторного отношения предпочтения $R = \{R_1, R_2, \cdots, R_n\}$. Степень превосходства решения x_i над x_j, соответствующую набору R, будем вычислять следующим образом [3]. Для каждой пары $(x_i, x_j) \in X$ и отношения $R_\nu \in R \left(\nu = \overline{1,n}\right)$ определим числа

$$\delta_\nu(x_i, x_j) = \begin{cases} p_\nu(x_i, x_j), (x_i, x_j) \in R_\nu^S, \\ 0, \; (x_i, x_j) \in R_\nu^S, \\ -p_\nu(x_i, x_j), (x_j, x_i) \in R_\nu^S, \end{cases}$$

где $p_\nu(x_i, x_j)$ определяется в зависимости от уровня использования информации. Будем различать три уровня использования информации:

1) мажоритарный – информация о решениях задана и используется в шкалах на порядок ниже;

2) используется информация о различной важности частных отношений предпочтения из выбора R, заданная в виде коэффициентов важности $\lambda_\nu, \nu = \overline{1,n}$. Как правило, $\lambda_\nu \ge 0$, $\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_\nu = 1$;

3) количественная информация о решениях задана в виде функций φ_ν, измеренных в интегральных шкалах или в шкалах разностей, и имеется информация о важности отношений предпочтения $\lambda_\nu, \nu = \overline{1,n}$.

В соответствии с уровнем использования информации, величины $p_\nu(x_i, x_j)$ принимают значения:

1) $p_\nu(x_i, x_j) = 1$ для I уровня;

2) $p_\nu(x_i, x_j) = \lambda$ для II уровня;

3) $p_\nu(x_i, x_j) = \lambda_\nu[\varphi_\nu(x_i) - \varphi_\nu(x_j)]$ для III уровня.

За степень превосходства решения x_i над x_j примем величину

$$\Phi\left(x_i, x_j\right) = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu\left(x_i, x_j\right)}{\sum_{\nu=1}^{n} \left|\delta_\nu\left(x_i, x_j\right)\right|}. \qquad (1)$$

В случае возникновения неопределенности $\frac{0}{0}$ считаем $\Phi\left(x_i, x_j\right) = 0$.

Степень превосходства, определенная таким образом, удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\Phi\left(x_i, x_j\right) = -\Phi\left(x_j, x_i\right), \Phi \in H$, то есть является в действительности СП по определению;

2) $-1 \le \Phi\left(x_i, x_j\right) \le 1$ для всех $\left(x_i, x_j\right) \in X$;

3) $\Phi\left(x_i, x_j\right) = 1 \Leftrightarrow \left(x_i, x_j\right) \in R_k^S$, $\Phi\left(x_j, x_i\right) = -1 \Leftrightarrow \left(x_j, x_i\right) \in R_k^S$.

Отношение предпочтения уровня на множестве возможных решений

При помощи СП введем бинарное отношение, определенное на множестве возможных решений,

$$R(l) = \left\{\left(x_i, x_j\right) \in E : \Phi\left(x_i, x_j\right) \ge l, 0 \le l \le 1\right\}.$$

Назовем его отношением предпочтения уровня *l*. Величина *l* определяется в зависимости от специфики задачи. Более подробно выбор уровня будет обсуждаться далее.

Так, постоянное отношение $R(l)$ удовлетворяет свойствам антисимметричного метризованного отношения

$$\overline{R(l)} = \left\langle R(l), W\left(R(l)\right)\right\rangle,$$

где $W\left(R(l)\right)$ – матрица метризованного отношения $R(l)$, представляющая собой совокупность значений степени превосходства для всех пар решений из X [4].

Заметим, что метризованные отношения содержат сведения о степени предпочтения объектов и сходства между ними.

Обратное к $R(l)$ отношение определяется как

$$R(l)^{-1} = \left\{\left(x_i, x_j\right) \in E : \Phi\left(x_i, x_j\right) \le -l, 0 \le l \le 1\right\}.$$

Множество $\text{O} = E \setminus \left(R(l) \cup R(l)^{-1}\right)$ образуется из несравнимых в отношении $R(l)$ решений. Нетрудно показать, что $R(l)$ – свертка для векторного отношения *X*.

Теорема 1. Отношение $R(l)$ эффективно

$$R(l) \ge R_k, \ \forall\, 0 \le l \le 1.$$

Доказательство. Пусть $\langle X, R\rangle$, при этом $R = \left\{R_1, R_2, \cdots, R_n\right\}$. Они являются связными (рис. 1).

Положим, что имеются решения задач ПР, для которых на множестве *X* определен набор отношений $R = \left\{R_1, R_2, \cdots, R_n\right\}$, который будем называть векторным

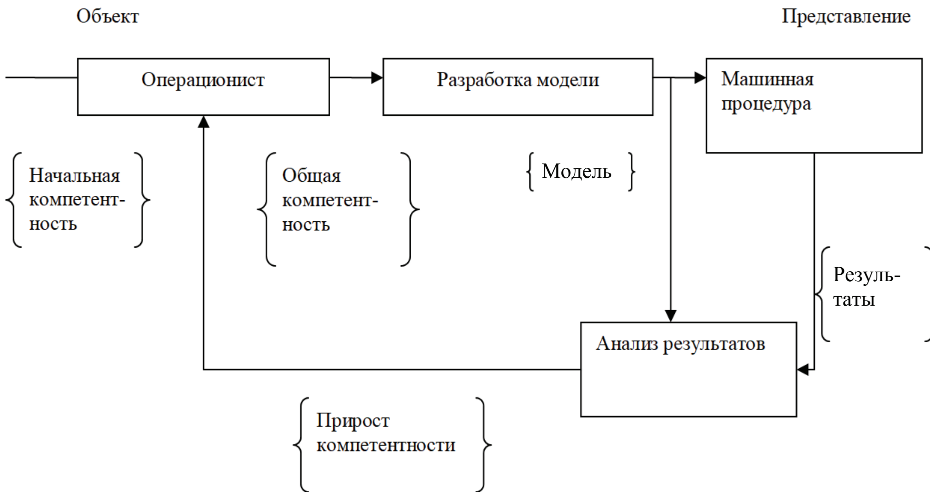

Рис. 1. Блок-схема, описывающая связи между объектом исследования и его представлением

отношением $R_\nu \in R \left(\nu = \overline{1,n}\right)$ предпочтения. Каждое частное отношение предпочтения представляет собой $R_\nu(A, I)$. В такой постановке на основе одного подхода могут быть изучены три типа задач ПР: многокритериальные, группового выбора и при неопределенности и риске [3].

Известно, что сверткой отношений $R_\nu \left(\nu = \overline{1,n}\right)$ является любое отношение

$$R^+ \leq \bigcup_{\nu=1}^{n} R_\nu = R_k .$$

Для данного неравенства каждая компонента вектора R^+ меньше либо равна соответствующей компоненте, принадлежащей множеству R_ν или множеству R_k.

Свертка эффективная, если

$$R^+ \geq \bigcap_{\nu=1}^{n} R_\nu = R_k , \qquad (2)$$

где R_k – отношение Парето доминирования для векторного отношения предпочтения $\{R_\nu\}_{\nu=\overline{1,n}}$ [1].

Отметим, что в неравенстве (2) каждая компонента вектора R^+ больше либо равна соответствующей компоненте, принадлежащей и множеству R_ν, и множеству R_k.

Отношение R_k выражается через частное отношение по формуле (2).

Для доказательства теоремы покажем, что

$$R^S(l) \supseteq R_k^S .$$

Пусть пара решений $\left(x_i, x_j\right) \in E$ принадлежит R_k^S.

Тогда для этой пары $\Phi(x_i, x_j) = 1$ по свойству 3), то есть $(x_i, x_j) \in R(l)^S$, $\forall\ 0 \le l \le 1$. Следовательно, $R_k^S \subseteq R^S(l)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. $R(1) = R_k^S$.

Доказательство. Этот факт непосредственно следует из определения отношения предпочтения уровня *l* и свойства 3) СП.

Следствие 2. $R(0) = R_k^S$.

В частном случае СП может строиться на основании одного единственного отношения предпочтения. Тогда теорема 1 дает следующий результат.

Утверждение 1. Пусть имеется $\langle X, R \rangle$, где X – конечное множество возможных решений, R – квазипорядок, определенный на *X*. Будем считать, что *R* полное. Тогда для всех $l \in [0,1]$ $R(l) \ge R$, где $R(l)$ – отношение предпочтения уровня *l*, определенное на основе *R* [5].

Следует показать, что отношение R необходимо продолжить на *X* до отношения R', то есть так, чтобы

$$R' \supseteq R,\ (R')^S \supseteq R^S,\ (R')^S \subseteq R^S.$$

Метризованное отношение $\hat{P} = \langle P, W(P) \rangle$ называется аддитивным, если P транзитивно: $[(x_i, x_r) \in P, (x_r, x_j) \in P] \Rightarrow (x_i, x_j) \in P$, и одновременно для соответствующих элементов матрицы $W(P)$ выполняется условие аддитивности: $w_{ir} + w_{rj} = w_{ij}$ [4].

Обозначим через *T* класс скалярных функций, определенных на некотором множестве *E* и удовлетворяющих условию аддитивности:

$$T = \{\varphi(x_i, x_j) : \forall x_i, x_j, x_r \in X : \varphi(x_i, x_r) + \varphi(x_r, x_j) = \varphi(x_i, x_j)\}. \tag{3}$$

Теорема 2. Пусть имеем $R(l)$. Если $\Phi \in T$, то $R(l)$ транзитивно и, следовательно, $\hat{R}(l)$ является аддитивным метризованным отношением.

Доказательство. Транзитивность отношения $R(l)$ означает следующее: $\forall x_i, x_j, x_k \in X$: $(x_i, x_k) \in R(l), (x_k, x_j) \in R(l) \Rightarrow (x_i, x_j) \in R(l), : \Phi(x_i, x_k) \ge l$, $\Phi(x_k, x_j) \ge l \Rightarrow \Phi(x_i, x_j) \ge l$, но из условия $\Phi \in T$ следует $\Phi(x_i, x_k) + \Phi(x_k, x_j) = \Phi(x_i, x_j)$. Следовательно, $\Phi(x_i, x_j) \ge 2l$ и тем более, $\Phi(x_i, x_j) \ge l$, так как $l \ge 0$ и, следовательно, $(x_i, x_j) \in R(l)$, что и требовалось доказать.

Следствие 3. Если $\Phi \in T$, то $R(l)$ – строгий частичный порядок при $l \ne 0$.

Доказательство. По определению строгого порядка для $R(l)$ необходимо доказать его транзитивность и антирефлексивность. Транзитивность $R(l)$ следует из теоремы 2, а антирефлексивность и несвязность вытекает из самого определения $R(l)$.

Следствие 4. Если $\Phi \in T$, то $R(0)$ – линейный квазипорядок.

Доказательство. Утверждения следствия непосредственно следует из теоремы 2. $R(0)$ является линейным, так как $\forall x_i, x_j, x_k \in X$. Степень превосходства либо положительна, либо отрицательна. Если СП равна 0, то будем полагать, что решения равноценны.

Следствие 5. Если $\Phi \in T$, то отношение

$$Q(0) = \{(x_i, x_j) \in E : \Phi(x_i, x_j) = 0\}$$

является отношением эквивалентности на X и в силу этого образует разбиение множества X на классы эквивалентности (фактор-множество $X \setminus Q(0)$).

Доказательство. Рефлексивность и симметричность отношения $\Phi(0)$ следует из свойств СП, транзитивность – следствие теоремы 2.

Утверждение 2. Для степени превосходства, определенной с помощью III уровня использования информации ($p_\nu(x_i, x_j) = \lambda_\nu[\varphi_\nu(x_i) - \varphi_\nu(x_j)]$),

$$\Phi \in T.$$

Доказательство. Непосредственная подстановка $p_\nu(x_i, x_j)$ в формулу (1) дает результат

$$\Phi(x_i, x_j) = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu [\phi_\nu(x_i) - \phi_\nu(x_j)]}{\sum_{\nu=1}^{n} \left|\lambda_\nu [\phi_\nu(x_i) - \phi_\nu(x_j)]\right|}.$$

Подставив данное выражение в свойство 3), определяющее класс T, путем несложных преобразований получим справедливость утверждения.

Теорема 3. Для двух величин уровней l_1 и l_2, таких что $l_1 > l_2$, соответствующие отношения предпочтения являются вложенными в следующем порядке

$$R(l_1) \le R(l_2).$$

Доказательство. По определению отношения предпочтения уровня l получаем:

$$R(l_1) = \{(x_i, x_j) \in E : \Phi(x_i, x_j) \ge l_1\},$$

$$R(l_2) = \{(x_i, x_j) \in E : \Phi(x_i, x_j) \ge l_2\}.$$

Для пары решений $(x_i, x_j) \in E$ отношение $x_i R^S(l_1) x_j : \Phi(x_i, x_j) > l_1$. Так как по условию теоремы $l_1 > l_2$, то тем более $\Phi(x_i, x_j) \ge l_2$ и $(x_i, x_j) \in R^S(l_2)$, то есть $R^S(l_1) \subseteq R^S(l_2)$, и по определению вложенных отношений это означает, что $R(l_1) \le R(l_2)$, что и требовалось доказать.

Заключение

Построена модель для конечных задач ПР, в которых информация о решениях задана векторным отношением предпочтения. На основании l-уровневой модели разрабатывается решающее правило, представленное в виде человеко-машинной процедуры (l-правило). Исследована задача построения функции полезности на множестве всех решений с использованием понятия степени превосходства между решениями. Человеко-машинная процедура дает единый подход для решения трех классов задач ПР: многокритериальных, группового выбора и задач ПР при неопределенности и риске.

Список литературы

1. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – Москва : Наука, 1982. – 256 с.

2. Розен, В. В. Математические модели принятия решений в экономике / В. В. Розен. – Москва : Университет, Высшая школа, 2002. – 288 с.

3. Ногин, В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход / В. Д. Ногин. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 176 с.

4. Гантмахер, Ф. П. Теория матриц / Ф. П. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.

5. Грунина, Г. С. Решение многокритериальных задач оптимизации в условиях качественной неопределенности / Г. С. Грунина, Н. П. Деменков, А. А. Евлампиев // Вестник МГТУ. – 1998. – №1. – С. 45 – 53.

6. Татаринов, Ю. Б. Проблемы оценки эффективности фундаментальных исследований / Ю. Б. Татаринов. – Москва : Наука, 1986. – 227 с.

7. Юдин, Д. Б. Вычислительные методы принятия решений / Д. Б. Юдин. – Москва : Наука, 1986. – 319 с.

Construction of a Multilevel Model for the Dialogical Procedure of Selecting the Best Solution

A. V. Litvitskaya✉

Department of Higher Mathematics, alexandralitvickaya@yandex.ru;
TSTU, Tambov, Russia

Keywords: decision maker; multilevel model; decision making; degree of superiority; human-machine procedure.

Abstract: A general approach to constructing a model of a finite decision problem (FP) for the case of a vector preference relation on a set of possible solutions is proposed. The concept of the degree of superiority between solutions is introduced. Based on this approach, an l-level FP model is constructed and a decision rule in the form of a human-machine procedure (l-rule) is defined. The properties of binary preference relations on a set of possible solutions are studied.

References

1. Podinovskiy V.V., Nogin V.D. *Pareto-optimal'nyye resheniya mnogokriterial'nykh zadach* [Pareto-Optimal Solutions to Multicriteria Problems], Moscow: Nauka, 1982, 256 p. (In Russ.)

2. Rozen V.V. *Matematicheskiye modeli prinyatiya resheniy v ekonomike* [Mathematical Models of Decision-Making in Economics], Moscow: Universitet, Vysshaya shkola, 2002, 288 p. (In Russ.)

3. Nogin V.D. *Prinyatiye resheniy v mnogokriterial'noy srede: kolichestvennyy podkhod* [Decision-Making in a Multicriteria Environment: A Quantitative Approach], Moscow: FIZMATLIT, 2005, 176 p. (In Russ.)

4. Gantmakher F.P. *Teoriya matrits* [Matrix Theory], Moscow: Nauka, 1967, 576 p. (In Russ.)

5. Grunina G.S., Demenkov N.P., Yevlampiyev A.A. [Solution of multicriteria optimization problems under qualitative uncertainty], *Vestnik MGTU* [Bulletin of Moscow State Technical University], 1998, no. 1, pp. 45-53. (In Russ., abstract in Eng.)

6. Tatarinov Yu.B. *Problemy otsenki effektivnosti fundamental'nykh issledovaniy* [Problems of Assessing the Effectiveness of Fundamental Research], Moscow: Nauka, 1986, 227 p. (In Russ.)

7. Yudin D.B. *Vychislitel'nyye metody prinyatiya resheniy* [Computational Methods of Decision-Making], Moscow: Nauka, 1986, 319 p.

Entwicklung eines mehrstufigen Modells für ein Dialogverfahren zur Auswahl der besten Lösung

Zusammenfassung: Es ist ein allgemeiner Ansatz zur Konstruktion eines endlichen Entscheidungsmodells (DMP-Modell) für den Fall einer Vektorpräferenzrelation auf einer Menge möglicher Lösungen vorgeschlagen. Das Konzept des Überlegenheitsgrades zwischen Lösungen ist eingeführt. Basierend auf diesem Ansatz ist ein l -stufiges DMP-Modell konstruiert und eine Entscheidungsregel in Form einer Mensch-Maschine-Prozedur (l-Regel) definiert. Es sind die Eigenschaften binärer Präferenzrelationen auf einer Menge möglicher Lösungen untersucht.

Création d'un modèle multiniveau pour la procédure de sélection de dialogue meilleure solution

Résumé: Est proposée une approche générale pour la construction d'un modèle de problème de décision fini (PD) pour le cas d'une relation vectorielle de préférence sur un ensemble de solutions possibles. Est introduite la notion de la supériorité entre les decisions, basée sur le modèle de l-niveau de la PD; est définie une règle décisive sous la forme d'une procédure homme-machine (l-règle). Est étudiée la propriété des relations binaires de préférence sur un ensemble de solutions possibles.

Автор: ***Литвицкая Александра Владимировна*** – ассистент кафедры «Высшая математика», ФГБОУ ВО «ТГТУ», Тамбов, Россия.