УДК 531.3
DOI: 10.17277/vestnik.2024.02.pp.339-345

ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ ВНЕЗАПНО ПРИЛОЖЕННОЙ К НЕМУ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

Л. Г. Карыев[1], В. А. Федоров[2]

*Кафедры: профильной довузовской подготовки (1), karyev@list.ru;
теоретической и экспериментальной физики (2),
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина»,
Тамбов, Россия*

Ключевые слова: деформация; линейная плотность; перемещение; периодичность; сила; стержень; тригонометрический ряд; упругость; функция.

Аннотация: Проведено теоретическое исследование деформации упругого стержня, движущегося под действием внезапно приложенной продольной силы. Получена явная функция зависимости абсолютной деформации стержня от времени $\Delta l(t)$, не содержащая тригонометрических рядов; выявлен характер его деформации в процессе движения. Дана практическая рекомендация, основанная на результатах работы.

Введение

Современный этап развития науки и техники характеризуется быстрым совершенствованием технических параметров изделий, интенсификацией рабочих процессов, повышением надежности и ресурса машин и механизмов. Происходит быстрая смена конструкционных материалов, внедряются новые технологические процессы. Прогнозирование поведения материала в различных физических условиях – одна из главных задач материаловедения, сопротивления материалов и теории упругости.

В условиях внешних воздействий в механических системах и деталях механизмов может возникать установившееся стационарное напряженное состояние [1, 2]. В этом аспекте, например в работе [3], проведено теоретическое исследование поведения поперечных плоскостей в упругом стержне в условиях действия на него объемных сил – инерции и силы тяжести, получена функция $y(x)$ зависимости линейной плотности поперечных плоскостей стержня от координаты x.

Периодический характер работы большинства машин и механизмов предопределяет периодичность нагружения и деформирования, как отдельных их звеньев, так и тех конструкций, которые служат опорами или фундаментами. Механические колебания сопутствуют, практически, работе каждой машины. В одних случаях они вредны, в других – приносят пользу и целенаправленно применяются в современной технике. Большинство современных технических сооружений, приборов, инструментов, механизмов представляют собой сложные системы, в основе которых колебательные конструкции, скомпонованные из стержневых и тонкостенных элементов, изготовленные из материалов, которые в пределах достаточно малых деформаций могут рассматриваться как упругие. При различных воздействиях на данные конструкции, например удар или внезапное приложение силы, в них могут возникать свободные и вынужденные колебания различного характера [1, 2]. Знание частоты и характера колебаний деталей, являющихся элементами колебательных конструкций, является теоретической основой изготовления таких механизмов, которые будут надежны в эксплуатации и долговечны.

Цель работы – теоретическое исследование поведения упругого стержня, в условиях внезапно приложенной постоянной силы, направленной вдоль его оси, установление функциональной зависимости его абсолютной деформации в зависимости от времени $\Delta l(t)$ (не содержащей бесконечных сумм) и характера этой деформации в процессе движения стержня.

Результаты и обсуждение

Рассмотрим покоящийся стержень постоянного поперечного сечения цилиндрической формы, концы которого не закреплены. Материал стержня однородный и подчиняется закону Гука. Направим ось X по оси стержня. Пусть на правый торец стержня внезапно начинает действовать постоянная сила F, равномерно распределенная по поверхности торца стержня и направленная вдоль оси X (рис. 1).

Функция продольных перемещений поперечных плоскостей стержня $u(x,\ t)$ в данных условиях удовлетворяет дифференциальному уравнению [4, 5]

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2} + \frac{F\delta(x-l)}{\rho s},$$

при этом начальные условия

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

граничные условия

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0,$$

где ρ – плотность вещества стержня, кг/м^3; s – площадь поперечного сечения, м^2; l – длина недеформированного стержня, м; c – скорость звука в стержне, м/с; $t \geq 0$ – текущее от начала воздействия силы время, с; x – координата точки на оси стержня; $\delta(x-l)$ – дельта-функция.

Искомая функция $u(x,t)$ выражается тригонометрическим рядом [4, 5]

$$u(x,t) = \frac{Ft^2}{2\rho s l} + \frac{2Fl}{\rho s c^2 \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\left(1 - \cos\frac{mc\pi t}{l}\right). \quad (1)$$

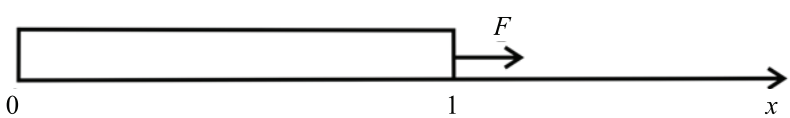

Рис. 1. Упругий стержень, движущийся в условиях внезапно приложенной силы, направленной вдоль его оси

Плоскость стержня с координатой $x=0$ (левый торец стержня) к моменту времени t будет иметь координату $u(0,t)$, правый торец стержня $(x=l)$ к моменту времени t переместится в точку с координатой $l+u(l,t)$. Очевидно,

$$u(l,t)-u(0,t)=\Delta l(t).$$

С учетом формулы (1),

$$\Delta l(t)=\chi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}(1-\cos\beta mt)(\cos m\pi-1),$$

где $\chi=\dfrac{2Fl}{\rho sc^2\pi^2}$, $\beta=\dfrac{c\pi}{l}$. Учитывая, что при $m=2,4,6,8,\ldots\ \cos m\pi=1$, получаем

$$2\chi\left[\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)-\left(\cos\beta t+\frac{\cos 3\beta t}{3^2}+\frac{\cos 5\beta t}{5^2}+\frac{\cos 7\beta t}{7^2}+\ldots\right)\right]=\Delta l(t).$$

В компактной форме

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\beta t}{(2n-1)^2}=\frac{\Delta l(t)}{2\chi}. \qquad (2)$$

Чтобы упростить приведенное выражение, рассмотрим суммы слева:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\beta t}{(2n-1)^2}=-\frac{\pi}{4}\beta t+\frac{\pi^2}{8},\qquad \beta t\in[0;\pi].$$

Сумма последнего ряда является 2π-периодической и четной функцией [6], следовательно, может быть представлена непрерывной функцией, состоящей из линейных функций по аргументу t на всей оси t так, что:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\beta t}{(2n-1)^2}=-\frac{\pi}{4}\beta t+\frac{\pi^2}{8},\ t\in\left[0;\frac{\pi}{\beta}\right];$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\beta t}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}\beta t-\frac{3\pi^2}{8},\ t\in\left[\frac{\pi}{\beta};\frac{2\pi}{\beta}\right];$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\beta t}{(2n-1)^2}=-\frac{\pi}{4}\beta t+\frac{5\pi^2}{8},\ t\in\left[\frac{2\pi}{\beta};\frac{3\pi}{\beta}\right];$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\beta t}{(2n-1)^2}=(-1)^k\frac{\pi}{4}\beta t+(-1)^{k+1}(2k-1)\frac{\pi^2}{8},\ t\in\left[\frac{(k-1)\pi}{\beta};\frac{k\pi}{\beta}\right],\ \text{где } k=1,2,3,\ldots.$$

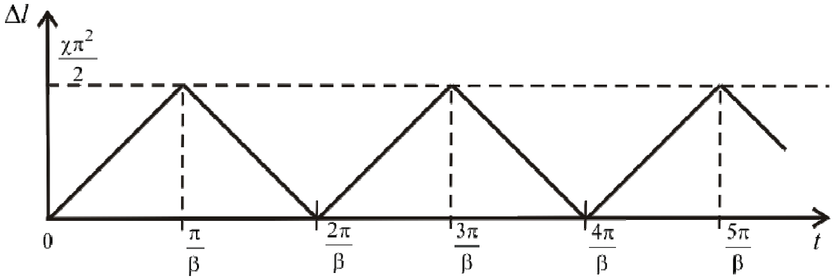

Рис. 2. График функции $\Delta l(t)$

По смыслу задачи рассматриваем $t \geq 0$. С учетом вышесказанного из уравнения (2) получаем

$$\Delta l(t) = (-1)^{k+1} \frac{\chi \pi \beta}{2} t + \frac{\chi \pi^2}{4} \left[1 + (-1)^{k+2} (2k-1)\right]. \qquad (3)$$

Графиком функции (3) является ломаная непрерывная кривая, состоящая из фрагментов линейных функций относительно времени t (рис. 2). Абсолютная деформация стержня изменяется по линейному закону.

Максимальное удлинение стержня (с учетом, что $c = \sqrt{E / \rho}$)

$$\Delta l_{\max} = \frac{\chi \pi^2}{2} = \frac{Fl}{sE},$$

где E – модуль Юнга материала стержня, Па.

Очевидно, период изменения длины стержня

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2l}{c},$$

частота

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{2l}.$$

Раскрывая введенные выше сокращенные обозначения в функции (3), получим

$$\Delta l(t) = (-1)^{k+1} \frac{Ft}{s\sqrt{\rho E}} + \frac{Fl}{2sE} \left[1 + (-1)^{k+2} (2k-1)\right]. \qquad (4)$$

То есть в процессе движения стержня в условиях действия на него внезапно приложенной постоянной силы F не произойдет установления некоторой постоянной абсолютной деформации стержня – длина стержня будет периодически линейно изменяться, а точное ее значение $l(t)$ можно вычислить по формуле

$$l(t) = l + \Delta l(t).$$

Например, для стали $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $c = 5000$ м/с, если длина стержня $l = 10$ м, диаметр 2 см (то есть площадь поперечного сечения $s = 3{,}14 \cdot 10^{-4}$ м^2), а сила, действующая на стержень $F = 4 \cdot 10^5$ Н, то $\Delta l_{\max} = 6{,}4 \cdot 10^{-2}$ м, $\nu = 250$ Гц. Максимальная относительная деформация при этом $\varepsilon_{\max} = \Delta l_{\max} / l = 6{,}4 \cdot 10^{-3}$ м. Тогда максимальное нормальное напряжение в стержне будет составлять $\sigma_{\max} = 1280$ МПа, что близко к пределу текучести легированных качественных сталей.

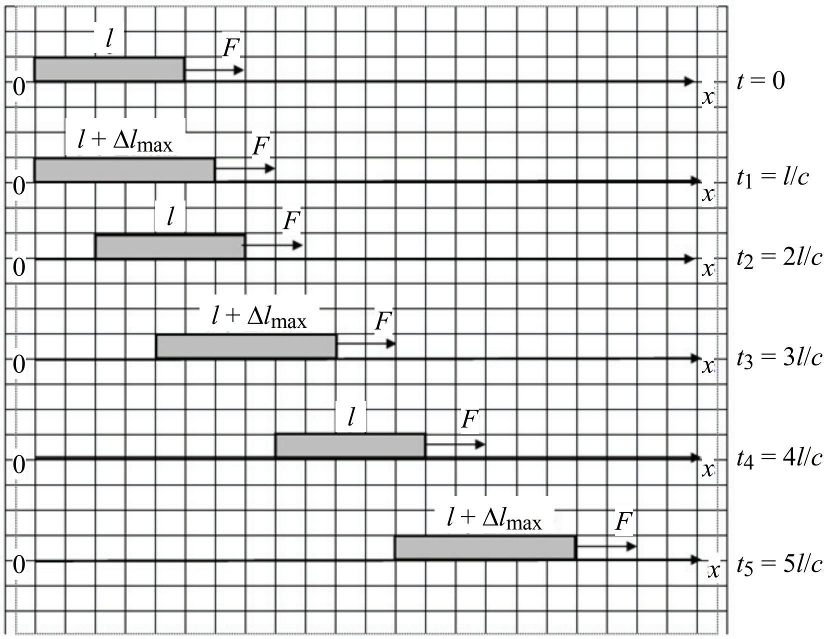

Рис. 3. Поступательное движение стержня и его относительная деформация в условиях действия на него внезапно приложенной постоянной силы
(справа указаны интервалы времени, в течение которых стержень перемещался; ▭ – Δl_{max} – масштабность)

На рисунке 3 показано движение стержня за интервалы времени, кратные l/c, в условиях внезапно приложенной к стержню продольной силы. При поступательном движении стержня его длина периодически изменяется на одинаковую величину Δl_{max}. В ходе поступательного движения стержень периодически растягивается и сжимается до исходной длины. Очевидно, когда стержень приобретает исходную длину, в процессе своего движения, внутренняя динамика стержня, обусловленная силой инерции в данный момент, эквивалентна его внутренней динамике, соответствующей интервалу времени l/c.

Заключение

Таким образом, упругий стержень, движущийся под действием продольной внезапно приложенной силы, деформируется так, что периодически удлиняется и затем укорачивается до исходного размера, при этом максимальная абсолютная деформация его сохраняется. Величина абсолютной деформации пропорциональна приложенной внешней силе. Получена функция, выражающая зависимость абсолютной деформации стержня от времени (4). Частота изменения длины стержня, в общем случае, лежит в интервале от инфразвуковой до ультразвуковой. Очевидно, периодически изменяющаяся длина стержня может негативно сказаться на работе различных машин и механизмов (при соответствующих условиях), при большой силе, действующей на стержень, может проявляться остаточная деформация в стержневых системах, и это необходимо учитывать. Важно отметить и следующее, если такая стержневая система попадет в зону действия внешней частоты звуковых колебаний, совпадающей с собственной частотой некоторых элементов данной системы, то последние могут разрушиться в результате резонанса.

Список литературы

1. Степин, П. А. Сопротивление материалов : учеб. для немашиностроит. спец. вузов / П. А. Степин. – 8-е изд. – М. : Высшая школа, 1988. – 367 с.

2. Пановко, Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я. Г. Пановко. – Изд. 3-е, доп. и переработ. – Л. : Машиностроение, 1976. – 320 с.

3. Karyev, L. G. On the Distribution of the Atomic Planes in an Elastic Single-Crystal Bar Under the Action of Volumetric Forces / L. G. Karyev, V. A. Fedorov, A. D. Berezner // Journal of Physics Conference Series. – 2021. – Vol. 2090, No. 1. – P. 012057. doi:10.1088/1742-6596/2090/1/012057

4. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1985. – 474 с.

5. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.

6. Натансон, И. П. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие для ВТУЗов / И. П. Натансон. – СПб. : Лань, 2001. – 736 с.

Deformation of an Elastic Rod under Conditions of a Sudden Longitudinal Force Application

L. G. Karyev[1], V. A. Fedorov [2]

Department of Profile Pre-University Training (1), karyev@list.ru;
Department of Theoretical and Experimental Physics (2);
Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russia

Keywords: deformation; linear density; moving; periodicity; force; kernel; trigonometric series; elasticity; function.

Abstract: A theoretical study of the deformation of an elastic rod moving under the action of a suddenly applied longitudinal force was carried out. An explicit function of the dependence of the absolute deformation of the rod on time $\Delta l(t)$, which does not contain trigonometric series, is obtained; the nature of its deformation during movement was revealed. A practical recommendation is given based on the research results.

References

1. Stepin P.A. *Soprotivleniye materialov: ucheb. dlya nemashinostroit. spets. vuzov* [Strength of materials: textbook. for non-mechanical engineers. specialist. universities], Moscow: Vysshaya shkola, 1988, 367 p. (In Russ.)

2. Panovko Ya.G. *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of the applied theory of vibrations and impact], Leningrad: Mashinostroyeniye, 1976, 320 p. (In Russ.)

3. Karyev L. G., Fedorov V.A., Berezner A.D. On the Distribution of the Atomic Planes in an Elastic Single-Crystal Bar Under the Action of Volumetric Forces, *Journal of Physics Conference Series*, 2021, vol. 2090, no. 1, pp. 012057. doi:10.1088/1742-6596/2090/1/012057

4. Timoshenko S. P., Yang D.Kh., Uiver U. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Fluctuations in engineering], Moscow: FIZMATLIT, 1985, 474 p. (In Russ.)

5. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics], Moscow: Vysshaya shkola, 1970, 712 p. (In Russ.)

6. Natanson I.P. *Kratkiy kurs vysshey matematiki : ucheb. posobiye dlya VTUZov* [Short course in higher mathematics: textbook. manual for technical colleges], St. Petersburg: Lan', 2001, 736 p. (In Russ)

Verformung eines elastischen Stabs unter den Bedingungen plötzlich auf ihn eingesetzter Längskraft

Zusammenfassung: Es ist eine theoretische Untersuchung der Verformung des elastischen Stabes durchgeführt, der sich unter der Einwirkung einer plötzlich aufgebrachten Längskraft bewegt. Eine explizite Funktion der Abhängigkeit der absoluten Verformung des Stabes von der Zeit $\Delta l(t)$, die keine trigonometrischen Reihen enthält, ist erhalten; der Charakter seiner Verformung im Laufe der Bewegung ist festgestellt. Auf der Grundlage der Ergebnisse der Arbeit ist eine praktische Empfehlung gegeben.

Déformation de la tige élastique sous une force longitudinale subitement appliquée à celle-ci

Résumé: Est réalisée une étude théorique de la déformation d'une tige élastique se déplaçant sous l'action d'une force longitudinale soudainement appliquée. Est obtenue une fonction explicite de la dépendance de la déformation absolue de la tige en fonction du temps, ne contenant pas de séries trigonométriques; est révélée la nature de sa déformation dans le processus de mouvement. Sont données les recommandations pratiques fondées sur les résultats.

Авторы: ***Карыев Леонид Геннадьевич*** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры профильной довузовской подготовки; ***Федоров Виктор Александрович*** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина», Тамбов, Россия.