

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ  
УСИЛИВАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ДЛИННОМЕРНЫХ  
ДВУХСЛОЙНЫХ ЗАГОТОВКАХ ИЗ РЕЗИНОВЫХ СМЕСЕЙ  
С УСИЛЕННОЙ ЗОНОЙ КОНТАКТА МАТЕРИАЛОВ**

**Д. С. Долгин✉, И. С. Гуданов, А. Е. Лебедев, А. А. Ватагин**

*Кафедра «Технологические машины и оборудование», dim\_dol.94@mail.ru,  
ФГБОУ ВО «Ярославский государственный технический университет»,  
Ярославль, Россия*

**Ключевые слова:** зубец; многокритериальная оптимизация; множество Парето; резиновые смеси; соэкструзия; усиленная зона контакта; численная математическая модель.

**Аннотация:** Использована многокритериальная оптимизация применительно к описанию процесса течения двух резиновых смесей в каналах соэкструзионной головки, позволяющей получать двухслойные длинномерные заготовки с усиленной поверхностью контакта материалов. Представлена математическая модель в численной постановке. Указана реологическая модель и заданы граничные условия. Выбраны управляющие параметры и критерии оптимизации. Решена задача многокритериальной оптимизации.

---

**Введение**

В настоящее время в химической и смежных отраслях промышленности достаточно широко распространены технологии изготовления длинномерных профильных изделий из резиновых смесей. Объем производства таких изделий составляет порядка 290 тыс. тонн готовой продукции в год. При этом конечными потребителями, по отношению к получаемой продукции, предъявляются весьма жесткие требования, иногда взаимоисключающие. Например, большинство получаемых экструдатов должны обладать, с одной стороны, высокой прочностью и износостойкостью, а с другой – гибкостью и эластичностью. Совмещение в одном материале подобных сочетаний свойств физически невозможно. Альтернативой композитной смеси может служить агрегирование материальных слоев, каждому из которых будут присущи свои свойства. Одним из наиболее эффективных способов получения комбинированных профилей является технология соэкструзии. Соэкструзия – это процесс, в котором два или более полимерных материала совместно продавливаются через формообразующее отверстие (фильеру) для получения заданного профиля [1].

Несмотря на достаточный уровень развития техники и технологии процесса соэкструзии, остаются не до конца решенными две важные проблемы: прочность соединения слоев и нестабильность формы экструдата [2, 3]. Указанные выше проблемы проявляются из-за различия реологических свойств резиновых смесей,

в которых в процессе течения их по каналам соэкструзионной головки возникает значительный градиент скорости, что приводит:

1) к расслоению в зоне контакта материалов, нежелательным процессам частичного или полного инкапсулирования одного материала другим (проблема прочного соединения слоев);

2) к искажению наружной поверхности экструдата, изменению формы готового продукта (проблема нестабильности формы).

Для решения данных проблем предложено формировать в зоне контакта материалов искусственное зацепление в виде локальных усиливающих элементов. Последние представляют собой систему взаимопроникающих выступов и впадин (зубцов). Это позволит увеличить площадь контакта слоев, что решит первую проблему. Зона формирования выступов и впадин будет перераспределять скорости внутри головки, что позволит снизить общий градиент скорости и, как следствие, частично решить вторую проблему[2].

Ввиду новизны идеи применения зубцов в качестве увеличения прочности соединения слоев резиновых смесей в многослойных изделиях, определение оптимальной формы размеров и количества усиливающих элементов является актуальной задачей.

### Математическое моделирование процесса соэкструзии

Для определения оптимальной формы размеров и количества усиливающих элементов проведем ряд численных опытов путем моделирования течения реологически сложных жидкостей в каналах модельной соэкструзионной головки с возможностью получения усиленной поверхности контакта материалов (рис. 1). Для опытов воспользуемся программно-вычислительном комплексе ANSYS.

В качестве реологического уравнения выбрано уравнение Оствальда-де Ваале, поскольку оно удовлетворительно описывает поведение резиновых смесей и обладает сравнительно невысокой сложностью определения реологических констант – степени consistency  $n$  и индекса течения  $K$ :

$$\tau = K \dot{\gamma}^n, \quad (1)$$

где  $\tau$  – тензор напряжений;  $\dot{\gamma}$  – скорость сдвига.

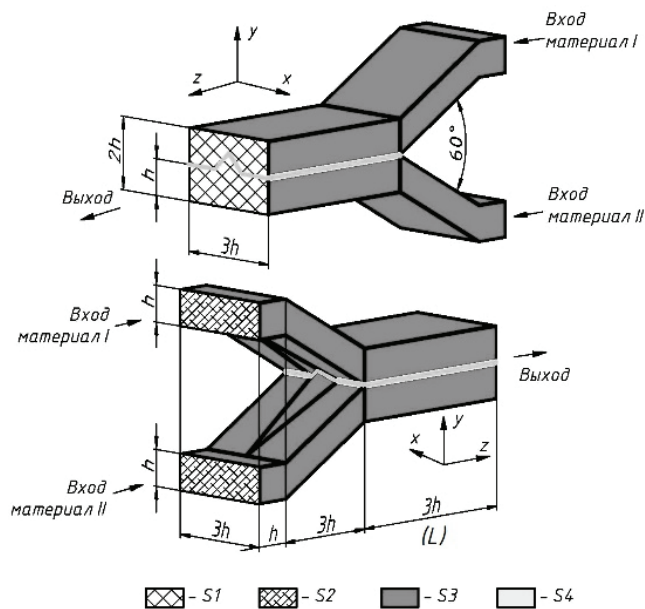


Рис. 1. Расчетная схема процесса соэкструзии

При численном исследовании приняты допущения, являющиеся общепринятыми для подобного рода задач [4]: 1) материалы несжимаемы; 2) течение установившееся; 3) массовые и инерционные силы малы по сравнению с силами внутреннего трения; 4) резиновые смеси при течении не смешиваются; 5) процесс изотермический; 6) равенство температур резиновых смесей на поверхности раздела слоев; 7) отсутствие проскальзывания материалов на поверхности раздела слоев и по стенкам формирующих каналов.

К поверхностям расчетной области (см. рис. 1) задаются следующие граничные условия:

1. Выходное сечение «S1»:

$$\begin{cases} V_x = V_y = 0; \\ \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0; \\ p = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $V_x, V_y, V_z$  – проекции вектора результирующей скорости;  $p$  – давление.

2. Входное сечение «S2»:

$$\begin{cases} V_x^I = V_y^I = 0; \\ V_z^I = V_0^I; \\ V_x^{II} = V_y^{II}; \\ V_z^{II} = V_0^{II}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $V_0^I, V_0^{II}$  – начальные скорости для материалов I и II соответственно.

3. Стенка «S3»:

$$V_x = V_y = V_z = 0. \quad (4)$$

4. Межфазная поверхность «S4»:

– кинематическое условие:

$$\begin{cases} (\vec{V}^I \cdot \vec{n}^I) = (\vec{V}^{II} \cdot \vec{n}^{II}) = (\vec{V}^\Sigma \cdot \vec{n}^\Sigma) = 0; \\ (\vec{V}^I \cdot \vec{t}^I) = (\vec{V}^{II} \cdot \vec{t}^I); \\ (\vec{V}^I \cdot \vec{t}^{II}) = (\vec{V}^{II} \cdot \vec{t}^{II}), \end{cases} \quad (5)$$

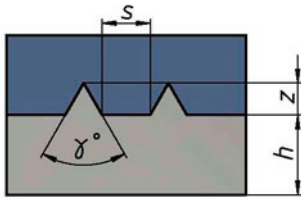
где  $\vec{V}^I, \vec{V}^{II}, \vec{V}^\Sigma$  – векторы скоростей материалов I, II и поверхности раздела «S4» соответственно;  $\vec{n}^I, \vec{n}^{II}, \vec{n}^\Sigma$  – единичные векторы нормалей к поверхностям материалов I, II и поверхности раздела «S4» соответственно;  $\vec{t}^I, \vec{t}^{II}$  – единичные векторы касательных к поверхностям материалов I и II соответственно;

– динамическое условие:

$$\begin{cases} (\vec{\tau}^I \cdot \vec{t}^I) = (\vec{\tau}^{II} \cdot \vec{t}^{II}); \\ (\vec{\tau}^I \cdot \vec{t}^{II}) = (\vec{\tau}^{II} \cdot \vec{t}^I); \\ (\vec{\tau}^I \cdot \vec{n}^\Sigma) = (\vec{\tau}^{II} \cdot \vec{n}^\Sigma), \end{cases} \quad (6)$$

где  $\vec{\tau}^I, \vec{\tau}^{II}$  – полные тензоры напряжений для материалов I и II соответственно.

Итогом численного исследования являются поле распределения скорости в выходном сечении соэкструзионной головки и поле распределения давления по всей головке.



**Рис. 2. Форма и размеры усиливающих элементов**

### Выбор управляющих параметров и критериев оптимизации

В работе [2] определены рациональные форма и границы размеров усиливающих элементов (рис. 2): зубцы в виде треугольника с углом  $\gamma = 40 \dots 80^\circ$ , относительной высотой  $z' = 0,3 \dots 0,5$ , расстоянием между зубцами и от зубца до края элемента  $s' \geq 0,5$ . Эти размеры ( $\gamma, z', s'$ ) использовались в качестве управляющих параметров.

Относительная высота зубца определялась по формуле

$$z' = z / h, \quad (7)$$

где  $z$  – высота зубца;  $h$  – высота слоя.

Относительное расстояние между зубцами определялось по формуле

$$s' = s / z, \quad (8)$$

где  $s$  – расстояние между зубцами.

Качество экструдированного изделия определяется стабильностью формы его сечения, которая в свою очередь зависит от степени неравномерности распределения скорости на выходе из соэкструзионной головки, а энергозатратность процесса определяется разностью давления на входе и выходе [5]. В этой связи в качестве критериев оптимальности использованы: коэффициент неоднородности скорости для сечения на выходе из соэкструзионной головки  $E$  и перепад давлений в головке  $\Delta p$ .

Полученное поле распределения скорости делилось на  $q$  участков, на каждом из которых определялось значение скорости  $\vartheta_i$  и рассчитывался коэффициент неоднородности скорости:

$$E = \vartheta_{cp}^{-1} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q (\vartheta_i - \vartheta_{cp})^2}{(q-1)}}, \quad (9)$$

где  $\vartheta_{cp}$  – средняя скорость в выходном сечении

$$\vartheta_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^q \vartheta_i}{q}. \quad (10)$$

Значение  $\Delta p$  определялось из поля распределения давления.

### Решение задачи многокритериальной оптимизации

Таким образом, в качестве управляющих параметров применялись геометрические параметры зубцов:  $z', \gamma, s'$ , а в качестве критериев оптимальности использовали  $E$  и  $\Delta p$ . Тогда задача оптимальности будет иметь следующий вид:

$$E = f_1(z', \gamma, s') \rightarrow \min, \quad \Delta p = f_2(z', \gamma, s') \rightarrow \min. \quad (11)$$

Обычно многокритериальная задача имеет большое количество альтернативных решений. Основная проблема в выборе решений связана с конфликтом поведения критериев. В результате становится невозможным выбор оптимального решения, которое превосходит остальные по заданным критериям. Процесс принятия решения называется многокритериальным (MCDM) [6] или мультиатрибутивным (MADM) [7].

Ниже приведены данные многофакторного численного эксперимента по определению коэффициента неоднородности скорости и перепаду давления в головке с использованием различных управляющих параметров (табл. 1).

Первый этап метода MCDM – построение множества Парето. Построим это множество для критериев перепада давления и коэффициента неоднородности скорости, которые должны достигать минимального значения. На рисунке 3 показана схема построения множества Парето по данным, представленным в табл. 1.

Далее воспользуемся методом прямоугольников [8] для ограничения области множества Парето вблизи минимального значения границ. Алгоритм состоит в следующем [9]:

1. На рисунке фиксируется самая левая точка. Если их несколько, выбирается самая нижняя.
2. Через выбранную точку проводим вертикальную и горизонтальную линии.
3. На рисунке фиксируется самая нижняя точка. Если их несколько, выбирается самая левая.
4. Через выбранную точку проводим вертикальную и горизонтальную линии.
5. Точки, лежащие внутри прямоугольника, являются точками ограниченного множества Парето.

Таблица 1

Данные многофакторного численного эксперимента

Номер эксперимента	$z'$	$\gamma$	$s'$	$E$	$\Delta p$ , МПа
1	0,3	50°	0,5	0,585	2,994
2	0,5	50°	0,5	0,648	3,296
3	0,3	80°	0,5	0,590	2,742
4	0,5	80°	0,5	0,603	2,896
5	0,3	50°	1,5	0,589	3,131
6	0,5	50°	1,5	0,610	3,141
7	0,3	80°	1,5	0,590	3,221
8	0,5	80°	1,5	0,656	3,469
9	0,4	60°	1,5	0,578	2,940
10	0,2	80°	0,5	0,570	3,107
11	0,3	80°	0,5	0,566	3,303
12	0,4	80°	0,5	0,565	3,576
13	0,5	80°	0,5	0,571	3,513
14	0,4	60°	0,5	0,565	3,319
15	0,4	70°	0,5	0,563	3,510
16	0,4	80°	0,5	0,563	3,595
17	0,4	60°	2	0,577	2,861
18	0,4	60°	2,5	0,574	3,352
19	0,4	40°	2,5	0,591	2,990
20	0,4	50°	2,5	0,589	3,005
21	0,4	60°	2,5	0,561	3,050
22	0,4	70°	2,5	0,564	3,105

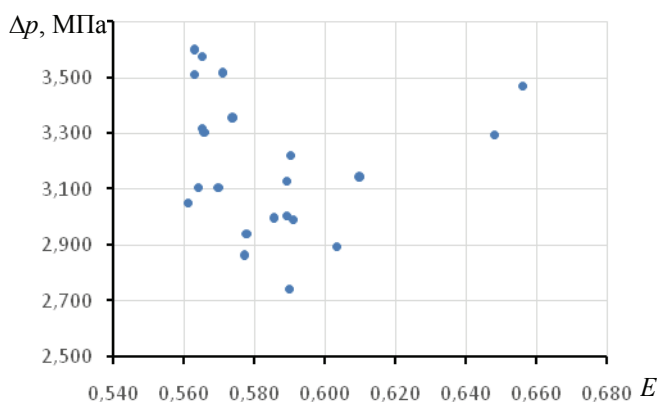


Рис. 3. Построение множества Парето

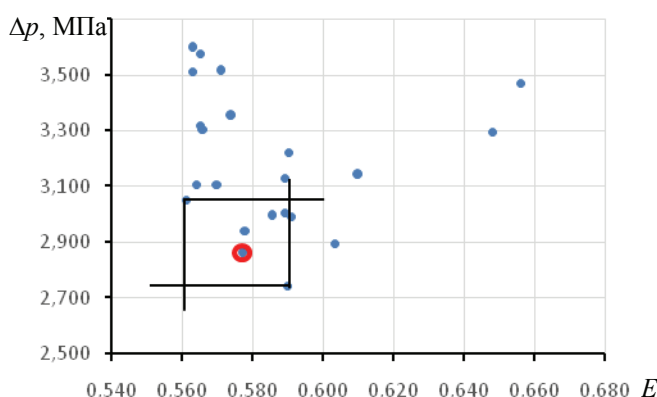


Рис. 4. Ограниченное множество Парето

На рисунке 4 представлено полученное ограниченное множество Парето для критериев коэффициента неоднородности скорости и перепада давления.

После нахождения ограниченного множества Парето встает вопрос о выборе лучшей точки. Из множества исключают точки так, чтобы каждая из них была лучше по одному критерию, но хуже – по другому [10]. Если должны быть удалены все точки, то в этом случае используются методы условной оптимизации. Рисунок 4 показывает, что внутри выделенной области наблюдается согласованное поведение критериев, то есть оптимальной является точка № 17.

### Заключение

В работе решена задача многокритериальной оптимизации применительно к описанию процесса течения двух резиновых смесей в каналах соэкструзионной головки, позволяющей получать двухслойные длинномерные заготовки с усиленной поверхностью контакта материалов. Определены размеры усиливающих элементов:  $z' = 0,4$ ,  $\gamma = 60^\circ$ ,  $s' = 2$ , которые обеспечивают минимальные значения для критериев оптимальности:  $E = 0,577$ ,  $\Delta p = 2,861$  МПа.

### Список литературы

1. Микаэли, В. Экструзионные головки для пластмасс и резины: Конструкции и технические расчеты / В. Микаэли ; пер. с англ. яз. ; под ред. В. П. Володина. – СПб. : Профессия, 2018. – 472 с.

2. О моделировании процесса течения резиновых смесей в каналах соэкструзионной головки с усиленной зоной контакта материалов / Д. С. Долгин, А. А. Вагагин, И. С. Гуданов, А. Е. Лебедев // Известия СПбГТИ(ТУ). – 2023. – № 67(93). – С. 69 – 73.

3. Соколов, М. В. Расчет шнековых машин для переработки резиновых смесей при заданном качестве экструдата / М. В. Соколов // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2006. – Т. 12, № 4-1. – С. 979 – 986.

4. Немытков, В. А. Машины и аппараты резиновой промышленности : учеб. пособие / В. А. Немытков. – 2-е изд., перераб. – Ярославль, 1983. – 84 с.

5. Залунаев, М. Ю. Метод расчета процесса экструзии резиновых смесей и оптимизация геометрии профилирующих каналов : дис. ... канд. техн. наук : 05.17.08 / Залунаев Михаил Юрьевич. – Ярославль, 2001. – 128 с.

6. Ногин, В. Д. Множество и принцип Парето/ В. Д. Ногин. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб. : Издательско-полиграфическая ассоциация высших учебных заведений, 2022. – 111 с.

7. Ching-Lai, H. Methods for multiple attribute decision making / H. Ching-Lai, K. Yoon // Multiple Attribute Decision Making. – 1981. – P. 58 – 191.

8. Лотов, А. Р. Многокритериальные задачи принятия решений: учеб. пособие / А. Р. Лотов, И. И. Поспелова. – М. : МАКС Пресс, 2008. – 197 с.

9. Есипов, Б. А. Методы оптимизации и исследование операций: учеб. пособие / Б. А. Есипов. – Самара : Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. – 180 с.

10. Ногин, В. Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению / В. Д. Ногин // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2008. – № 1. – С. 98 – 112.

---

## Determining the Optimum Sizes of Reinforcing Elements in Long Two-Layer Rubber Compound Blanks with a Reinforced Contact Zone

D. S. Dolgin✉, I. S. Gudanov, A. E. Lebedev, A. A. Vatagin

*Department of Technological Machines and Equipment, dim\_dol.94@mail.ru,  
Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia*

**Keywords:** tooth; multicriteria optimization; Pareto set; rubber compounds; coextrusion; reinforced contact zone; Numerical mathematical model.

**Abstract:** Multicriteria optimization is used to describe the flow of two rubber compounds in the channels of a coextrusion die, which allows the production of two-layer long blanks with a reinforced material contact surface. A numerical mathematical model is presented. A rheological model is specified and boundary conditions are defined. Control parameters and optimization criteria are selected. The multicriteria optimization problem is solved.

### References

1. Mikaeli V. *Ekstruzionnyye golovki dlya plastmass i reziny: Konstruktsii i tekhnicheskiye raschety* [Extrusion heads for plastics and rubber: Designs and technical calculations], St. Petersburg: Professiya, 2018, 472 p. (In Russ.)

2. Dolgin D.S., Vatagin A.A., Gudanov I.S., Lebedev A.Ye. [On modeling the flow of rubber compounds in the channels of a co-extrusion head with a reinforced contact zone of materials], *Izvestiya SPbGTI(TU)* [Bulletin of SPbGTI (TU).], 2023, no. 67(93), pp. 69-73. (In Russ., abstract in Eng.).

3. Sokolov M.V. [Calculation of screw machines for processing rubber compounds with a given extrudate quality], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2006, vol. 12, no. 4-1, pp. 979-986. (In Russ., abstract in Eng.).

4. Nemytkov V.A. *Mashiny i apparaty rezinovoy promyshlennosti: ucheb. posobiye* [Machines and devices of the rubber industry: a textbook], Yaroslavl', 1983, 84 p. (In Russ.)

5. Zalunayev M.Yu. *PhD of Candidate's thesis (Engineering)*, Yaroslavl', 2001, 128 p. (In Russ.)

6. Nogin V.D. *Mnozhestvo i printsip Pareto* [The set and the Pareto principle], St. Petersburg: Izdatel'sko-poligraficheskaya assotsiatsiya vysshikh uchebnykh zavedeniy, 2022, 111 p. (In Russ.).

7. Hwang Ching-Lai, Kwangsun Yoon. Methods for multiple attribute decision making, *Multiple attribute decision making*, 1981, pp. 58-191.

8. Lotov A.R., Pospelova I.I. *Mnogokriterial'nyye zadachi prinyatiya resheniy: ucheb. posobiye* [Multicriteria Decision-Making Problems: A Textbook], Moscow: MAKS Press, 2008, 197 p. (In Russ.)

9. Yesipov B. A. *Metody optimizatsii i issledovaniye operatsiy: ucheb. posobiye* [Optimization methods and operations research: textbook], Samara: Izdatel'stvo Samar. gos. aerokosm. un-ta, 2007, 180 p. (In Russ.)

10. Nogin V.D. [The Pareto Set Narrowing Problem: Approaches to Solution], *Iskusstvennyy intellekt i prinyatiye resheniy* [Artificial Intelligence and Decision Making], 2008, no. 1, pp. 98-112. (In Russ., abstract in Eng.).

---

### **Bestimmung der optimalen Abmessungen von Verstärkungselementen in langen zweischichtigen Vorformen aus Gummimischungen mit verstärkter Kontaktzone der Materialien**

**Zusammenfassung:** Es ist eine multikriterielle Optimierung für die Beschreibung des Flusses zweier Gummimischungen in den Kanälen des Coextrusionskopfes verwendet, um zweischichtige, langgestreckte Halbzeuge mit verstärkter Kontaktfläche der Materialien zu erzeugen. Es ist ein mathematisches Modell in numerischer Form vorgestellt. Das rheologische Modell sowie die Randbedingungen sind angegeben. Die Steuerparameter und Optimierungskriterien sind ausgewählt. Das Problem der multikriteriellen Optimierung ist gelöst.

---

### **Détermination des dimensions optimales des éléments de renforcement dans les ébauches longues à double couche à partir de mélanges de caoutchouc avec le secteur renforcé de contact de matériaux**

**Résumé:** Est appliquée l'optimisation multicritère à la description du processus d'écoulement de deux mélanges de caoutchouc dans les canaux de la tête de coexplosion, permettant d'obtenir des éclairages longs à deux couches avec la surface de contact renforcée de matériaux. Est présenté un modèle mathématique dans une mise en scène numérique. Sont spécifiés le modèle rhéologique et les conditions aux limites. Sont sélectionnés les paramètres de contrôle et les critères d'optimisation. Est résolu le problème de l'optimisation multi-critères.

---

**Авторы:** Долгин Дмитрий Сергеевич – старший преподаватель кафедры «Технологические машины и оборудование»; Гуданов Илья Сергеевич – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Технологические машины и оборудование»; Лебедев Антон Евгеньевич – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Технологические машины и оборудование»; Ватагин Александр Александрович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Технологические машины и оборудование», ФГБОУ ВО «Ярославский государственный технический университет», Ярославль, Россия.