

## ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА НАНЕСЕНИЯ ГАЛЬВАНИЧЕСКОГО ПОКРЫТИЯ В ВАННЕ С ПОДВИЖНЫМИ СЕКЦИЯМИ АНОДА

А. П. Пуха<sup>1</sup>✉, Ю. В. Литовка<sup>2</sup>

*Многопрофильный колледж (1), bagryantseva2000@yandex.ru;  
кафедра «Системы автоматизированной поддержки принятия решений» (2),  
ФГБОУ ВО «ТГТУ», Тамбов, Россия;*

**Ключевые слова:** гальваническая ванна; гальваническое покрытие; деталь; математическая модель; потенциал.

**Аннотация:** Предложена математическая модель процесса нанесения гальванического покрытия в ванне с мозаичным анодом и просчета распределения толщины покрытия по поверхности изделия. Рассмотрены особенности (компоненты, параметры) проведения эксперимента по нанесению покрытия на деталь сложной формы. Дано описание алгоритма расчета гальванического покрытия с помощью математической модели. Сопоставлены результаты эксперимента и рассчитанные системой данные, полученные по представленной математической модели.

### Обозначения

$\delta$ – толщина покрытия, м;	$j$ – номер точки среднего сечения поверхности катода плоскостью, параллельной $xOy$ ;
$\delta^3(j)$ , $\delta^p(j)$ – экспериментальная и расчетная толщина покрытия соответственно в $j$ -й точке, м;	$k$ – номер анодной секции;
$\eta$ – выход по току;	$m$ – число точек поверхности катода среднего сечения плоскостью, параллельной $xOy$ ;
$\rho$ – плотность металла покрытия, кг/м <sup>3</sup> ;	$n$ – нормаль к поверхности изолятора;
$\tau$ – время нанесения покрытия, с;	$p$ – число анодных секций, шт.;
$\varphi$ – потенциал электрического поля, В;	$S_{ak}$ – площадь поверхности $k$ -й анодной секции, м <sup>2</sup> ;
$\chi$ – электропроводность электролита, (Ом·м) <sup>-1</sup> ;	$S_{кат}$ , $S_{и}$ – площади поверхности катода и изолятора соответственно, м <sup>2</sup> ;
$F_1$ , $F_2$ – функции поляризации анода и катода соответственно;	$t$ – температура в гальванической ванне, °С;
$I$ – сила тока, А;	$U_a$ – потенциал анода, В;
$i$ – плотность тока, А/м;	$\mathcal{E}$ – электрохимический эквивалент, кг/(А·с).
$i_{кат}$ – плотность тока на катоде, А/м;	

### Введение

Электролитические процессы нанесения металлопокрытий (гальванотехника) применяются для защиты изделий от коррозии, защитно-декоративной отделки, повышения сопротивления механическому износу и поверхностной твердости, сообщения антифрикционных свойств, отражательной способности, а также для изготовления металлических копий [1]. Одни свойства обладают только декоративной функцией, другие – имеют важное значение для эксплуатации детали.

Среди важнейших свойств гальванического покрытия изделий – его равномерность. Наиболее качественным с точки зрения критерия неравномерности будет покрытие, имеющее одинаковую (заданную технологическим регламентом) толщину во всех точках покрываемой поверхности [2]. Особенно важно такое требование при нанесении гальванического покрытия на детали сложной конфигурации, так как повышается риск образования брака. Кроме того, разная толщина покрытия изделия приводит к перерасходу материалов, использующихся в процессе, и электроэнергии, что невыгодно экономически. Поэтому необходимы системы, оптимизирующие процесс нанесения равномерного гальванического покрытия на детали различных конфигураций. В данной работе строится математическая модель для вычисления распределения толщины покрытия и проверяется ее адекватность сравнением с экспериментальными данными.

*Цель работы* – построение адекватной математической модели процесса нанесения гальванического покрытия.

### Описание математической модели

Необходимо получить расчетные данные системы, характеризующие толщину покрытия на изделии. Расчет толщины получаемого покрытия на каждой точке детали осуществляется согласно закону Фарадея по формуле [1]

$$\delta(x, y, z) = \frac{\eta \nabla i_{\text{кат}}(x, y, z) \tau}{\rho}.$$

Для вычисления  $i_{\text{кат}}(x, y, z)$  на поверхности катода  $S_{\text{кат}}$  используем закон Ома в дифференциальной форме [3]

$$i_{\text{кат}}(x, y, z) = -\chi \text{grad}(\varphi(x, y, z))|_{S_{\text{кат}}}.$$

Распределение электрического потенциала в объеме гальванической ванны рассчитывается по уравнению Лапласа [3, 4]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

В гальванической ванне, представленной на рис. 1, при прохождении тока в электролите существуют следующие границы и краевые условия на них:

– футерованные токонепроводящие стенки ванны и границы электролит – воздух [3, 4]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} |_{S_{\text{и}}} = 0; \quad (2)$$

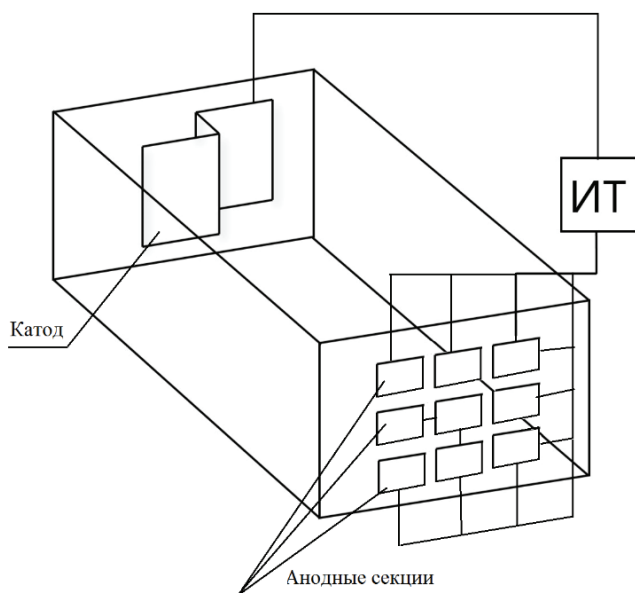
– граница электролит – анодная секция [5]:

$$\varphi + F_1(i) |_{S_{ak}} = U_a; \quad (3)$$

– граница электролит – катод [3, 4]

$$\varphi + F_2(i) |_{S_{кат}} = 0.$$

Особенностью данной математической модели является задание положения каждой  $k$ -й анодной секции в пространстве гальванической ванны, что определяется величиной  $S_{ak}$  в краевом условии (3).

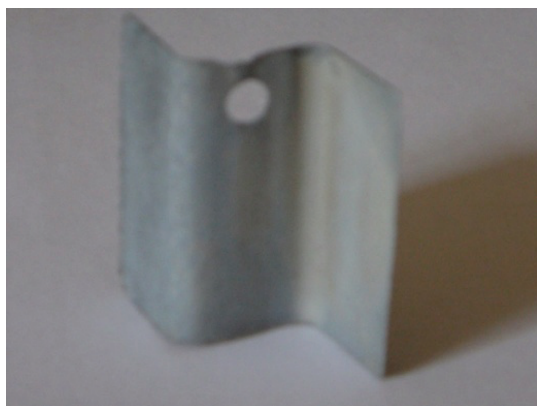


**Рис. 1.** Схема гальванической ванны, отражающая конфигурацию ее элементов

### Экспериментальное исследование процесса нанесения гальванического покрытия

Процесс нанесения гальванического покрытия на обрабатываемое изделие осуществляли в гальванической ванне, в которой находились электроды – мозаичный анод с подвижными секциями [5] и катод сложной формы (см. рис. 1), подключенные к источнику тока (ИТ).

В проведенном эксперименте по нанесению покрытия на деталь, а соответственно и в разрабатываемой системе, реализующей математическую модель данного процесса, использовался Z-образный фигурный катод (ширина и высота равна 4 см, рис. 2), у которого левая сторона выдвинута ближе к аноду на 2 см. Длина, ширина и высота гальванической ванны – 16, 11 и 13 см соответственно. Анодные секции в количестве 9 штук имели размеры 1 × 1 см и были расположены в одной плоскости.



**Рис. 2.** Z-образный фигурный катод

Для покрытия детали применялся электролит следующего состава: цинк хлористый – 80 г/л, аммоний хлористый 200 г/л, блескообразователь Ликонда ZnSr–A, Sr–B, Sr–C – 50 г/л. При проведении гальванического процесса использовались следующие параметры:  $I = 0,5$  А,  $U_a = 0,7 \dots 0,8$  В,  $t = 20$  °С,  $\tau = 45$  мин.

Измерение толщины покрытия проводилось магнитно-индукционным прибором неразрушающего контроля МИП-10. Экспериментально полученные данные сглаживались методом скользящего среднего по трем точкам.

### Расчет распределения гальванического покрытия по поверхности детали с помощью математической модели

При расчетах использовались следующие параметры для процесса цинкования:  $\Theta = 4,32$  кг/(А·с);  $\eta = 0,98$ ; плотность цинка  $\rho = 7133$  кг/м<sup>3</sup>;  $\chi = 0,35$  (Ом·дм)<sup>-1</sup>.

Для получения расчетных данных использовались функции поляризации анода и катода, которые получены аппроксимацией экспериментальных поляризационных кривых для процесса цинкования [6]:

$$F_1 = 1,2; \quad F_2 = 0,0016 i_{\text{кат}}^2 + 0,055 i_{\text{кат}} + 1,347.$$

Время осаждения покрытия, размеры ванны и расположение электродов задавались такими же, как при проведении эксперимента. Решение системы уравнений математической модели осуществлялось сочетанием методов расщепления и релаксации с прогонкой по строке [7 – 10].

Для начала пространство гальванической ванны разбивается на равномерную сетку, каждый узел которой имеет координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  (рис. 3). Затем, для удобства и простоты расчета, по узлам сетки ванна делится сначала на плоскости, параллельные плоскости  $xOy$ , проводится просчет параметров гальванического процесса в каждой из них по очереди. Далее ванна делится на плоскости, параллельные плоскости  $zOy$ , в которых проводятся те же вычисления. К рассчитываемым на этом этапе параметрам относятся:

- начальные потенциалы в узлах сетки  $\phi^0$ ;
- начальные плотности тока на поверхности обрабатываемой детали  $i^0$ ;
- прогоночные коэффициенты;
- промежуточные  $\phi^{0,5}$  и конечные  $\phi^1$  потенциалы узлов сетки гальванической ванны;
- конечные плотности тока на поверхности обрабатываемой детали  $i^1$ .

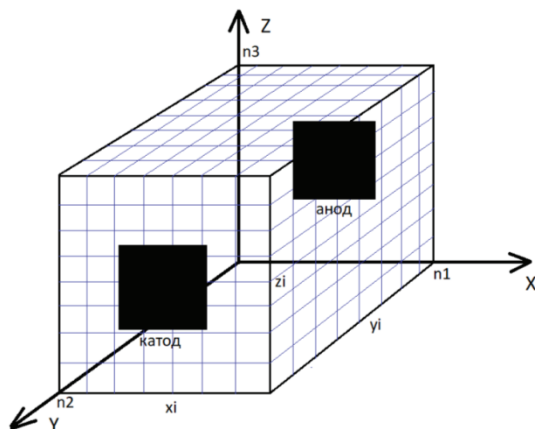


Рис. 3. Разбиение пространства гальванической ванны равномерной сеткой

Для каждой плоскости также вычисляются максимальная разница  $\Delta_1$  между конечными и начальными значениями потенциалов в каждом узле сетки одной плоскости и максимальная разница  $\Delta_2$  между конечными и начальными значениями плотностей тока в каждой точке катода одной плоскости:

$$\Delta_1 = \max |\varphi^1(x, y, z) - \varphi^0(x, y, z)|;$$

$$\Delta_2 = \max |i_{\text{кат}}^1(x, y, z) - i_{\text{кат}}^0(x, y, z)|,$$

где  $\varphi^1(x, y, z)$ ,  $\varphi^0(x, y, z)$  – конечные и начальные значения потенциалов в узлах сетки с координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно;  $i_{\text{кат}}^1(x, y, z)$ ,  $i_{\text{кат}}^0(x, y, z)$  – конечные и начальные значения плотностей тока в каждой точке катода в узлах сетки с координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно.

Далее проверяются условия окончания процесса расчета

$$\Delta_1 < \varepsilon_1 ; \Delta_2 < \varepsilon_2,$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – заданные точности для потенциала и плотности тока соответственно.

Если условие выполняется – получен окончательный результат просчета гальванических параметров системы. Иначе происходит переопределение начальных значений потенциалов и плотностей тока и вышеописанные расчеты повторяются заново с момента вычисления прогоночных коэффициентов:

$$\varphi^0(x, y, z) = \varphi^1(x, y, z);$$

$$i_{\text{кат}}^0(x, y, z) = i_{\text{кат}}^1(x, y, z).$$

В итоге получаем два массива потенциалов в узлах сетки – один по плоскостям  $xOy$  и один по плоскостям  $zOy$ , то есть на каждый узел сетки приходится два значения потенциала. Необходимо найти одно конечное значение потенциала для всего объема ванны на каждый узел сетки по формуле

$$\varphi(x, y, z) = (\varphi_x(x, y, z) + \varphi_z(x, y, z)) / 2,$$

где  $\varphi_x(x, y, z)$ ,  $\varphi_z(x, y, z)$  – итоговые значения потенциалов в узлах сетки с координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  по плоскостям, параллельным  $xOy$  и  $zOy$  соответственно.

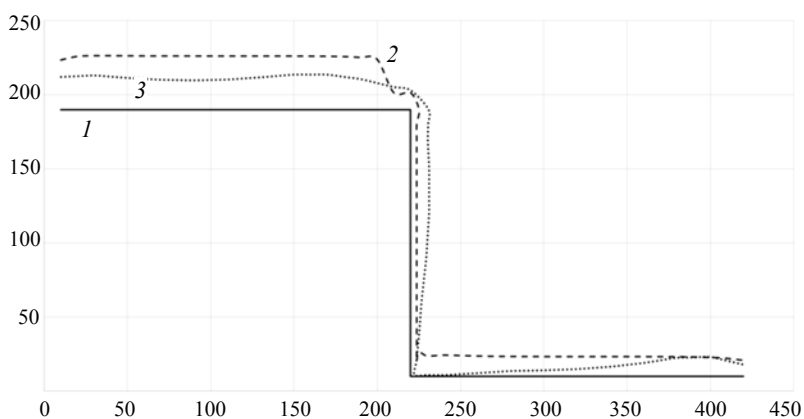
По полученным значениям потенциала в узлах сетки по всему объему гальванической ванны высчитываем конечные плотности тока на катоде  $i_{\text{кат}}$ , а по ним толщину полученного гальванического покрытия  $\delta$  по приведенным выше формулам.

### Сравнение экспериментальных и расчетных данных

На рисунке 4 представлен график, на котором изображены: контур детали, экспериментально полученное и рассчитанное по вышеописанной математической модели распределение толщины покрытия по поверхности Z-образной детали для среднего сечения плоскостью, параллельной  $xOy$ .

Для сравнения расчетных и экспериментальных данных вычислена относительная погрешность по формуле

$$\Delta = \frac{1}{m} \sqrt{\sum_{j=1}^m \left( \frac{\delta^{\text{э}}(j) - \delta^{\text{р}}(j)}{\delta^{\text{э}}(j)} \right)^2} \cdot 100 \%.$$



**Рис. 4. Расчетные и экспериментальные данные распределения толщины покрытия по поверхности катода для среднего сечения плоскостью, параллельной  $xOy$ :**  
*1* – контур детали; *2* – расчет; *3* – эксперимент

Полученная относительная погрешность  $\Delta = 11\%$ . При этом погрешность прибора МИП-10, которым измерялось покрытие, в диапазоне  $6 \dots 16$  мкм составляет  $\pm 1$  мкм  $\pm 10\%$  от полученных данных, то есть погрешность при сравнении расчетных и экспериментальных данных примерно равна погрешности измерительного прибора, что доказывает адекватность выбранной для расчетов математической модели.

### Заключение

Равномерность – один из важнейших показателей гальванического покрытия. Однако для его оптимизации необходим расчет корректных данных распределения толщины покрытия по адекватной математической модели, которая соответствует реальным показателям.

В результате проведения эксперимента и расчетов с использованием описанной математической модели получены данные распределения толщины покрытия по поверхности Z-образного катода. Относительная погрешность этих данных не превышает погрешность измерительного прибора, что позволяет сделать вывод об адекватности выбранной математической модели.

В дальнейшем полученная математическая модель будет использоваться для расчета управляющих воздействий – положений анодных секций в пространстве гальванической ванны – в задаче минимизации неравномерности покрытия.

### Список литературы

1. Кудрявцев, Н. Т. Электролитические покрытия металлами / Н. Т. Кудрявцев. – М. : Химия, 1979. – 352 с.
2. Литовка, Ю. В. Размещение деталей-катодов при управлении гальванической ванной по векторному критерию / Ю. В. Литовка, А. А. Банников // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2024. – № 1. – С. 18 – 25. doi: 10.24143/2072-9502-2024-1-18-25
3. Каданер, Л. И. Равномерность гальванических покрытий / Л. И. Каданер. – Харьков : Изд-во Харьк. ГУ, 1960. – 414 с.
4. Гнусин, Н. П. Основы теории расчета и моделирования электрических полей в электролитах / Н. П. Гнусин, Н. П. Поддубный, А. И. Маслий. – Новосибирск : Наука, 1972. – 276 с.

5. Пуха, А. П. Алгоритм управления процессом нанесения гальванического покрытия с подвижными секциями анода / А. П. Пуха, Ю. В. Литовка, В. В. Конкина // Математические методы в технологиях и технике. – 2024. – № 3. – С. 18 – 21.

6. Проскуркин, Е. В. Цинкование : справочник / Е. В. Проскуркин, В. А. Попович, А. Т. Мороз ; под ред. Е. В. Проскуркина. – М. : Metallurgia, 1988. – 528 с.

7. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1989. – 608 с.

8. Пчелинцева, И. Ю. Система распределенной обработки информации для решения задачи снижения неравномерности гальванических покрытий / И. Ю. Пчелинцева // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2022. – Т. 28, № 3. – С. 398 – 411. doi: 10.17277/vestnik.2022.03.pp.398-411

9. Литовка, Ю. В. Моделирование и оптимизация гальванической ванны с дополнительными катодами / Ю. В. Литовка, В. З. Као // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2016. – Т. 22, № 1. – С. 68 – 74. doi: 10.17277/vestnik.2016.01.pp.068-074

10. Соловьёв, Д. С. Постановка задачи оптимального управления реверсивным режимом нанесения гальванического покрытия в ванне со многими анодами / Д. С. Соловьёв, В. В. Конкина, Ю. В. Литовка // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 248 – 256. doi: 10.17277/vestnik.2015.02.pp.248-256

---

## Testing the Adequacy of a Mathematical Model for Applying Galvanic Coating in a Bath with Movable Anode Sections

A. P. Puha<sup>1</sup>✉, Yu. V. Litovka<sup>2</sup>

*Multidisciplinary College (1), bagryantseva2000@yandex.ru;  
Department of Automated Decision Support Systems (2), TSTU, Tambov, Russia*

**Keywords:** galvanic bath; galvanic coating; component; mathematical model; potential.

**Abstract:** A mathematical model is proposed for applying galvanic coating in a bath with a mosaic anode and for calculating the coating thickness distribution over the surface of the component. The features (components, parameters) of conducting an experiment on applying the coating to a complex-shaped component are discussed. A description of the algorithm for calculating galvanic coatings using a mathematical model is provided. Experimental results are compared with the system-calculated data obtained using the described mathematical model.

### References

1. Kudryavtsev N.T. *Elektroliticheskiye pokrytiya metallami* [Electrolytic coatings of metals], Moscow: Khimiya, 1979, 352 p. (In Russ.)

2. Litovka Yu.V., Bannikov A.A. [Placement of cathode parts in controlling a galvanic bath using a vector criterion], *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Bulletin of Astrakhan State Technical University. Series: Control, computing engineering and informatics], 2024, no. 1, pp. 18-25. doi: 10.24143/2072-9502-2024-1-18-25 (In Russ., abstract in Eng.)

3. Kadaner L.I. *Ravnomernost' gal'vanicheskikh pokrytiy* [Uniformity of galvanic coatings], Khar'kov: Izdatel'stvo Khar'k. GU, 1960, 414 p. (In Russ.)

4. Gnusin N.P., Poddubnyy N.P., Masliy A.I. *Osnovy teorii rascheta i modelirovaniya elektricheskikh poley v elektrolitakh* [Fundamentals of the Theory of Calculation and Modeling of Electric Fields in Electrolytes], Novosibirsk: Nauka, 1972, 276 p. (In Russ.)

5. Pukha A.P., Litovka Yu.V., Konkina V.V. [Algorithm for Controlling the Process of Applying Galvanic Coating with Movable Anode Sections], *Matematicheskiye metody v tekhnologiyakh i tekhnike* [Mathematical Methods in Technology and Engineering], 2024, no. 3, pp. 18-21. (In Russ., abstract in Eng.)

6. Proskurkin Ye.V., Popovich V.A., Moroz A.T. *Tsinkovaniye: spravochnik* [Zinc Plating: A Handbook], Moscow: Metallurgiya, 1988, 528 p. (In Russ.)

7. Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noy matematiki* [Methods of Computational Mathematics], Moscow: Nauka, 1989, 608 p. (In Russ.)

8. Pchelintseva I.Yu. [Distributed Information Processing System for Reducing the Unevenness of Galvanic Coatings], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 398-411. doi: 10.17277/vestnik.2022.03.pp.398-411 (In Russ., abstract in Eng.)

9. Litovka Yu.V., Kao V.Z. [Modeling and optimization of a galvanic bath with additional cathodes], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 68-74. doi: 10.17277/vestnik.2016.01.pp.068-074 (In Russ., abstract in Eng.)

10. Solov'yov D.S., Konkina V.V., Litovka Yu.V. [Formulation of the optimal control problem for the reversible mode of applying galvanic coating in a bath with many anodes], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 248-256. doi: 10.17277/vestnik.2015.02.pp.248-256 (In Russ., abstract in Eng.)

---

### **Validierung des mathematischen Modells des Galvanisierungsprozesses in dem Bad mit beweglichen Anodenabschnitten**

**Zusammenfassung:** Es ist ein mathematisches Modell zum Aufbringen der galvanischen Beschichtung in dem Bad mit Mosaikanode und zur Berechnung der Schichtdickenverteilung über die Oberfläche des Werkstücks vorgeschlagen. Die Merkmale (Komponenten, Parameter) des Experiments zum Aufbringen der Beschichtung auf ein komplex geformtes Werkstück sind erläutert. Der Algorithmus zur Berechnung der galvanischen Beschichtung mithilfe des mathematischen Modells ist beschrieben. Die experimentellen Ergebnisse sind mit den vom System berechneten Daten verglichen, die mithilfe des beschriebenen mathematischen Modells gewonnen worden sind.

---

### **Vérification de l'adéquation du modèle mathématique du processus de galvanoplastie dans un bain avec des sections mobiles d'anode**

**Résumé:** Est proposé un modèle mathématique du procédé de galvanoplastie dans un bain avec une anode en mosaïque et l'erreur de calcul de la répartition de l'épaisseur du revêtement sur la surface du produit. Sont considérées les caractéristiques (composants, paramètres) de l'expérience de revêtement sur une pièce de forme complexe. Est donnée une description de l'algorithme de calcul de galvanoplastie en utilisant un modèle mathématique. Sont comparés les résultats de l'expérience et les données calculées par le système obtenues à partir du modèle mathématique décrit.

---

**Авторы:** Пуха Анастасия Павловна – аспирант кафедры «Системы автоматизированной поддержки принятия решений»; Литовка Юрий Владимирович – доктор технических наук, профессор кафедры «Системы автоматизированной поддержки принятия решений», ФГБОУ ВО «ТГТУ», Тамбов, Россия.