

ГИБРИДНЫЙ ПОКООРДИНАТНЫЙ СПУСК ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ РАЗНОГАБАРИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Р. В. Арутюнян¹, С. Я. Егоров², С. А. Некрасов³, Н. В. Быковский⁴✉

Кафедра «Математическая кибернетика и информационные технологии» (1),
ФГБОУ ВО «Московский технический университет связи
и информатики», Москва, Россия;

кафедра «Компьютерно-интегрированные системы в машиностроении» (2),
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»,
Тамбов, Россия;

кафедры «Прикладная математика» (3) «Физика и фотоника» (4),
back_of_sky@bk.ru;

ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет
им. М. И. Платова», Новочеркасск, Россия

Ключевые слова: аддитивная гибридизация; дискретные пространства; инкрементальные вычисления; квадратичная задача о назначениях; комбинаторная оптимизация; мультистартовая диверсификация; размещение разногабаритных элементов.

Аннотация: Рассмотрена NP -трудная задача комбинаторной оптимизации – дискретное размещение разногабаритных элементов с учетом сложных геометрических ограничений. Для ее решения предложена оригинальная гибридная схема, которая объединяет модифицированный покоординатный спуск для локального поиска и мультистартовую диверсификацию для исследования глобального пространства решений. Математическая модель формализована как обобщенная квадратичная задача о назначениях, где ограничения на непересечение, запретные зоны и связность составных элементов учитываются через систему аддитивных штрафных функций. Ключевым элементом, обеспечивающим вычислительную эффективность, является применение инкрементальных оценок, что позволяет пересчитывать изменение целевого функционала при локальных шагах (попарных обменах) за линейное время $O(n)$. Эмпирическая валидация методологии проведена на наборе репрезентативных задач малой и средней размерности, включая моделирование компоновки печатных плат с запретными областями произвольной формы. Результаты численных экспериментов подтвердили высокую устойчивость алгоритма к выбору начальных приближений и корректную обработку гетерогенных элементов. Показано, что гибридная схема обеспечивает более быструю и стабильную сходимость по сравнению с классическими стохастическими подходами. Разработанная программная реализация поддерживает как двумерные, так и трехмерные дискретные решетки и различные метрики расстояний. Сформулированы ограничения метода и намечены пути его дальнейшего развития.

Введение

Экспоненциальный рост сложности интегральных схем привел к качественному изменению методологических подходов в области физического проектирования. Современные процессоры содержат свыше 50 млрд транзисторов [1 – 3], каждое новое поколение технологических норм удваивает плотность размещения.

Критичным становится не минимизация общей длины соединений, а обеспечение выполнения множественных ограничений: тепловых, временных, электромагнитных.

Эволюция методов размещения демонстрирует переход от простых к комплексным подходам. Ранние работы Кляйнханса по квадратичному программированию [4] заложили основы аналитических методов. Субмикронные технологии потребовали учета управления перегрузками, оптимизации мощности, термального баланса [5]. Революционным стало применение машинного обучения: работа [3] показала превосходство обучения с подкреплением (RL) над классическими эвристиками на промышленных схемах Google.

Параллельно развивались подходы для смежных областей. В облачных вычислениях задача размещения виртуальных машин решается с учетом динамической миграции и балансировки нагрузки [6, 7]. Квантовые вычисления породили специфические требования к топологии размещения кубитов, учитывающие декореацию и ограничения на связность [8]. Производственная логистика оперирует трехмерными конфигурациями с временными окнами и переменными габаритами.

Математическая сущность проблемы сводится к дискретной оптимизации на комбинаторных структурах. Доказана NP -трудность уже для простейших постановок [2], что исключает возможность построения полиномиальных точных алгоритмов при условии $P \neq NP$. Практические задачи усложняются наличием гетерогенных элементов, запретных зон, фиксированных терминалов. Стандартная формулировка через квадратичную задачу о назначениях требует $O(n!)$ переборов для n элементов.

Существующие методологии делятся по гарантиям оптимальности. Точные методы (целочисленное линейное программирование, ILP; ветви и границы) применимы для малых размерностей (до 100 элементов). Классические метаэвристики (генетические алгоритмы, имитация отжига, муравьиные колонии) дают приемлемое качество за полиномиальное время, но чувствительны к настройке [7, 9]. Гибридные методы часто показывают лучшее соотношение качества и времени вычислений [5, 10, 11]. Комбинаторные подходы, в частности, продемонстрировали свою эффективность при решении задач размещения элементов нерегулярной формы в многомерных пространствах со сложной топологией [12, 13].

Критический анализ литературы выявляет пробел в области аддитивных методов для разногабаритных элементов. Большинство работ оперирует точечными объектами или прямоугольными блоками фиксированного размера. Реальные задачи требуют размещения элементов произвольной формы с учетом их ориентации и деформируемости. Недостаточно исследованы механизмы динамической коррекции параметров в процессе оптимизации.

Цель работы – разработка и исследование гибридного метода для задачи дискретного размещения разногабаритных элементов, способного эффективно обрабатывать сложные геометрические ограничения.

Для восполнения указанных пробелов предложена аддитивная гибридизация локального поиска. Метод объединяет модифицированный покоординатный спуск с мультистартом и обеспечивает устойчивость к начальным условиям. Инкрементальные вычисления ускоряют оценку целевой функции. Эффективность подтверждена на репрезентативных тестах. Основной акцент – задачи малой и средней размерности (цеховые размещения, электрические и радиотехнические цепи [14 – 16]), где достигается сбалансированное качество при типовых ресурсах.

Постановка задачи и математическая формализация

Пространство размещения формализуется как дискретная решетка $\mathcal{L} = \mathbb{Z}_{n_x} \times \mathbb{Z}_{n_y}$, где $\mathbb{Z}_k = \{1, 2, \dots, k\}$. Каждая позиция $(i, j) \in \mathcal{L}$ соответствует элементарной ячейке с координатами центра $(x_{ij}, y_{ij}) = (ih, jh)$, где h – шаг дискретизации.

Определение 1 (конфигурационное пространство). Для множества элементов $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ с геометрическими характеристиками $\{G_1, \dots, G_n\}$, где $G_i \subset \mathbb{Z}^2$ определяет занимаемую область, конфигурационным пространством называется

$$\mathcal{C} = \left\{ p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \mid \forall i \neq j : G_i(p(e_i)) \cap G_j(p(e_j)) = \emptyset \right\},$$

где $G_i(p(e_i))$ обозначает трансляцию области G_i в позицию $p(e_i)$.

Введем матрицу связности $R = [r_{ij}]_{n \times n}$, где $r_{ij} \geq 0$ определяет интенсивность взаимодействия между элементами e_i и e_j . Матрица R симметрична и неотрицательна. Для составных элементов вводятся виртуальные связи высокой интенсивности $r_{ij} = \omega$, где $\omega \gg \max_{p,q} r_{pq}$.

Определение 2 (целевой функционал). Качество размещения $p \in \mathcal{C}$ оценивается функционалом:

$$\Phi(p) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \uparrow r_{ij} d(p(e_i), p(e_j)) + \sum_{k=1}^m \uparrow \lambda_k \Psi_k(p), \quad (1)$$

где $d : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_+$ – метрика на решетке; Ψ_k – штрафные функции ограничений; $\lambda_k > 0$ – аддитивные множители.

Для вычислительной эффективности вводится биективное отображение между двумерными координатами и линейными индексами:

Лемма 1 (линеаризация координат). Отображения $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \{1, \dots, n_x n_y\}$ и φ^{-1} определяются как

$$\varphi(i, j) = (i-1)n_y + j, \varphi^{-1}(k) = \left\lfloor \frac{k-1}{n_y} \right\rfloor + 1, (k-1) \bmod n_y + 1. \quad (2)$$

Обозначение $\lfloor \dots \rfloor$ соответствует функции целой части. Дробная составляющая при этом отбрасывается, и результат равен наибольшему целому числу, не превышающему аргумент.

Данные отображения взаимно обратны и сохраняют метрические свойства с точностью до масштабирования.

Доказательство. Проверим композицию $\varphi^{-1} \circ \varphi$. Пусть $(i, j) \in \mathcal{L}$, тогда $k = \varphi(i, j) = (i-1)n_y + j$. Имеем:

$$\left\lfloor \frac{k-1}{n_y} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(i-1)n_y + j - 1}{n_y} \right\rfloor = i - 1,$$

$$(k-1) \bmod n_y = ((i-1)n_y + j - 1) \bmod n_y = j - 1.$$

Следовательно, $\varphi^{-1}(k) = (i, j)$, что доказывает биективность.

Основная оптимизационная задача формулируется следующим образом:

Теорема 1 (сложность задачи размещения). Задача минимизации функционала (1) на конфигурационном пространстве \mathcal{C} является NP -трудной даже при единичных весах $r_{ij} \in \{0, 1\}$ и манхэттенской метрике.

Доказательство. Редукция от задачи о квадратичном назначении (англ. – Quadratic assignment problem (QAP)). Для произвольной инстанции QAP с матрицами потоков F и расстояний D строим эквивалентную задачу размещения, полагая $r_{ij} = F_{ij}$ и ограничивая размещение точечных элементов заданными позициями. Оптимальное решение исходной QAP восстанавливается из оптимального размещения за полиномиальное время.

Алгоритмическая реализация и анализ сложности

Раздел содержит формальное описание алгоритмической процедуры. Отдельно рассматривается доказательство сходимости. Завершает изложение асимптотический анализ вычислительных затрат.

Реализация: конфигурация p хранится как перестановка; расстояния $d(\cdot, \cdot)$ считаются на лету; ограничения заданы предикатами Ψ_k и штрафами; составные элементы удерживаются виртуальными связями $\omega >> \max r_{pq}$. Диапазон λ_k ограничен $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. Рестарты формируют допустимые старты $p^{(0)}$ и исследуют разные области поиска.

Теорема 2 (сходимость локального поиска). Алгоритм локального поиска с парными перестановками сходится к локальному минимуму за конечное число итераций $I \leq \binom{n}{2} \Delta_{\max}$, где Δ_{\max} – максимальная разность значений функционала.

Доказательство. Последовательность значений $\{\Phi(p^{(t)})\}_{t=0}^{\infty}$ монотонно убывает и ограничена снизу нулем. На каждой итерации либо происходит улучшение на величину не менее $\delta_{\min} > 0$ (минимальное улучшение при дискретной метрике), либо достигается локальный минимум. Число возможных конфигураций конечно: $|\mathcal{C}| \leq (n_x n_y)! / (n_x n_y - n)!$. Следовательно, алгоритм завершается за конечное число шагов.

Ключевым элементом эффективности является инкрементальное вычисление.

Лемма 2 (инкрементальная оценка). При перестановке элементов e_i и e_j изменение функционала вычисляется за $O(n)$ операций:

$$\Delta \Phi_{ij} = \sum_{k \neq i, j} [r_{ik}(d(p(e_j), p(e_k)) - d(p(e_i), p(e_k))) + r_{jk}(d(p(e_i), p(e_k)) - d(p(e_j), p(e_k)))], \quad (3)$$

Доказательство. При обмене позиций элементов e_i и e_j в сумме (1) меняются только слагаемые, содержащие индексы i или j . Таких слагаемых порядка $2(n-2)$, что и дает линейную сложность оценки.

Механизм адаптации штрафных множителей основан на анализе нарушений ограничений

$$\lambda_k^{(t+1)} = \begin{cases} \min\left(\rho \lambda_k^{(t)}, \lambda_{\max}\right), & \text{если } \Psi_k(p^{(t)}) > \varepsilon, \\ \max\left(\lambda_k^{(t)} / \rho, \lambda_{\min}\right), & \text{если } \Psi_k(p^{(t)}) = 0, \\ \lambda_k^{(t)}, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4)$$

где $\rho > 1$ – коэффициент адаптации; ε – порог допустимого нарушения.

Теорема 3 (завершение локального поиска) Локальный поиск, принимающий только улучшающие попарные обмены, за конечное число шагов достигает локального минимума функционала Φ на \mathcal{C} .

Доказательство. Значения Φ образуют конечное множество, поскольку множество конфигураций \mathcal{C} конечно. На каждом шаге алгоритм принимает только обмен, строго уменьшающий Φ . Следовательно, последовательность значений Φ строго убывает и не может содержать циклов. Переходы завершаются, когда отсутствуют улучшающие обмены, то есть достигнут локальный минимум.

Теорема 4 (достижимость глобального оптимума при рестартах). Пусть существует $\varepsilon > 0$ такое, что из любой конфигурации p в окрестности $B_{\psi^*}(\varepsilon)$ глобального оптимума ψ^* локальный поиск, принимающий только улучшающие обмены, сходится к глобальному оптимуму ψ^* . Если генерация стартовых конфигураций эргодична (вероятность попадания в каждую открытую область положительна) и число рестартов не ограничено, то глобальный оптимум достигается с вероятностью 1.

Доказательство. Обозначим через $B_{\psi^*}(\varepsilon)$ указанную окрестность притяжения. По эргодичности существует $p > 0$, что старт попадает в $B_{\psi^*}(\varepsilon)$ с вероятностью p . Для T независимых рестартов вероятность ни разу не попасть в $B_{\psi^*}(\varepsilon)$ равна $(1-p)^T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. По предположению о локальной сходимости из $B_{\psi^*}(\varepsilon)$ локальный поиск достигает ψ^* , откуда следует утверждение, что вероятность нахождения глобального оптимума равна единице.

Схема метода: гибрид локального поиска и диверсификации. Три фазы – инициализация, локальные улучшения, аддитивная диверсификация. Локальные шаги – попарные обмены с инкрементальной оценкой $\Delta\Phi$ по формуле (3). Штрафы обновляются по правилу (4).

Метод имеет аналогию с блочными схемами Гаусса–Зейделя. Подмножества элементов оптимизируются последовательно при фиксированных остальных. Предобуславливание реализуется выбором порядка обработки согласно вкладу элементов в целевую функцию. В ряде тестов упорядоченная обработка пар давала снижение числа итераций по сравнению со случайным порядком; величина эффекта существенно зависит от структуры связности и настроек, строгая статистическая оценка требует отдельного исследования.

Учет геометрических и топологических ограничений

Реальные задачи размещения характеризуются гетерогенностью элементов и сложностью ограничений. Предлагаемая методология обеспечивает универсальный механизм их учета через систему штрафных функций и структурную декомпозицию.

Элемент произвольной конфигурации e_i представляется через покрытие базовыми ячейками:

Определение 3 (составной элемент). Элемент e_i с геометрией $G_i \subset \mathbb{Z}^2$ декомпозируется на m_i связанных ячеек $\{c_{i,1}, \dots, c_{i,m_i}\}$. Связность обеспечивается введением виртуальных ребер с весами:

$$w_{jk}^{(i)} = \begin{cases} \omega, & \text{если ячейки } c_{i,j}, c_{i,k} \text{ смежны в } G_i, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5)$$

где $\omega = K \max_{p,q} r_{pq}$, $K \gg 1$ – коэффициент доминирования.

Лемма 3 (сохранение связности). При $K > n^2 \max_{i,j} |G_i| |G_j|$ оптимальное размещение сохраняет связность всех составных элементов.

Доказательство. Стоимость разрыва виртуального ребра превышает максимально возможное улучшение от оптимизации внешних связей. Суммарный вес внешних связей ограничен величиной порядка $n^2 \max r_{pq}$, тогда как стоимость одного разрыва равна ωh , где h – минимальное расстояние между несмежными ячейками.

Геометрические ограничения формализуются через систему предикатов

$$\Psi(p) = \bigvee_{k=1}^K \psi_k(p), \psi_k : \mathcal{C} \rightarrow \{0, 1\}, \quad (6)$$

где каждый предикат ψ_k проверяет выполнение k -го ограничения.

Запретные зоны произвольной формы задаются через характеристические функции

$$\Psi_{\text{запрет}}(p) = \sum_{i=1}^n \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z(t) \mathbb{I}[G_i(p(e_i)) \cap z \neq \emptyset], \quad (7)$$

где \mathcal{Z} – множество запретных зон; $\lambda_z(t)$ – аддитивный штраф для зоны z на итерации t .

Методология естественным образом распространяется на трехмерные конфигурации, востребованные в задачах размещения компонентов на многослойных печатных платах, складской логистики и архитектурного планирования.

Теорема 5 (трехмерная линеаризация). Для решетки $\mathcal{L}_{3D} = \mathbb{Z}_{n_x} \times \mathbb{Z}_{n_y} \times \mathbb{Z}_{n_z}$ биективное отображение $\phi : \mathcal{L}_{3D} \rightarrow \{1, \dots, N\}$, где $N = n_x n_y n_z$, задается формулами (для исключения путаницы линейный индекс обозначим через q):

$$\begin{aligned} \phi(i, j, k) &= (i-1)n_y n_z + (j-1)n_z + k; \\ \phi^{-1}(q) &= \left(\frac{q-1}{n_y n_z} + 1, \frac{(q-1) \bmod (n_y n_z)}{n_z} + 1, (q-1) \bmod n_z + 1 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по размерности. База индукции – одномерный случай тривиален. Переход: представим трехмерную решетку как стек двумерных слоев. Индекс q однозначно определяет слой $s = \lfloor (q-1)/(n_y n_z) \rfloor$ и позицию внутри слоя $r = (q-1) \bmod (n_y n_z) + 1$. По индуктивному предположению r однозначно определяет (j, k) . Композиция отображений дает требуемую биекцию.

Вычислительная сложность трехмерного случая возрастает незначительно: добавляется $O(1)$ операций на преобразование координат. Метрики обобщаются естественно: манхэттенская $d_1((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$, евклидова через стандартную норму в \mathbb{R}^3 .

Экспериментальная верификация

Эмпирическая валидация разработанной методологии проводилась на структурированном наборе тестовых инстанций, охватывающих ключевые классы практических задач. Экспериментальный протокол включал три фазы: калибровку параметров, оценку производительности и сравнительный анализ.

Программный комплекс [11] предназначен для расчета оптимальных размещений в двумерных (2D) и трехмерных (3D) структурах с учетом конструктивных ограничений (крупногабаритные элементы, запретные зоны, фиксированные

клеммы). Реализованы выбор метрики, аддитивные штрафы, визуализация и сохранение результатов. Архитектура модульная: генерация стартов, локальные операторы, метрики, блок ограничений, слой визуализации. Комплекс ориентирован на инженерные задачи малой и средней размерности (приборостроение, электротехника, учебные сценарии) и не требует экстремальных вычислительных ресурсов.

Тестовый корпус формировался по принципам репрезентативности и воспроизводимости: использовались решетки малой и средней размерности, структурированные задачи с известным оптимумом (тип «змейка») для проверки корректности, а также модели печатных плат с запретными зонами произвольной формы. Для оценки устойчивости применялись повторные запуски; фиксировались значения целевой функции и время выполнения. Задачи размерности 6×6 (18 – 36 элементов) решаются за 2 – 5 мин при типовых ресурсах. Увеличение размерности до 10×10 приводит к росту времени до 15 – 20 мин. Зависимость близка к квадратичной, что согласуется с теоретическими оценками.

Результаты численных экспериментов

Пример А (плоское размещение с прямоугольной запретной областью). Исследована работа метода при наличии связной запретной области. На решетке 6×6 размещались 18 элементов с исключением зоны $\{(x, y) : 1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 4\}$. Связи между элементами задавались случайно с ограничениями на степень, что имитирует разнообразные топологии (рис. 1).

Эволюция целевого функционала имеет ступенчатый характер из-за дискретности пространства решений (рис. 2). На первых шагах наблюдаются крупные улучшения за счет грубых обменов; по мере стабилизации штрафов амплитуда приростов снижается.

Пример динамики изменения целевой функции и лучшего найденного значения при мультистартовой оптимизации приведен на рис. 3.

Пример Б (круговая запретная область). Запретная область задавалась неравенством $(x - 3,5)^2 + (y - 3,5)^2 \leq 1,5^2$ в непрерывном приближении с последующей дискретизацией (рис. 4). Дополнительно фиксировались позиции двух терминальных элементов для имитации внешних интерфейсов.

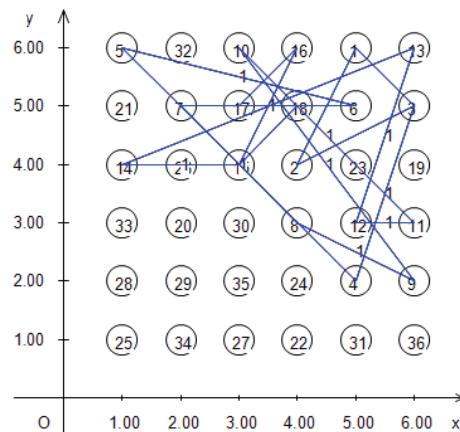


Рис. 1. Начальная конфигурация элементов на дискретной решетке с центральной запретной зоной

(линии отображают интенсивность взаимодействий между компонентами согласно заданной матрице связности)

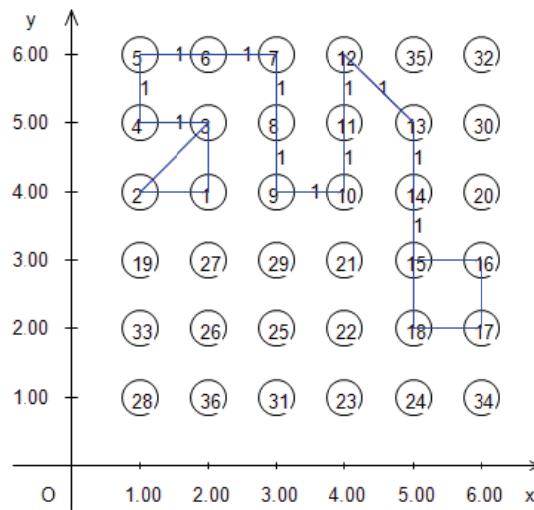


Рис. 2. Финальная конфигурация после гибридной оптимизации
(соблюдены геометрические ограничения, связи укорочены)

```

k = 101 fmin = 839.33 fmin0 = 756.00 i = 1 fm1 = 756.00 fm2 = 756.00
k = 202 fmin = 1004.07 fmin0 = 755.49 i = 2 fm1 = 755.49 fm2 = 755.49
k = 303 fmin = 838.09 fmin0 = 755.49 i = 3 fm1 = 755.49 fm2 = 755.49
k = 404 fmin = 840.57 fmin0 = 754.25 i = 4 fm1 = 754.25 fm2 = 754.25
k = 606 fmin = 763.23 fmin0 = 753.84 i = 1 fm1 = 753.84 fm2 = 753.84
k = 707 fmin = 839.74 fmin0 = 753.84 i = 2 fm1 = 753.84 fm2 = 753.84
k = 808 fmin = 840.16 fmin0 = 753.84 i = 3 fm1 = 753.84 fm2 = 753.84
k = 909 fmin = 839.33 fmin0 = 753.84 i = 4 fm1 = 753.84 fm2 = 753.84

```

Result: Shtraf =0 fopt =753.835569799683

Рис. 3. Пример динамики изменения целевой функции и лучшего найденного значения при мультистартовой оптимизации

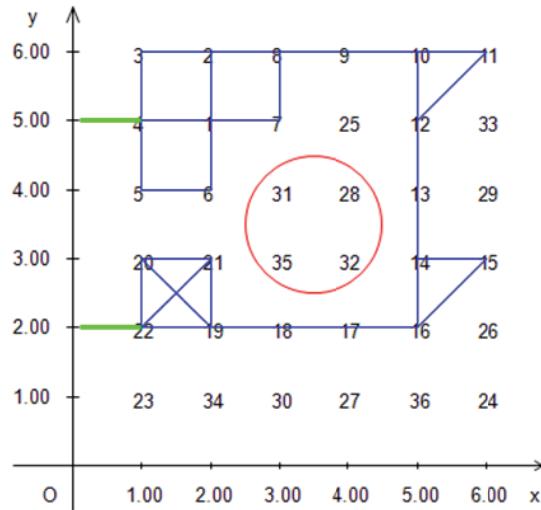


Рис. 4. Оптимальное размещение при круговой запретной зоне
(алгоритм эффективно обходит препятствие, минимизируя удлинение маршрутов)

Наблюдалась устойчивость поведения при смене начальных приближений: траектории сходимости сходны по форме, а итоговые значения функционала мало отличаются (рис. 5). Временные показатели зависят от структуры связности и параметров штрафов; в пределах исследованных инстансов обеспечивается приемлемое время вычислений.

Приимеp B (гетерогенные элементы). Рассматривалось размещение разногабаритных компонентов: точечных (1×1), линейных (3×1 , 1×3) и блочных (2×2). Геометрическая гетерогенность сокращает число допустимых конфигураций и усложняет локальный поиск из-за проверки пересечений (рис. 6).

```

k = 101 fmin = 4484.68 fmin0 = 3275.68 i = 1 fm1 = 3275.68 fm2 = 3275.68
k = 202 fmin = 3650.14 fmin0 = 3275.68 i = 2 fm1 = 3275.68 fm2 = 3275.68
k = 303 fmin = 5130.70 fmin0 = 3275.68 i = 3 fm1 = 3275.68 fm2 = 3275.68
k = 404 fmin = 3774.16 fmin0 = 3273.10 i = 4 fm1 = 3273.10 fm2 = 3273.10
k = 606 fmin = 4317.71 fmin0 = 3273.10 i = 1 fm1 = 3273.10 fm2 = 3273.10
k = 707 fmin = 3658.00 fmin0 = 3273.10 i = 2 fm1 = 3273.10 fm2 = 3273.10
k = 808 fmin = 5245.80 fmin0 = 3272.69 i = 3 fm1 = 3272.69 fm2 = 3272.69
k = 909 fmin = 3798.10 fmin0 = 3272.69 i = 4 fm1 = 3272.69 fm2 = 3272.69
k = 1111 fmin = 5845.54 fmin0 = 3272.69 i = 1 fm1 = 3272.69 fm2 = 3272.69
k = 1212 fmin = 3783.44 fmin0 = 3272.69 i = 2 fm1 = 3272.69 fm2 = 3272.69
k = 1313 fmin = 3600.53 fmin0 = 3272.69 i = 3 fm1 = 3272.69 fm2 = 3272.69
k = 1414 fmin = 3479.96 fmin0 = 3272.69 i = 4 fm1 = 3272.69 fm2 = 3272.69
k = 1616 fmin = 4181.75 fmin0 = 3272.69 i = 1 fm1 = 3272.69 fm2 = 3272.69
k = 1717 fmin = 3741.53 fmin0 = 3272.69 i = 2 fm1 = 3272.69 fm2 = 3272.69
k = 1818 fmin = 3684.53 fmin0 = 3272.69 i = 3 fm1 = 3272.69 fm2 = 3272.69
k = 1919 fmin = 3400.59 fmin0 = 3272.69 i = 4 fm1 = 3272.69 fm2 = 3272.69

```

Result: Shtraf =0 fopt =3272.68542494924

Рис. 5. Сравнение траекторий сходимости для стратегий глобального поиска
(адаптивная настройка влияет на характер сходимости)

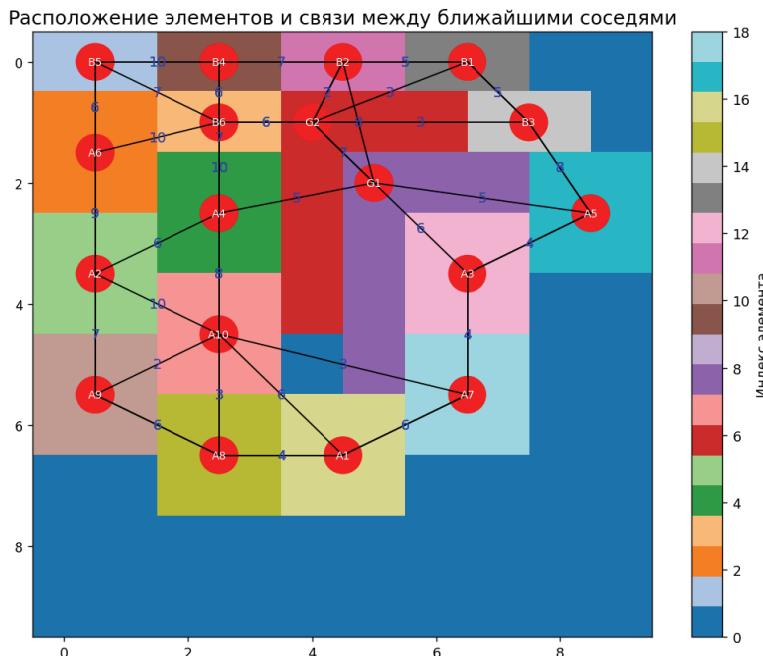


Рис. 6. Финальное размещение гетерогенных элементов (манхэттенская метрика)
(обеспечена компактная кластеризация при сохранении связности составных блоков)

Эксперименты с разногабаритными элементами подтвердили ключевую роль механизма виртуальных связей: недостаточный вес ω относительно $\max r_{pq}$ приводит к риску фрагментации составных элементов. На практике выбирают $\omega > \max r_{pq}$, что обеспечивает сохранение целостности при умеренном влиянии на оптимизацию.

Сравнительный анализ

Сопоставление с существующими подходами опирается на обзорные публикации [6, 7]. Рассматриваются классы: точные методы (применимы для малых задач), классические эвристики (быстрые, без гарантий), метаэвристики и гибриды (хорошее соотношение качество/время при корректной настройке).

Форма распределений на рис. 7 соответствует известным тенденциям: усиление локального поиска при корректном глобальном поиске дает более узкие распределения по числу итераций, тогда как чисто стохастические методы демонстрируют длинные хвосты [7].

Сравнительная характеристика основных классов методов оптимизации размещения приведена в табл. 1 [3, 5 – 8].

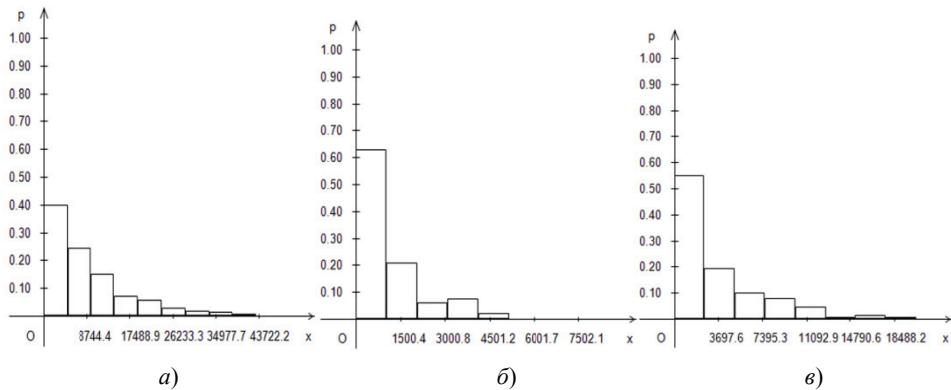


Рис. 7. Распределения числа итераций до сходимости для трех алгоритмических схем:
а – стохастической; б – гибридной покоординатной; в – роевой

Таблица 1
Сравнительная характеристика основных классов
методов оптимизации размещения

| Методологический класс | Вычислительная сложность | Качество решения | Область применимости |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|----------------------|
| Точные алгоритмы (ILP, B&B) | Экспоненциальная | Глобальный оптимум | Малые задачи |
| Классические эвристики (SA, TS) | Полиномиальная | Локальный минимум | Малые и средние |
| Популяционные методы (GA, PSO, ACO) | Полиномиальная (зависит от P, G) | Квазиоптимальное | Средние и крупные |
| Гибридные подходы | Полиномиальная | Близкое к оптимуму | Широкий диапазон |
| Предложенный метод | Полиномиальная (инкрементальная) | Гарантированный локальный минимум | Малые и средние |

Примечание: I – число итераций локального поиска; P – размер популяции (для популяционных методов); G – число поколений (эволюционные схемы); R – число рестартов (мультистарт).

Заключение

Количественные преимущества зависят от набора задач и параметров, то есть корректнее оценивать поведение по классам методов. Точные схемы обеспечивают оптимальность для малых инстансов, но быстро теряют масштабируемость [6]. Классические эвристики (имитация отжига, поиск с запретами) дают стабильные улучшения на средних задачах, однако чувствительны к началу и настройке [7]. Популяционные методы (генетические алгоритмы, рой частиц, муравьиные колонии) демонстрируют хорошую эмпирическую масштабируемость при корректной кодировке ограничений; на практике часто выигрывают гибриды, совмещающие локальный поиск и популяционные идеи [5, 7].

Методы обучения с подкреплением показали потенциал для глобального размещения в микроэлектронике [3], а специализированные постановки встречаются в квантовых системах [8]. В предложенной схеме инкрементальные оценки и адаптация штрафов улучшают практическую эффективность на задачах малой и средней размерности, где особенно важна корректная обработка геометрических ограничений.

Ключевые факторы эффективности: баланс локального усиления и глобального поиска при адаптивном управлении параметрами. На старте улучшения часты; по мере стабилизации они редеют. Адаптация штрафов удерживает баланс между исследованием и улучшением текущего решения.

Инкрементальные оценки ускоряют локальные операции в 3 – 5 раз относительно полного пересчета; время выполнения согласуется с оценкой $O(n)$ на итерацию. В интервале $\rho \in [1,1; 2,0]$ метод работает стабильно; влияние начальных штрафов снижается за счет автокоррекции.

Метод дополняет подходы обучения с подкреплением [3]: обучение с подкреплением эффективно на повторяющихся структурах, гибридный локальный поиск – на уникальных конфигурациях и малых выборках. Ограничения: при высокой плотности матрицы R выигрыш от инкрементальных оценок снижается; в трехмерном случае растут требования к памяти; параллелизация рестартов дает ускорение до 8 – 10 потоков.

Суммарная оценка показала, что разработанная методология гибридного по-координатного поиска для дискретного размещения с геометрическими ограничениями обеспечивает практический баланс между качеством решения и вычислительной стоимостью. Задача формализована как обобщенная квадратичная проблема назначений с адаптивными штрафами; инкрементальные вычисления ускоряют локальные операции относительно полного пересчета, а доказанные свойства локальной сходимости и вероятностного достижения глобального оптимума при мультистарте согласуются с экспериментальными наблюдениями. Для задач размерности 6×6 время решения составляет 2 – 5 мин при типовых ресурсах.

Метод стабилен к выбору стартов за счет мультистарта и адаптивных штрафов. Упорядоченная обработка пар в ряде тестов снижает число итераций по сравнению со случайным порядком; величина эффекта зависит от структуры связности и настроек, требуется статистическая проверка на расширенных наборах задач.

Для малых и средних инстансов достигается приемлемое время вычислений при сохранении качества. При росте плотности матрицы связей снижается выигрыш от инкрементальных оценок, целесообразно усиливать диверсификацию и применять более информативный выбор порядка локальных шагов с учетом вклада элементов в целевую функцию.

В трехмерных конфигурациях возрастают требования к памяти, а чувствительность к параметрам штрафов наиболее заметна на ранних этапах оптимиза-

ции. Практически оправдана калибровка начальных штрафов и контроль их динамики в привязке к профилям нарушений ограничений.

Приоритетными направлениями развития видятся автоматическая настройка параметров (в том числе на основе метаоптимизации), параллельная и распределенная организация рестартов, гибридизация с популяционными методами для усиления глобального поиска, а также адаптивная стратификация пространства обменов и порядка локальных шагов.

Список литературы

1. Progress of placement optimization for accelerating VLSI physical design / Y. Qiu, Y. Xing, X. Zheng, P. Gao, S. Cai, X. Xiong // Electronics. – 2023. – Vol. 12, No. 2. – P. 337. doi: 10.3390/electronics12020337
2. Garey, M. R. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness / M. R. Garey, D. S. Johnson. – San Francisco : W. H. Freeman, 1979. – 338 p.
3. A graph placement methodology for fast chip design / A. Mirhoseini, A. Goldie, M. Yazgan [et al.] // Nature. – 2021. – Vol. 594, No. 7862. – P. 207 – 212. doi: 10.1038/s41586-021-03544-w
4. GORDIAN: VLSI placement by quadratic programming and slicing optimization / J. M. Kleinhans, G. Sigl, F. M. Johannes, K. J. Antreich // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – 1991. – Vol. 10, No. 3. – P. 356 – 365. doi: 10.1109/43.67789
5. Shahookar, K. VLSI cell placement techniques / K. Shahookar, P. Mazumder // ACM Computing Surveys. – 1991. – Vol. 23, No. 2. – P. 143 – 220. doi: 10.1145/103724.103725
6. Application component placement in NFV-based hybrid cloud/fog systems with mobile fog nodes / C. Mouradian, S. Kianpisheh, M. Abu-Lebdeh, H. Ebrahimnezhad, R. H. Githio, P. Polakos // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 2019. – Vol. 37, No. 5. – P. 1130 – 1143. doi: 10.1109/JSAC.2019.2906790
7. Comparative study between exact and metaheuristic approaches for virtual machine placement / S. El Motaki, A. Yahyaouy, H. Gualous, J. Sabor // The Journal of Supercomputing. – 2019. – Vol. 75, No. 10. – P. 6239 – 6259. doi: 10.1007/s11227-019-02847-0
8. Qplacer: Frequency-aware component placement for superconducting quantum computers / J. Zhang, H. Wang, Q. Ding, [et al.] // arXiv:2401.17450. – 2024.
9. Быковский, Н. В. Модификации методов моделирования электронных цепей со стохастическими параметрами / Н. В. Быковский, С. А. Некрасов, О. В. Шестопал // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2025. – № 2(226). – С. 12 – 19. doi: 10.17213/1560-3644-2025-2-12-19
10. Быковский, Н. В. Оптимизация размещения элементов нерегулярной формы на многомерном поле сложной топологии с использованием комбинаторного аналога покоординатного спуска и мультистарта / Н. В. Быковский, Р. В. Арутюнян // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2024. – № 4(224). – С. 17 – 27. doi: 10.17213/1560-3644-2024-4-17-27
11. Быковский, Н. В. Оптимизация размещения разногабаритных элементов на коммутационном поле сложной топологии на основе комбинаторного аналога метода Гаусса–Зейделя / Н. В. Быковский, С. А. Некрасов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2025. – № 1(225). – С. 19 – 28. doi: 10.17213/1560-3644-2025-1-19-28

12. Bykovsky, N. V. A combinatorial approach to optimizing the placement of irregularly shaped elements on two-dimensional and three-dimensional switching fields with complex topology / N. V. Bykovsky, R. V. Harutyunyan, A. V. Nasedkin // T-Comm. – 2024. – Vol. 18, No. 10. – P. 44 – 54. doi: 10.36724/2072-8735-2024-18-10-44-54
13. Bykovsky, N. V. Numerical modeling and optimization results for the placement of irregularly shaped elements on a multidimensional switching field with complex topology / N. V. Bykovsky, R. V. Harutyunyan, A. V. Nasedkin // T-Comm. – 2024. – Vol. 18, No. 9. – P. 48 – 54. doi: 10.36724/2072-8735-2024-18-9-48-54
14. Цифровое машиностроение / М. Н. Краснянский, В. Г. Мокрозуб, Б. А. Немtinov [и др.]. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», 2023. – 266 с.
15. Абас, В. М. А. Численные методы и алгоритмы решения задачи квадратичного назначения и их применение при объемно-планировочном проектировании производства / В. М. А. Абас, С. Я. Егоров // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2022. – Т. 28, № 3. – С. 412 – 427. doi: 10.17277/vestnik.2022.03.pp.412-427
16. Егоров, С. Я. Прототип экспертной системы компоновки промышленных объектов / С. Я. Егоров, К. А. Шаронин // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2014. – Т. 20, № 2. – С. 268 – 276.

Hybrid Coordinate Descent for Discrete Placement of Multi-Sized Components

R. V. Harutyunyan¹, S. Ya. Egorov², S. A. Nekrasov³, N. V. Bykovsky⁴✉

*Department of Mathematical Cybernetics and Information Technology (1),
Moscow Technical University of Communication and Informatics, Moscow, Russia;*

*Department of Computer Integrated Systems in Mechanical Engineering (2),
TSTU, Tambov, Russia;*

*Departments: Applied Mathematics (3),
Physics and Photonics (4), back_of_sky@bk.ru;
M. I. Platov South-Russian State Polytechnic University, Novocherkassk, Russia*

Keywords: adaptive hybridization; discrete spaces; incremental computation; quadratic assignment problem; combinatorial optimization; multi-start diversification; placement of different-sized elements.

Abstract: This paper addresses the *NP*-hard combinatorial optimization problem of discrete placement for multi-sized components under complex geometric constraints. To solve this, a novel hybrid scheme is proposed, which combines a modified coordinate descent for local search with multi-start diversification for exploring the global solution space. The mathematical model is formalized as a generalized quadratic assignment problem where constraints on non-overlapping, forbidden zones, and the connectivity of composite components are handled through a system of adaptive penalty functions. A key element ensuring computational efficiency is the use of incremental evaluations, which allows for recalculating the change in the objective function during local steps (pairwise swaps) in linear time, $O(n)$. The methodology was empirically validated on a set of representative small- and medium-sized problems, including simulations of printed circuit board layouts with arbitrarily shaped forbidden regions.

The results of numerical experiments confirmed the algorithm's high stability with respect to initial approximations and its correct handling of heterogeneous components. It is shown that the hybrid scheme provides faster and more stable convergence compared to classical stochastic approaches. The developed software implementation supports both two-dimensional and three-dimensional discrete grids and various distance metrics. Finally, the limitations of the method are formulated, and directions for its future development are outlined.

References

1. Qiu Y., Xing Y., Zheng X., Gao P., Cai S., Xiong X. Progress of placement optimization for accelerating VLSI physical design, *Electronics*, 2023, vol. 12, no. 2, pp. 337. doi: 10.3390/electronics12020337
2. Garey M.R., Johnson D.S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, San Francisco: W.H. Freeman, 1979, 338 p.
3. Mirhoseini A., Goldie A., Yazgan M., [et al.], A graph placement methodology for fast chip design, *Nature*, 2021, vol. 594, no. 7862, pp. 207-212. doi: 10.1038/s41586-021-03544-w
4. Kleinhans J.M., Sigl G., Johannes F.M., Antreich K.J. GORDIAN: VLSI placement by quadratic programming and slicing optimization, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 1991, vol. 10, no. 3, pp. 356-365. doi: 10.1109/43.67789
5. Shahookar K., Mazumder P. VLSI cell placement techniques, *ACM Computing Surveys*, 1991, vol. 23, no. 2, pp. 143-220. doi: 10.1145/103724.103725
6. Mouradian C., Kianpisheh S., Abu-Lebdeh M., Ebrahimnezhad H., Glitho R.H., Polakos P. Application component placement in NFV-based hybrid cloud/fog systems with mobile fog nodes, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2019, vol. 37, no. 5, pp. 1130-1143. doi: 10.1109/JSAC.2019.2906790
7. El Motaki S., Yahyaoui A., Gualous H., Sabor J. Comparative study between exact and metaheuristic approaches for virtual machine placement, *The Journal of Supercomputing*, 2019, vol. 75, no. 10, pp. 6239-6259. doi: 10.1007/s11227-019-02847-0
8. Zhang J., Wang H., Ding Q., [et al.], Qplacer: Frequency-aware component placement for superconducting quantum computers, arXiv:2401.17450. 2024.
9. Bykovsky N.V., Nekrasov S.A., Shestopal O.V. [Modifications of methods for modeling electronic circuits with stochastic parameters], *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Tekhnicheskie nauki* [University News. North-Caucasian region. Technical Sciences], 2025, no. 2(226), pp. 12-19. doi: 10.17213/1560-3644-2025-2-12-19 (In Russ., abstract in Eng.)
10. Bykovsky N.V., Arutyunyan R.V. Optimization of the placement of irregularly shaped elements on a multidimensional field with complex topology using a combinatorial analogue of coordinate descent and multistart, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Tekhnicheskie nauki* [University News. North-Caucasian region. Technical Sciences], 2024, no. 4(224), pp. 17-27. doi: 10.17213/1560-3644-2024-4-17-27 (In Russ., abstract in Eng.)
11. Bykovsky N.V., Nekrasov S.A. Optimization of the placement of multi-sized elements on a switching field with complex topology based on a combinatorial analogue of the Gauss-Seidel method, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Tekhnicheskie nauki* [University News. North-Caucasian region. Technical Sciences], 2025, no. 1(225), pp. 19-28. doi: 10.17213/1560-3644-2025-1-19-28 (In Russ., abstract in Eng.)
12. Bykovsky N.V., Harutyunyan R.V., Nasedkin A.V. A combinatorial approach to optimizing the placement of irregularly shaped elements on two-dimensional and

three-dimensional switching fields with complex topology, *T-Comm*, 2024, vol. 18, no. 10, pp. 44-54. doi: 10.36724/2072-8735-2024-18-10-44-54

13. Bykovsky N.V., Harutyunyan R.V., Nasedkin A.V. Numerical modeling and optimization results for the placement of irregularly shaped elements on a multidimensional switching field with complex topology, *T-Comm*, 2024, vol. 18, no. 9, pp. 48-54. doi: 10.36724/2072-8735-2024-18-9-48-54

14. Krasnyansky M.N., Mokrozub V.G., Nemtinov V.A. [et al.], *Tsifrovoye mashinostroyeniye* [Digital Engineering], Tambov: Tambov State Technical University, 2023, 266 p. (In Russ.)

15. Abas V.M.A., Egorov S.Ya. [Numerical methods and algorithms for solving the quadratic assignment problem and their application in space-planning design of production], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 412-427. doi: 10.17277/vestnik.2022.03.pp.412-427 (In Russ., abstract in Eng.)

16. Egorov S.Ya., Sharonin K.A. [Prototype of an expert system for the layout of industrial facilities], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 268-276. (In Russ., abstract in Eng.)

Hybrid-Koordinatenabstieg für die diskrete Platzierung von Elementen verschiedener Größe

Zusammenfassung: Diese Arbeit befasst sich mit einem *NP*-schweren kombinatorischen Optimierungsproblem: der diskreten Platzierung von Elementen unterschiedlicher Größe unter komplexen geometrischen Nebenbedingungen. Zur Lösung dieses Problems ist ein neuartiges Hybridverfahren vorgeschlagen, das modifiziertes Koordinatenabstiegsverfahren für die lokale Suche mit Multi-Start-Diversifizierung zur Erkundung des globalen Lösungsraums kombiniert. Das mathematische Modell ist als verallgemeinertes quadratisches Zuordnungsproblem formalisiert, wobei Nebenbedingungen wie Nichtüberschneidung, Sperrzonen und Konnektivität der Elemente durch ein System adaptiver Strafkostenfunktionen berücksichtigt werden. Ein Schlüsselement für die Recheneffizienz ist die Verwendung inkrementeller Schätzungen, die es ermöglichen, die Änderung der Zielfunktion in lokalen Schritten (paarweiser Austausch) in linearer Zeit $O(n)$ neu zu berechnen. Die empirische Validierung der Methodik erfolgt anhand einer Reihe repräsentativer klein- und mitteldimensionaler Probleme, darunter die Modellierung des Layouts von Leiterplatten mit Sperrzonen beliebiger Form. Die Ergebnisse numerischer Experimente bestätigen die hohe Robustheit des Algorithmus gegenüber der Wahl der Anfangsnäherungen und die korrekte Behandlung heterogener Elemente. Es ist gezeigt, dass das Hybridverfahren im Vergleich zu klassischen stochastischen Ansätzen eine schnellere und stabilere Konvergenz bietet. Die entwickelte Softwareimplementierung unterstützt sowohl zwei- als auch dreidimensionale diskrete Gitter und verschiedene Distanzmetriken. Die Grenzen der Methode sind formuliert und Möglichkeiten für ihre Weiterentwicklung aufgezeigt.

Descente au repos hybride pour le placement discret des éléments de différentes dimensions

Résumé: Est examinée une tâche *NP*-difficile d'optimisation combinatoire – le placement discret des éléments de différentes dimensions en tenant compte des contraintes géométriques complexes. Pour sa résolution est proposé un schéma d'interface graphique original qui combine une descente au repos modifiée pour la

recherche locale et une diversification multistart pour l'exploration de l'espace de décision global. Le modèle mathématique est formalisé comme un problème quadratique généralisé sur les affectations où les contraintes de la non-réception, les zones interdites et la connectivité des éléments constitutifs sont prises en compte par un système des fonctions adaptatives punitives. L'élément clé de l'efficacité de calcul est l'utilisation d'estimations incrémentales ce qui permet de recalculer la variation de la fonction cible dans les étapes locales (échanges par paires) en temps linéaire $O(n)$. La validation empirique de la méthodologie est réalisée sur un ensemble de tâches représentatives de la petite et moyenne dimension, y compris la modélisation de la disposition des cartes de circuits imprimés avec des zones restreintes de forme libre. Les résultats des expériences numériques ont confirmé la grande stabilité de l'algorithme au choix des approximations initiales et le traitement correct des éléments hétérogènes. Est démontré que le circuit hybride permet une convergence plus rapide et plus stable par rapport aux approches stochastiques classiques. L'implémentation logicielle développée prend en charge les réseaux discrets bidimensionnels et tri-dimensionnels et diverses mesures de distance. Les limites de la méthode sont formulées et les voies de son développement ultérieur sont tracées.

Авторы: *Арутюнян Роберт Владимирович* – доктор технических наук, доцент кафедры «Математическая кибернетика и информационные технологии», ФГБОУ ВО «Московский технический университет связи и информатики», Москва, Россия; *Егоров Сергей Яковлевич* – доктор технических наук, профессор кафедры «Компьютерно-интегрированные системы в машиностроении», ФГБОУ ВО «ТГТУ», Тамбов, Россия; *Некрасов Сергей Александрович* – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика»; *Быковский Никита Васильевич* – аспирант кафедры «Физика и фотоника», ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет им. М. И. Платова», Новочеркасск, Россия.