

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
ПРИВОДА МЕХАНИЧЕСКОГО ПЕРЕМЕШИВАЮЩЕГО  
УСТРОЙСТВА ЕМКОСТНОГО АППАРАТА В ЦЕЛЯХ  
СНИЖЕНИЯ ЕГО ВИБРОНАГРУЖЕННОСТИ.  
Часть 2. ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
СИЛОВОЙ ПЕРЕДАЧИ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ И АНАЛИЗ  
СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ СИСТЕМЫ**

**Н. А. Меренцов<sup>1✉</sup>, Н. С. Соколов-Добрев<sup>2</sup>, А. Б. Голованчиков<sup>1</sup>,  
А. В. Персидский<sup>3</sup>, М. В. Топилин<sup>4</sup>**

*Кафедры: «Процессы и аппараты химических и пищевых производств» (1),  
steerple@mail.ru; «Техническая эксплуатация и ремонт автомобилей» (2),  
ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет»,  
Волгоград, Россия; АО «Федеральный научно-производственный центр  
«Титан-Баррикады» (3), Волгоград, Россия;  
ООО «ЛУКОЙЛ-Инжиниринг ВолгоградНИПИморнефть» (4), Волгоград, Россия*

**Ключевые слова:** виброустойчивость; динамическая модель; консольный вал; крутильные колебания; механические передачи; механическое перемешивание.

**Аннотация:** Разработан алгоритм, обеспечивающий быстрое формирование из системы линейных дифференциальных уравнений передаточной функции, определение корней характеристического уравнения в комплексной плоскости, позволяющий проводить детальный анализ и определять собственные частоты многомассовых динамических систем. На основании принципа Даламбера и используя уравнения Лагранжа второго рода, составлена система дифференциальных уравнений для описания движения девятимассовой системы привода механического смесителя, подверженного крутильным колебаниям. Получены и проанализированы амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики звеньев (участков) модели динамической системы привода механического перемешивающего устройства емкостного аппарата (реактора) с учетом демпфирования.

---

### Введение

Одним из основных и наиболее широко применимых в различных отраслях промышленности способов развития турбулентных потоков жидкофазных продуктов в аппаратах и реакторах являются механическое перемешивание при помощи быстроходных вращающихся мешалок различных конфигураций (конструкций и модификаций) [1 – 18]. При этом, помимо качества протекающих гидродинамических и тепломассообменных процессов, важную роль для емкостных аппаратов (реакторов), оснащенных механическими смесителями с приводами, играет динамическая устойчивость валов и динамических систем в целом (виброустойчивость).

Из-за неточностей изготовления валов, закрепленных на них опор, деталей привода, механических смесителей, а также погрешностей при их сборке и монтаже привода, центр тяжести механической системы, состоящий из многих деталей, не находится на оси вала, а практически всегда смещен относительно равно-

весного положения на некоторый эксцентриситет и поэтому имеется остаточный дисбаланс. При вращении вала вследствие дисбаланса и колебаний сил и моментов возникают переменные по направлению силы инерции, дополнительно нагружающие валы и опоры и возбуждающие крутильные и изгибные колебания механической системы с высокой частотой и относительно малой амплитудой (вибрации) [19 – 21].

Возникающие упругие колебания многомассовой динамической системы особенно опасны в зоне резонансов (критических диапазонах), когда частоты вынужденных колебаний, вызванных колебаниями сил и моментов, совпадают с частотами собственных колебаний динамической системы [21 – 23].

*Цель работы* – совершенствование моделей и методик расчета динамической нагруженности и виброустойчивости многомассовых систем приводов механических перемешивающих устройств (перемешивания жидкофазных продуктов) емкостных аппаратов (реакторов).

На основании анализа разработанной динамической модели привода механического смесителя с консольным валом [24], по общей аналогии с методикой, представленной в работах [25 – 27] для быстроходного пролетного вала, получены значения моментов инерции масс модели и суммарные жесткости связей участков между элементами динамической модели.

На основании принципа Даламбера и используя уравнения Лагранжа второго рода, движение крутильно-колеблющейся девятимассовой системы при вынужденных колебаниях описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1 \dot{\varphi}_1 + C_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= M_{дв}, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + k_2 \dot{\varphi}_2 - C_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{2,3}(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0, \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 + k_3 \dot{\varphi}_3 - C_{2,3}(\varphi_2 - \varphi_3) + C_{3,4}(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0, \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 + k_4 \dot{\varphi}_4 - C_{3,4}(\varphi_3 - \varphi_4) + C_{4,5}(\varphi_4 - \varphi_5) &= 0, \\ I_5 \ddot{\varphi}_5 + k_5 \dot{\varphi}_5 - C_{4,5}(\varphi_4 - \varphi_5) + C_{5,6}(\varphi_5 - \varphi_6) &= 0, \\ I_6 \ddot{\varphi}_6 + k_6 \dot{\varphi}_6 - C_{5,6}(\varphi_5 - \varphi_6) + C_{6,7}(\varphi_6 - \varphi_7) &= 0, \\ I_7 \ddot{\varphi}_7 + k_7 \dot{\varphi}_7 - C_{6,7}(\varphi_6 - \varphi_7) + C_{7,8}(\varphi_7 - \varphi_8) &= 0, \\ I_8 \ddot{\varphi}_8 + k_8 \dot{\varphi}_8 - C_{7,8}(\varphi_7 - \varphi_8) + C_{8,9}(\varphi_8 - \varphi_9) &= 0, \\ I_9 \ddot{\varphi}_9 + k_9 \dot{\varphi}_9 - C_{8,9}(\varphi_8 - \varphi_9) &= M_c, \end{aligned} \right\} 1)$$

где  $I_1, I_2, \dots, I_9$  – моменты инерции масс;  $C_{1,2}, C_{2,3}, \dots, C_{8,9}$  – жесткости их связей;  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_9$  – углы поворота масс;  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dots, \dot{\varphi}_9$  – скорости масс;  $\ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2, \dots, \ddot{\varphi}_9$  – ускорения масс в колебательном движении;  $k_1, k_2, \dots, k_9$  – коэффициенты демпфирования масс;  $M_{дв}$  – крутящий момент электродвигателя;  $M_c$  – момент сопротивления мешалки.

Для решения системы уравнений использован комплекс научных и инженерных расчетов MATLAB [21]. Описание блоков и алгоритмы построения динамических моделей в среде визуального моделирования Simulink подробно рассмотрены в справочной и специальной литературе, ссылки на которую приведены в пособии [21]. На рисунке 1 представлен общий вид емкостного аппарата с механическим перемешивающим устройством, геометрические параметры которого подробно приведены в работе [24]. Динамическая модель привода мешалки разработана в системе визуального моделирования Simulink [21]. С помощью встроенных функций языка MATLAB из непрерывной модели получена передаточная функция динамической системы.

По разработанному алгоритму программа выполняет линейризацию Simulink модели, создание передаточной функции из формы модели состояния пространства, поиск корней характеристического уравнения в комплексной плоскости, построение диаграмм Боде (АЧХ, ФЧХ) и Найквиста (АФЧХ) [21]. В алгоритме расчета предусмотрена проверка знака мнимой части полученных корней характеристического уравнения, на основании которой происходит выборка собственных частот.

### **Расчет параметров динамической системы привода механического перемешивающего устройства емкостного аппарата (реактора) с учетом демпфирования**

Если динамический расчет ведется с целью определения собственных частот системы из спектра частот вероятных гармонических составляющих возбуждающего момента, то усложнение эквивалентной колебательной системы за счет введения неупругих сопротивлений в системе нецелесообразно. Но такого анализа недостаточно, когда резонанс в силовом приводе неизбежен. В этом наиболее общем случае первостепенное значение приобретает расчет моментов, нагружающих валы и элементы привода с учетом поглощения энергии колебаний и сил неупругого сопротивления или диссипативных сил.

Рассматривая силы неупругого сопротивления, следует отметить, что при их формальном учете, кроме внутреннего рассеяния энергии колебаний в расчетной схеме необходимо также распознавать вклад внешнего демпфирования, приложенного к перемешивающим устройствам.

Внешнее демпфирование в основном зависит от свойств и конфигурации применяемых механических смесителей (мешалок) и реологических свойств перемешиваемых жидкофазных продуктов (продуктов химических реакций). При малых амплитудах крутильных колебаний элементов приводов перемешивающих устройств или механических смесителей (мешалок), приложенные к ним диссипативные силы имеют небольшие значения. При установившейся скорости вращения мешалки силы неупругого сопротивления вращению перемешивающего устройства, зависящие от свойств перемешиваемой среды (жидкофазных продуктов), уравниваются с вращающим моментом электродвигателя.

Преобразование системы дифференциальных уравнений с учетом диссипативных сил (1) в передаточную функцию выполняется по аналогичному алгоритму преобразования системы дифференциальных уравнений без учета демпфирования [21]. Значения собственных частот системы без учета  $\omega_c$  и с учетом демпфирования  $\omega_c(d)$  представлены в табл. 1. Как видно из приведенной таблицы, учет диссипативных сил при динамическом расчете влияет на изменение значений собственных частот системы не более 1,0 – 1,5 %.

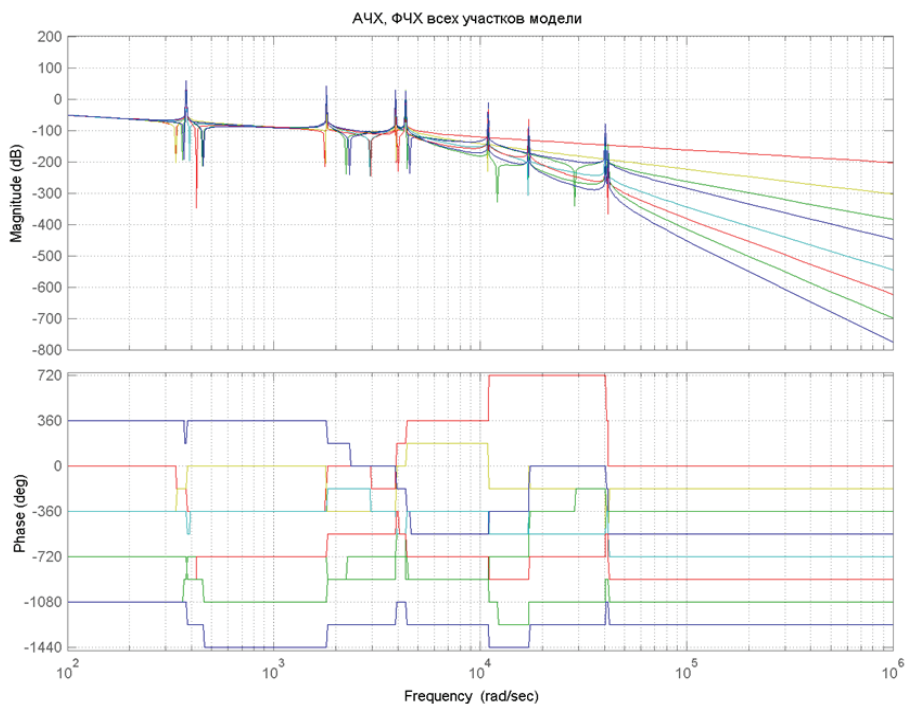


**Рис. 1. Внешний вид емкостного аппарата (реактора) с механическим перемешивающим устройством**

Таблица 1

**Значения собственных частот динамической системы  
без учета демпфирования и с учетом диссипативных сил**

Частота, Гц	Номер частоты							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$\omega_c$	59,88	286,89	620,01	691,88	1738,33	2731,79	6434,53	6651,49
$\omega_c(\Delta)$	58,98	282,12	613,32	691,52	1736,39	2731,21	6434,65	6650,65



**Рис. 2. АЧХ, ФЧХ участков модели без учета диссипативных сил**

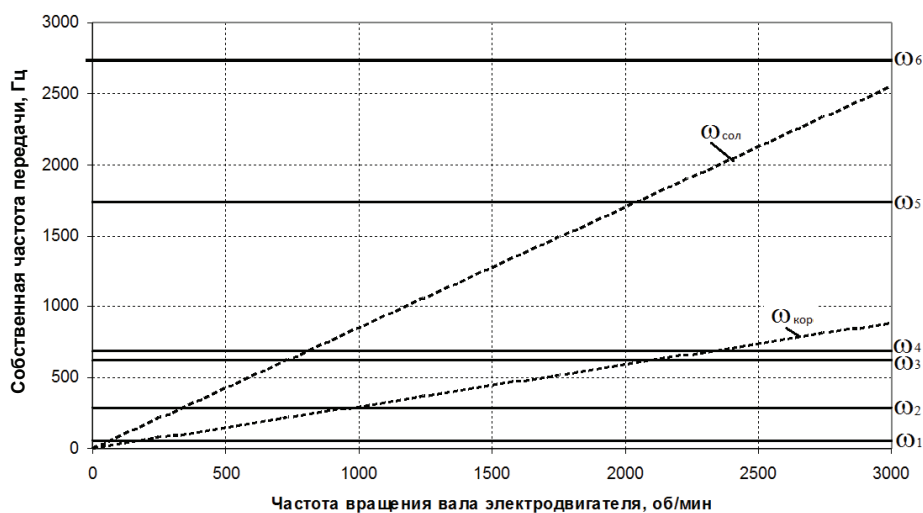
Объединенная амплитудно-частотная (АЧХ) и фазочастотная (ФЧХ) характеристики всех участков силовой цепи представлена на рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики участков динамической системы представляют относительную величину амплитуд изменяющихся приведенных моментов, нагружающих валы привода механического смесителя при различных значениях частот возмущения. Фазочастотная характеристика показывает смещение фаз нагружающих участки силовой цепи моментов относительно фазы возбуждающего колебания момента.

Анализ значений собственных частот системы позволил определить опасные оборотные частоты вращения приводного вала механизма, а также его гармонические составляющие – кратные оборотной частоте, при совпадении которых с одной из собственных частот системы возможно появление резонансов. Кроме того, определены диапазоны частот вращения вала электродвигателя, при которых возможны совпадения собственных частот с зубцовыми частотами переацепления колес редуктора, вызванные соударениями в зубьях вследствие ошибок, погрешностей или износа в основных шагах колес.

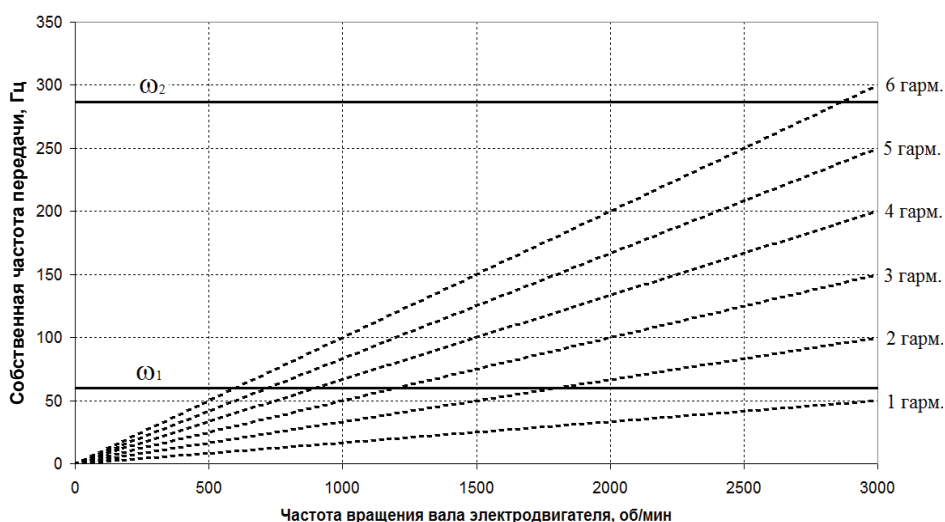
Для рассматриваемого в работе асинхронного двигателя серии АМН250S2, рабочей является частота вращения 2960 об/мин. На исследуемом аппарате установлен планетарный редуктор серии ВО-IV. Передаточное число редуктора составляет 3,88. Число зубьев солнечной шестерни – 51, сателлитов – 48, коронной шестерни – 147. Графические изображения соответствия собственных частот силовой передачи с зубцовыми частотами переацепления колес планетарного редуктора в зависимости от частоты вращения электродвигателя представлены на рис. 3. Анализ графических зависимостей показал, что совпадение первых четырех собственных частот системы с зубцовыми происходит в диапазонах частот вращения электродвигателя: 50...300, 700...1000 и 2000...2300 Гц, которые лежат вне диапазона рабочих частот вращения вала механического смесителя. Совпадение собственных частот может возникать кратковременно, только при разгоне или остановке электродвигателя, то есть при переходных процессах (режимах). При кратковременном совпадении собственных частот амплитуды моментов не успевают достигать критических значений, имеют локальный характер и не приводят к преждевременному изнашиванию и поломке деталей привода.

Несколько иная картина наблюдается при приближении частоты вращения электродвигателя к рабочей зоне – 2950 об/мин (рис. 4). Частота переацепления солнечной шестерни с сателлитами приближается к шестой собственной частоте системы – 2731 Гц. В данном рабочем диапазоне система может работать длительное время, достаточное для развития значительных амплитуд упругих моментов, вызванных резонансными явлениями в силовой цепи и приводит к выходу из строя деталей и узлов привода механического смесителя.

Аналогичную картину совпадения первой собственной частоты со второй по шестую гармоническими составляющими частоты вращения вала электродвигателя можно увидеть в диапазоне частот вращения 600...1600 об/мин, который является диапазоном переходных режимов при раскручивании вала электродвигателя и не оказывает существенного влияния на нагруженность передачи. Однако на частоте вращения 2950 об/мин может возникнуть резонанс шестой гармоники со второй собственной частотой системы – 282 Гц.



**Рис. 3. Соответствие собственных частот передачи с зубчатыми частотами переацепления колес планетарного редуктора в зависимости от частоты вращения электродвигателя**  
( $\omega_{\text{сол}}$ ,  $\omega_{\text{кор}}$  – частоты солнечной и коронной шестерней соответственно)



**Рис. 4. Соответствие собственных частот передачи с гармоническими составляющими, кратными частоте вращения электродвигателя**

### Заключение

Разработанная методика построения и анализа динамических систем силовых передач приводов механических перемешивающих устройств емкостных аппаратов (реакторов), позволяет на этапе их проектирования формировать динамические модели сложных структурных разновидностей: разветвленных, кольцевых, замкнутых, с реактивными связями и т.д. Разработанный алгоритм, используя встроенные функции языка научных расчетов MATLAB, предоставляет быстрое формирование из системы линейных дифференциальных уравнений передаточной функции, определение корней характеристического уравнения в комплексной плоскости. Полученные результаты расчетов используются для определения собственных частот динамической системы привода.

В следующей (третьей) части работы будут построены амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики динамической системы, представлены расчет и анализ форм колебаний многомассовой динамической системы привода механического перемешивающего устройства емкостного аппарата (реактора) с быстросходным консольным валом.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-29-00496, <https://rscf.ru/project/25-29-00496/>, «Моделирование тепло- и массообменных процессов в экологическом и нефтегазоперерабатывающем оборудовании с учетом структуры потоков».*

### Список литературы

1. Карпушкин, С. В. Расчеты и выбор механических перемешивающих устройств вертикальных емкостных аппаратов : учеб. пособие / С. В. Карпушкин, М. Н. Краснянский, А. Б. Борисенко. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 168 с.
2. Производительность осевых мешалок в смесителях с отражательными перегородками / И. В. Доманский, А. И. Мильченко, В. А. Некрасов, Н. В. Воробьев-

Десятовский // Теоретические основы химической технологии. – 2020. – Т. 54, № 1. – С. 97 – 104.

3. Клинов, А. В. Гидродинамические характеристики аппаратов с двухъярусными открытыми турбинными мешалками / А. В. Клинов, А. Г. Мухаметзянова, Л. Р. Минибаева // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2011. – № 12. – С. 12 – 15.

4. Карпушкин, С. В. Расчет механических перемешивающих устройств с применением системы конечно-элементного анализа / С. В. Карпушкин, М. Н. Краснянский, А. В. Стрижков // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2014. – Т. 20, № 4. – С. 758 – 764.

5. Кондракова, Е. Ю. Реактор для определения константы каталитической активности производных фталоцианина кобальта / Е. Ю. Кондракова // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2013. – Т. 19, № 2. – С. 373 – 377.

6. Мартянов, Е. И. Проблемно-ориентированная система управления и оптимизации основных параметров технически сложных систем / Е. И. Мартянов, С. В. Карпушкин, В. В. Алексеев // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2021. – Т. 27, № 3. – С. 336 – 344.

7. Карпушкин, С. В. Система выбора конструкции механического перемешивающего устройства вертикального емкостного аппарата / С. В. Карпушкин, М. Н. Краснянский, Н. Н. Афанасьева // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2005. – Т. 11, № 2. – С. 423 – 431.

8. Выбор оптимальных параметров механического перемешивающего устройства при ламинарном перемешивании / С. В. Карпушкин, Н. А. Сержантова, В. В. Истомина, И. А. Посысаев // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2011. – Т. 17, № 2. – С. 488 – 492.

9. Кондракова, Е. Ю. Реактор для определения константы каталитической активности производных фталоцианина кобальта / Е. Ю. Кондракова // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2013. – Т. 19, № 2. – С. 373 – 377.

10. Кондракова, Е. Ю. Совмещенный процесс получения фталоцианина кобальта из производных *o*-фталевой кислоты и ее ангидрида / Е. Ю. Кондракова, А. Б. Килимник, Ю. М. Рапопорт // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2006. – Т. 12, № 4-1. – С. 1018 – 1023.

11. Войтович, Р. Математическое моделирование гидродинамики смесителя с эксцентрически расположенной мешалкой / Р. Войтович, А. А. Липин, А. Г. Липин // Известия высших учебных заведений. Серия: Химия и химическая технология. – 2015. – Т. 58, № 11. – С. 83 – 86.

12. Осевая сила, действующая на осевую мешалку в смесителе с перегородками / И. В. Доманский, А. И. Мильченко, Е. А. Максимова, С. А. Кубышкин, В. А. Некрасов // Теоретические основы химической технологии. – 2022. – Т. 56, № 6. – С. 769 – 778.

13. Alekseev, K. A. Measurement of Velocity Fields in a Machine with a Two-Blade Mixer via Digital Tracer Visualization / K. A. Alekseev, A. G. Mukhametzyanova // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2022. – Vol. 56, No. 1. – P. 23 – 30.

14. Расчет полей скоростей и давления в аппарате с лопастной мешалкой / Р. Р. Дмитричева, В. В. Бронская, Г. В. Мануйко [и др.] // Вестн. технолог. ун-та. – 2016. – Т. 19, № 21. – С. 124 – 126.

15. Минибаева, Л. Р. Численное моделирование гидродинамической структуры потока в аппаратах с перемешивающими устройствами / Л. Р. Минибаева, А. Г. Мухаметзянова, А. В. Клинов // Вестн. Казан. технолог. ун-та. – 2008. – № 6. – С. 191 – 198.

16. Минибаева, Л. Р. Модели турбулентности для адекватного описания поля скорости в аппаратах с перемешивающими устройствами / Л. Р. Минибаева, А. Г. Мухаметзянова, А. В. Клинов // Вестн. Казан. технолог. ун-та. – 2010. – № 9. – С. 469 – 477.
17. Tarasova, L. A. Hydrodynamics of Eddy Flow in a Smooth-Wall Mixer-Equipped Vessel / L. A. Tarasova, S. V. Orlov, O. A. Troshkin // Chemical and Petroleum Engineering. – 2007. – Vol. 43, No. 5-6. – P. 315 – 318. doi: 10.1007/s10556-007-0056-2
18. Klinov, A. V. Hydrodynamic characteristics of vessels with dual-tier open turbine mixers / A. V. Klinov, A. G. Mukhametzyanova, L. R. Minibaeva // Chemical and Petroleum Engineering. – 2012. – Vol. 47, No. 11-12. – P. 815 – 820. doi: 10.1007/s10556-012-9555-x
19. Оборудование нефтегазопереработки, химических и нефтехимических производств. Книга 2 / А. С. Тимонин, Г. В. Божко, В. Я. Борщев, Ю. И. Гусев ; под общ. ред. А. С. Тимониной. – М. : Вологда : Инфра-Инженерия, 2019. – 476 с.
20. Машины и аппараты химических производств / А. С. Тимонин, Б. Г. Болдин, В. Я. Борщев, Ю. И. Гусевидр. – Калуга : Ноосфера, 2014. – 856 с.
21. Меренцов, Н. А. Нестационарное вращение валов химических реакторов: учеб. пособие / Н. А. Меренцов, Н. С. Соколов-Добрев, П. В. Потапов. – Волгоград : Изд-во ВолгГТУ, 2018. – 116 с.
22. Тимонин, А. С. Основы конструирования и расчета химико-технологического и природоохранного оборудования : справочник / А. С. Тимонин. – Калуга : Ноосфера, 2015. – Том. 2.
23. Остриков, А. Н. Расчет и конструирование машин и аппаратов пищевых производств / А. Н. Остриков, В. Н. Василенко, В. В. Пойманов. – М. : Вологда : Инфра-Инженерия, 2023. – 476 с.
24. Исследование динамических характеристик привода механического перемешивающего устройства емкостного аппарата в целях снижения его вибронагруженности. Часть 1. Разработка блок-схемы и динамической модели передачи / Н. А. Меренцов, Н. С. Соколов-Добрев, А. Б. Голованчиков, А. В. Персидский, М. В. Топилин // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2025. – Т. 31, № 2. – С. 281 – 300. doi: 10.17277/vestnik.2025.02.pp.281-300
25. Merentsov, N. A. Calculation of Vibration Resistance of a Chemical Reactor High-Speed Shaft Undergoing Torsional Vibrations. Part I. Development of a Block Diagram and a Dynamic Transmission Model / N. A. Merentsov, N. S. Sokolov-Dobrev, A. V. Persidskiy // Proceedings of the 6th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2020). – Chelyabinsk, 2021. – Vol. I. – P. 759 – 767. doi: 10.1007/978-3-030-54814-8\_88
26. Merentsov, N. A. Calculation of Vibration Resistance of Chemical Reactor High-Speed Shaft Undergoing Torsional Vibrations. Part II. Defining Model Elastic-Inertial Parameters / N.A. Merentsov, N.S. Sokolov-Dobrev, A.V. Persidskiy // Proceedings of the 6th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2020). – Chelyabinsk, 2021. – Vol. I. – P. 768 – 779. doi: 10.1007/978-3-030-54814-8\_89
27. Merentsov, N. A. Calculation of Vibration Resistance of Chemical Reactor High-Speed Shaft Undergoing Torsional Vibrations. Part III. Calculation of Multi-Mass System Vibrations / N. A. Merentsov, N. S. Sokolov-Dobrev, A. V. Persidskiy // Proceedings of the 6th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2020). – Chelyabinsk, 2021. – Vol. I. – P. 780 – 786. doi: 10.1007/978-3-030-54814-8\_90

**A Study of Dynamic Characteristics of a Mechanical Stirrer Drive  
in a Capacitive Apparatus to Reduce Its Vibration.  
Part 2. Construction of a Dynamic Model of the Power Transmission,  
Determination and Analysis of the System's Natural Frequencies**

N. A. Merentsov<sup>1</sup>✉, N. S. Sokolov-Dobrev<sup>2</sup>, A. B. Golovanchikov<sup>1</sup>,  
A. V. Persidskiy<sup>3</sup>, M. V. Topilin<sup>4</sup>

*Departments: Processes and Apparatus for Chemical and Food Production (1),  
steple@mail.ru; Technical Operation and Repair of Vehicles (2),  
Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia;  
JSC Federal Research and Production Center Titan-Barrikady (3), Volgograd, Russia;  
LUKOIL-Engineering VolgogradNIPImorneft LLC (4), Volgograd, Russia*

**Keywords:** vibration resistance; dynamic model; cantilever shaft; torsional vibrations; mechanical transmissions; mechanical mixing.

**Abstract:** An algorithm has been developed that enables the rapid formation of a transfer function from a system of linear differential equations and the determination of the roots of the characteristic equation in the complex plane, enabling detailed analysis and determination of the natural frequencies of multimass dynamic systems. Based on d'Alembert's principle and using Lagrange's equations of the second kind, a system of differential equations was developed to describe the motion of a nine-mass drive system of a mechanical mixer subject to torsional vibrations. The amplitude-frequency and phase-frequency characteristics of the links (sections) of the dynamic drive system model of a mechanical mixing device of a capacitive apparatus (reactor) were obtained and analyzed, taking into account damping.

*References*

1. Karpushkin S.V., Krasnyansky M.N., Borisenko A.B. *Raschoty i vybor mekhanicheskikh ustroystv vertikal'nykh yemkostnykh apparatov* [Calculations and selection of mechanical mixing devices for vertical capacitive apparatuses: textbook], Tambov: Izdatel'stvo Tambov State Technical University, 2009, 168 p. (In Russ.)
2. Domansky I.V., Milchenko A.I., Nekrasov V.A., Vorobyov-Desyatovsky N.V. [Productivity of axial stirrers in mixers with baffles], *Teoreticheskiye osnovy khimicheskoy tekhnologii* [Theoretical Foundations of Chemical Engineering], 2020, vol. 54, no. 1, pp. 97-104. (In Russ., abstract in Eng.)
3. Klinov A.V., Mukhametzyanova A.G., Minibaeva L.R. [Hydrodynamic characteristics of devices with two-tier open turbine stirrers], *Khimicheskoye i neftegazovoye mashinostroyeniye* [Chemical and Petroleum Engineering], 2011, no. 12, pp. 12-15. (In Russ., abstract in Eng.)
4. Karpushkin S.V., Krasnyansky M.N., Strizhkov A.V. [Calculation of mechanical mixing devices using a finite element analysis system], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 758-764. (In Russ., abstract in Eng.)
5. Kondrakova E.Yu. [Reactor for Determination of Catalytic Activity Constant of Cobalt Phthalocyanine Derivatives], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2013, vol. 19, no. 2, pp. 373-377. (In Russ., abstract in Eng.)
6. Martyanov E.I., Karpushkin S.V., Alekseev V.V. [Problem-oriented system of management and optimization of the main parameters of technically complex systems],

*Transactions of the Tambov State Technical University*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 336-344. (In Russ., abstract in Eng.)

7. Karpushkin S.V., Krasnyansky M.N., Afanasyeva N.N. [System for choosing the design of a mechanical mixer of a vertical capacitive apparatus], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2005, vol. 11, no. 2, pp. 423-431. (In Russ., abstract in Eng.)

8. Karpushkin S.V., Sergezhantova N.A., Istomin V.V., Posysaev I.A. [Selection of optimal parameters of a mechanical mixing device during laminar mixing], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 488-492. (In Russ., abstract in Eng.)

9. Kondrakova E.Yu. [Reactor for Determination of Catalytic Activity Constant of Cobalt Phthalocyanine Derivatives], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2013, vol. 19, no. 2, pp. 373-377. (In Russ., abstract in Eng.)

10. Kondrakova E.Yu., Kilimnik A.B., Rapoport Yu.M. [Combined process of obtaining cobalt phthalocyanine from derivatives of *o*-phthalic acid and its anhydride], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2006, vol. 12, no. 4-1, pp. 1018-1023. (In Russ., abstract in Eng.)

11. Voitovich R., Lipin A.A., Lipin A.G. [Mathematical modeling of the hydrodynamics of a mixer with an eccentric stirrer], *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Seriya: Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya* [Bulletin of higher educational institutions. Series: Chemistry and Chemical Technology], 2015, vol. 58, no. 11, pp. 83-86. (In Russ., abstract in Eng.)

12. Domansky I.V., Milchenko A.I., Maksimova E.A., Kubyshkin S.A., Nekrasov V.A. [Axial force acting on an axial mixer in a mixer with partitions], *Teoreticheskiye osnovy khimicheskoy tekhnologii* [Theoretical Foundations of Chemical Engineering], 2022, vol. 56, no. 6, pp. 769-778. (In Russ., abstract in Eng.)

13. Alekseev K.A., Mukhametzyanova A.G. [Measurement of Velocity Fields in a Machine with a Two-Blade Mixer via Digital Tracer Visualization], *Teoreticheskiye osnovy khimicheskoy tekhnologii* [Theoretical Foundations of Chemical Engineering], 2022, vol. 56, no. 1, pp. 23-30. (In Russ., abstract in Eng.)

14. Dmitricheva R.R., Bronskaya V.V., Manuiko G.V., Aminova G.A., Gimaltynov A.G., Halimbaev R.R. [Calculation of velocity and pressure fields in an apparatus with a paddle stirrer], *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta* [Bulletin of the University of Technology], 2016, vol. 19, no. 21, pp. 124-126. (In Russ., abstract in Eng.)

15. Minibaeva L.R., Mukhametzyanova A.G., Klinov A.V. [Numerical modeling of hydrodynamic flow structure in devices with mixing devices], *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta* [Bulletin of Kazan Technological University], 2008, no. 6, pp. 191-198. (In Russ., abstract in Eng.)

16. Minibaeva L.R., Mukhametzyanova A.G., Klinov A.V. [Models of turbulence to adequately describe the velocity field in devices with mixing devices], *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta* [Bulletin of Kazan Technological University], 2010, no. 9, pp. 469-477. (In Russ., abstract in Eng.)

17. Tarasova L.A., Orlov S.V., Troshkin O.A. [Hydrodynamics of eddy flow in a smooth-wall mixer-equipped vessel], *Khimicheskoye i neftegazovoye mashinostroyeniye* [Chemical and Petroleum Engineering], 2007, vol. 43, no. 5-6, pp. 315-318. (In Russ., abstract in Eng.)

18. Klinov A.V., Mukhametzyanova A.G., Minibaeva L.R. [Hydrodynamic characteristics of vessels with dual-tier open turbine mixers], *Khimicheskoye i neftegazovoye mashinostroyeniye* [Chemical and Petroleum Engineering], 2012, vol. 47, no. 11-12, pp. 815-820. (In Russ., abstract in Eng.)

19. Timonin A.S. (Ed.), Bozhko G.V., Borshchev V.Ya., Gusev Yu.I. *Oborudovaniye neftegazopererabotki, khimicheskikh i neftekhimicheskikh proizvodstv* [Oil and gas processing equipment, chemical and petrochemical production facilities. Book 2], Moscow; Vologda: Infra-Engineering, 2019, 476 p. (In Russ.)
20. Timonin A.S., Boldin B.G., Borshchev V.Ya., Gusev Yu.I. [et al.]. *Mashiny i apparaty khimicheskikh proizvodstv* [Machines and apparatuses of chemical production], Kaluga: Noosphere, 2014, 856 p. (In Russ.)
21. Merentsov N.A., Sokolov-Dobrev N.S., Potapov P.V. *Nestatsionarnoye vrashcheniye valov khimicheskikh reaktorov* [Non-stationary rotation of the shafts of chemical reactors: textbook], Volgograd: VolgaGTU, 2018, 116 p. (In Russ.)
22. Timonin A.S. *Osnovy konstruirovaniya i rascheta khimiko-tekhnologicheskogo i prirodookhrannogo oborudovaniya* [Basics of design and calculation of chemical-technological and environmental protection equipment: reference book. Vol. 2], Kaluga: Noosphere, 2015, 1086 p. (In Russ.)
23. Ostrikov A.N., Vasilenko V.N., Poymanov V.V. *Raschet i konstruirovaniye mashin i apparatov pishchevykh proizvodstv* [Calculation and design of machines and apparatuses for food production], Moscow; Vologda: Infra-Engineering, 2023, 476 p. (In Russ.)
24. Merentsov N.A., Sokolov-Dobrev N.S., Golovanchikov A.B., Persidskiy A.V., Topilin M.V. [Study of dynamic characteristics of the drive of the mechanical mixing device of the capacity in order to reduce its vibration load. Part 1. Development of a block diagram and dynamic transmission model], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2025, vol. 31, no.2, pp. 281-300. doi: 10.17277/vestnik.2025.02. pp.281-300
25. Merentsov N.A., Sokolov-Dobrev N.S., Persidskiy A.V. Calculation of Vibration Resistance of a Chemical Reactor High-Speed Shaft Undergoing Torsional Vibrations. Part I. Development of a Block Diagram and a Dynamic Transmission Model, *Proceedings of the 6th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2020)*, Chelyabinsk, 2021, vol. I, pp. 759-767. doi: 10.1007/978-3-030-54814-8\_88
26. Merentsov N.A., Sokolov-Dobrev N.S., Persidskiy A.V. Calculation of Vibration Resistance of Chemical Reactor High-Speed Shaft Undergoing Torsional Vibrations. Part II. Defining Model Elastic-Inertial Parameters, *Proceedings of the 6th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2020)*, Chelyabinsk, 2021, vol. I, pp. 768-779. doi: 10.1007/978-3-030-54814-8\_89
27. Merentsov N.A., Sokolov-Dobrev N.S., Persidskiy A.V. Calculation of Vibration Resistance of Chemical Reactor High-Speed Shaft Undergoing Torsional Vibrations. Part III. Calculation of Multi-Mass System Vibrations, *Proceedings of the 6th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2020)*, Chelyabinsk, 2021, vol. I, pp. 780-786. doi: 10.1007/978-3-030-54814-8\_90

**Untersuchung der dynamischen Eigenschaften  
des mechanischen Mischantriebs des kapazitiven Geräts  
zur Reduzierung seiner Vibrationen.**

**Teil 2. Aufbau des dynamischen Modells der Kraftübertragung,  
Bestimmung und Analyse der Eigenfrequenzen des Systems**

**Zusammenfassung:** Es ist ein Algorithmus entwickelt, der schnell eine Übertragungsfunktion aus einem System linearer Differentialgleichungen generiert und die Wurzeln der charakteristischen Gleichung in der komplexen Ebene bestimmt, wodurch eine detaillierte Analyse und Bestimmung der Eigenfrequenzen dynamischer Mehrmassensysteme ermöglicht wird. Basierend auf dem d'Alembert-Prinzip und unter Verwendung der Lagrange-Gleichungen zweiter Art ist ein System von

Differentialgleichungen zusammengestellt, um die Bewegung des Neun-Massen-Antriebssystems des mechanischen Mischers zu beschreiben, der Torsionsschwingungen ausgesetzt ist. Die Amplituden-Frequenz- und Phasen-Frequenz-Kennlinien der Verbindungen (Abschnitte) des dynamischen Antriebssystemmodells für die mechanische Mischvorrichtung des kapazitiven Apparats (Reaktors) sind ermittelt und unter Berücksichtigung der Dämpfung analysiert.

---

**Étude des caractéristiques dynamiques de l'entraînement du dispositif d'agitation mécanique de l'appareil osseux afin de réduire sa capacité de vibration.**

**Partie 2. Construction d'un modèle dynamique de transmission de puissance, détermination et analyse des fréquences propres du système**

**Résumé:** Est développé un algorithme pour fournir une formation rapide à partir d'un système d'équations différentielles linéaires de la fonction de transfert, la détermination des racines de l'équation caractéristique dans le plan complexe, permettant une analyse détaillée et la détermination des fréquences propres des systèmes dynamiques multi-masses. A la base du principe de D'Alembert et en utilisant les équations de Lagrange du deuxième type, est établi un système d'équations différentielles pour décrire le mouvement d'un système d'entraînement à neuf masses d'un mélangeur mécanique soumis à des vibrations de torsion. Sont obtenues et analysées les caractéristiques d'amplitude - fréquence et de phase des unités (sections) du modèle du système dynamique d'entraînement du dispositif de transmission mécanique du dispositif capacitif (réacteur) en tenant compte de l'amortissement.

---

**Авторы:** *Меренцов Николай Анатольевич* – кандидат технических наук, доцент, докторант кафедры «Процессы и аппараты химических и пищевых производств»; *Соколов-Добрев Николай Сергеевич* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Техническая эксплуатация и ремонт автомобилей»; *Голованчиков Александр Борисович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Процессы и аппараты химических и пищевых производств», ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет», Волгоград, Россия; *Персидский Александр Владимирович* – ведущий инженер-конструктор, АО «Федеральный научно-производственный центр «Титан-Баррикады», Волгоград, Россия; *Топилин Михаил Владимирович* – ведущий инженер лаборатории стандартных исследований керна, ООО «ЛУКОЙЛ-Инжиниринг ВолгоградНИПИморнефть», Волгоград, Россия.