УДК 517:621.316
DOI: 10.17277/vestnik.2022.03.pp.412-427

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО НАЗНАЧЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ОБЪЕМНО-ПЛАНИРОВОЧНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВА

В. М. А. Абас[1], С. Я. Егоров[2]

Кафедра прикладной математики,
ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М. И. Платова» (1), Новочеркасск, Ростовская обл., Россия;
Кафедра «Компьютерно-интегрированные системы в машиностроении», egorovsy@yandex.ru; ФГБОУ ВО «ТГТУ» (2), Тамбов, Россия

Ключевые слова: ангарный цех; компоновка оборудования; критерии и методы оптимизации; метрические параметры; ограничения размещения; оптимизация; сетка колонн; топологические параметры; транспортные сети.

Аннотация: Рассмотрена задача оптимального размещения оборудования внутри помещений и определения оптимальных параметров транспортно-трубопроводных сетей. Приведены фиксированный набор позиций аппаратов и матрица расстояний на основе ортогональной метрики. Исследованы и реализованы на ЭВМ метод Монте-Карло, комбинаторные аналоги метода Гаусса–Зейделя, генетического алгоритма и соответствующие гибридные методы, а также известные методы получения начального размещения, а именно алгоритмы последовательного размещения и размещения по критерию связности для решения задачи квадратичного назначения при оптимальном размещении элементов оборудования в цехах предприятий. Проведена серия вычислительных экспериментов на основе процедуры мультистарта, которые показали удовлетворительные вычислительные качества предложенных вариантов методов, а также позволили выявить их достоинства и недостатки. Установлено, что наилучшими характеристиками обладают метод Гаусса–Зейделя и гибридные аналоги на его основе. Рассмотрена задача из области автоматизированного проектирования наиболее сложного и трудоемкого этапа проектирования многоассортиментных производств – определение рациональной компоновки производства. Решена актуальная прикладная задача оптимального размещения оборудования производства фенил-гамма-кислоты и фенил-и-кислоты как для однократных, так и многократных соединений аппаратов.

1. Введение. Постановка задачи

Компоновка или объемно-планировочное решение производства – операция конструкционного проектирования производства, в результате которой определяют состав производственных помещений, их размеры и рациональное взаимное расположение, а также выполняют в определенном масштабе чертежи поэтажных планов и разрезов. При этом решаются задачи выбора типа строительной конструкции; определения состава производственных помещений, их размеров и рационального взаимного расположения; размещения оборудования внутри помещений; трассировки внутрицеховых трубопроводов; выбора и размещения трубопроводной арматуры, определения оптимальных параметров транспортно-трубопроводных сетей.

При решении поставленной задачи применяются различные критерии и ограничения [1 – 17]. В результате расчета находятся координаты расположения отдельных элементов оборудования на сетке колонн (**СК**) и топологические характеристики их соединений. При конструктивно однотипных элементах позиции для их установки на СК фиксированы, расположены в узлах прямоугольной решетки и могут быть описаны следующей системой параметров: числом позиций n_x, n_y, n_z и шагами между ними h_x, h_y, h_z соответственно по ширине, длине и высоте СК. Критерием в большинстве случаев является критерий минимума взвешенной длины (**МСВД**) соединений.

Даны элементы $e_1, ..., e_n$, для каждой их пары заданы веса $r_{ij}(i, j = 1, ..., n)$, определяющие «степень связи» данных элементов и образующие матрицу соединений $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}_{i,j=1,...,n}$. Имеется набор позиций для размещения элементов $p_1, ..., p_m\ (m \ge n)$. Без ограничения общности будем полагать, что $m = n$. Определим расстояния $d_{ij}(i, j = 1, ..., n)$ между парами позиций, определяющие симметричную матрицу $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}_{i,j=1,...,n}$ с нулевой главной диагональю $d_{ii}(i = 1, ..., n)$. Для вычисления элементов матрицы **D** используется ортогональная метрика. Пример СК приведен на рис. 2. Длина соединений между элементами e_i и e_j оценивается величиной $L_{ij} = r_{ij} d_{p(i)p(j)}(i, j = 1, ..., n)$.

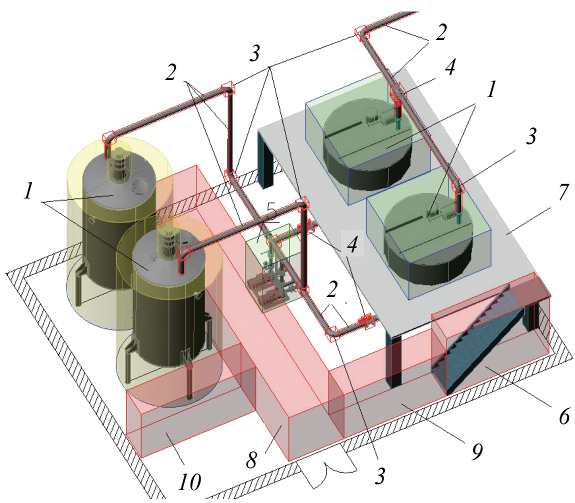


Рис. 1. Описание объектов фрагмента компоновки оборудования:
1 – аппараты; *2* – трубопроводы; *3* – соединительные детали трубопроводов; *4* – трубопроводная арматура; *5* – блок насосов; *6* – лестница; *7* – площадка обслуживания; *8*, *9* – проходы; *10* – зона обслуживания аппарата

Обозначим через E_s множество всех фиксированных элементов, включая элемент e_0, тогда суммарная взвешенная длина соединений элемента e_i с элементами из E_s оценивается по формуле

$$a_{ip(i)} = \sum_{s \in E_s} r_{is} d_{p(i)s} \ (i,\ j = 1, ..., n),$$

где $d_{p(i)s}$ – расстояние между элементом e_i, находящимся в позиции p_i, и элементом e_s.

С учетом симметричности матриц **R** и **D**, запишем выражение для суммарной взвешенной длины соединений при произвольном размещении

$$F(p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} d_{p(i)p(j)} + \sum_{i=1}^{n} a_{ip(i)}. \qquad (1)$$

Для ортогональной метрики задача размещения по критерию МСВД соединений состоит в минимизации функционала

$$F(p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \left(\left| x_i - x_j \right| + \left| y_i - y_j \right| \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{s \in E_s} r_{is} \left(\left| x_i - x_s^0 \right| + \left| y_i - y_s^0 \right| \right)$$

на множестве перестановок *P* соединений.

Данная задача является вариантом общей математической модели, получившей название задачи квадратичного назначения [1, 7 – 9].

Геометрическое ограничение – в одной ячейке размещается не более одного элемента, то есть

$$\min_{i,\, j = 1, ..., n} \max \left\{ \frac{\left| x_i - x_j \right|}{h_x}, \frac{\left| y_i - y_j \right|}{h_y} \right\} \geq 1; \quad \min_{i = 1, ..., n} \max \left\{ \frac{\left| x_i - x_s^0 \right|}{h_x}, \frac{\left| y_i - y_s^0 \right|}{h_y} \right\} \geq 1;$$

$$x_i = I_i h_x, \ \ y_i = J_i h_y, \ i = 1, \ldots, n; \quad I_i \in \{1, ..., n\}, \ J_i \in \{1, ..., n\}.$$

Универсальная аналитическая модель процесса размещения может быть разработана на основе обобщенной модели компоновки промышленных объектов [17] с учетом особенностей компоновки оборудования в ангарных цехах (фиксированный шаг сетки колонн). Основные ограничения модели учитывают (применяются обозначения из [17]):

– условие размещения оборудования внутри цеха:

$$\begin{cases} a_i/2 + \Delta x \leq x_i \leq x_c - a_i/2 - \Delta x; \\ b_i/2 + \Delta y \leq y_i \leq y_c - b_i/2 - \Delta y; \\ 0 \leq z_i \leq z_c - c_i - \Delta z, \ \forall i \in A^{18}; \end{cases} \qquad (2)$$

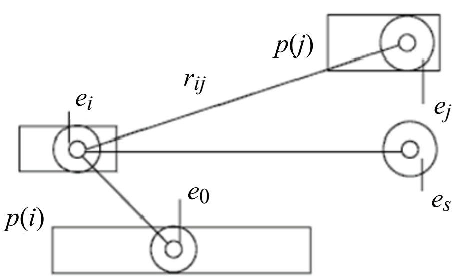


Рис. 2. Представление сетки колонн

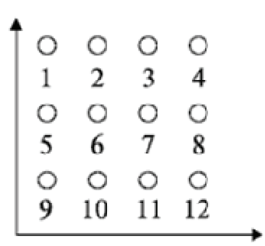


Рис. 3. Фиксированный набор из 12 позиций для планарной модели

– условие выполнения требования транспорта веществ самотеком

$$z_{f_{1l}} - H_{f_{1l}} \geq z_{f_{2l}} + C_{f_{2l}} - H_{f_{2l}}, \qquad \forall l : f_{4l} = 1; \tag{3}$$

– непересечение аппаратов друг с другом:

$$\left[(z_i = z_j) \wedge \left\{ \left(\left(x_i + \lambda_x \frac{a_i}{2} + \delta_x^i \right) - \left(x_j - \lambda_x \frac{a_i}{2} - \delta_x^j \right) \right) \lambda_x \langle\, 0, \vee \right.\right.$$

$$\left.\left. \vee \left(\left(y_i + \lambda_y \frac{b_i}{2} + \delta_y^i \right) - \left(y_i - \lambda_y \frac{b_i}{2} - \delta_y^i \right) \right) \lambda_y < 0 \right\} \vee [z_i \neq z_j] \right], \tag{4}$$

$\forall i, j \in A^{20}$; $\lambda_x = \operatorname{sign}(x_j - x_i)$; $\lambda_y = \operatorname{sign}(y_j - y_i)$;

– непересечение аппаратов со строительными колоннами

$$\left\{ \left(x_i - a_i/2 \geq \left[\frac{x_i}{h_x} \right] h_x + \frac{\beta_x}{2} \right) \wedge \left(x_i + a_i/2 \leq \left[\frac{x_i + h_x}{h_x} \right] h_x - \frac{\beta_x}{2} \right) \right\} \vee$$

$$\vee \left\{ \left(y_i - b_i/2 \geq \left[\frac{y_i}{h_y} \right] h_y + \frac{\beta_y}{2} \right) \wedge \left(y_i + b_i/2 \leq \left[\frac{y_i + h_y}{h_y} \right] h_y - \frac{\beta_y}{2} \right) \right\}. \tag{5}$$

$$\forall i \in A^{21};$$

– возможность размещения оборудования в отдельном блоке

$$\max_j \left(x_j + \frac{a_j}{2} \right) \leq x_i \vee x_i \leq \min_j \left(x_j - \frac{aj}{2} \right) \vee \max_j \left(y_j + \frac{b_j}{2} \right) \leq y_i \vee$$

$$\vee\, y_i \leq \min_j \left(y_j - \frac{bj}{2} \right) \vee \max_j \left(z_j + \frac{c_j}{2} \right) \leq z_i \vee z_i \leq \min_j (z_j), \ \forall j \in A^{22}, \ i \in A \setminus A^{22}; \tag{6}$$

– обеспечение зон для движения транспортных устройств:

$$z_i = z_j, \ \left[\frac{|x_i - x_j|}{h_x} \right] = 0; \ \ \left| \left[\frac{y_i}{h_y} \right] - \left[\frac{y_j}{h_y} \right] \right| \geq 2, \quad \forall i, j \in A^{23}; \tag{7}$$

– размещение оборудования в зонах с естественным освещением

$$(y_i \geq y_j, \forall j \in A \setminus A^{24}) \vee (y_i \leq y_j, \forall j \in A \setminus A^{24}), \ \forall i \in A^{24}; \tag{8}$$

– наличие зон, свободных от оборудования:

$$\left\{ (z_i = z_m) \wedge \left(|x_i - \tilde{x}_m| \geq \frac{a_i + a_m}{2} \vee |y_i - \tilde{y}_m| \geq \frac{b_i + \tilde{b}_m}{2} \right) \right\} \vee \{z_i \neq z_m\} \tag{9}$$

и ряда других ограничений: способа установки оборудования (на межэтажное перекрытие или с провисанием), наличия монтажных проемов и грузовых лифтов и т.д.

В качестве критерия задачи PO_M предложен следующий его вид:

$$S^1 = (SK_1^1 + SK_3^1 + SK_4^1 + SK_5^1) E_{\text{н}} + SE_3^1. \tag{10}$$

С учетом вышеизложенного, задача размещения оборудования в ангарном (одноэтажном) цехе формулируется так: найти такой вариант размещения технологического оборудования в ангарном цехе $A = A_i(x_i, y_i, z_i, \alpha_i)$, $\forall i = 1,\ 2, ..., I$ и габариты цеха $S_M = (X_{ц}, Y_{ц}, Z_{ц})$, при которых критерий (10) достигает минимума и выполняются условия модели (2) – (10).

2. Комбинаторные аналоги метода Гаусса–Зейделя в задаче размещения

Классический вариант

Решим задачу целочисленной оптимизации с целевой функцией $F(x)$, где x – вектор оптимизируемых параметров размещения, а именно перестановка без повторений номеров позиций n элементов. Координаты ячеек для размещения элементов можно вычислить через номер позиции. Подобный подход является экономичным по той причине, что автоматически учитываются геометрические ограничения. В классическом варианте метода Гаусса–Зейделя (покоординатного спуска) поочередно делаются шаги по каждой координате с целью поиска меньшего значения целевой функции. Здесь возможны варианты: можно искать для каждой координаты локальный минимум с той или иной точностью, например, можно ограничиться одним шагом в сторону уменьшения значения функции, а можно искать точное значение координаты локального минимума. Первый подход представляется прагматичным по ряду причин, прежде всего в силу упрощения алгоритма, особенно учитывая целочисленный характер аргументов.

При первом же шаге данной процедуры оптимизации, как правило, происходит выход за пределы допустимой области. В модифицированном комбинаторном варианте метода после такого шага перестановка корректируется: отыскивается аргумент, значение которого совпало с новым значением варьируемой координаты. Значение данного аргумента заменяется на исходное значение (до шага оптимизации) варьируемой координаты. В результате происходит возращение в пространство перестановок без повторений (повтор значений номеров позиций устраняется). Таким образом, в комбинаторном варианте метода покоординатного спуска на одном этапе вычислений меняются одновременно две координаты (а не одна, как в обычном варианте) – по одной из координат делается обычный пробный шаг, а по другой – корректировка, возврат в допустимую область. Далее вычисляется значение целевой функции в найденной точке и сравнивается с достигнутым ранее. Если произошло улучшение значения, то найденная точка становится новой стартовой. Иначе делается шаг по другой координате с одновременной корректировкой вектора номеров позиций элементов (возврат в допустимую область). Как правило, данный метод позволяет найти локальный минимум. Для нахождения глобального оптимума применяют метод так называемого мультистарта. Новая стартовая точка выбирается наиболее просто методом Монте-Карло равновероятно во всей допустимой области.

Рандомизированный комбинаторный аналог метода «быстрой переменной»

Классическая процедура метода Гаусса–Зейделя для рассматриваемой задачи может быть нерациональна по следующей причине. На каждом этапе вычислений осуществляется локальная оптимизация по каждой из n переменных функций цели, в то время как эти вычисления относительно дорогостоящи. Существует рандомизированный вариант метода Гаусса–Зейделя, где переменные, по которым осуществляется локальная оптимизация, выбираются случайно и равновероятно. Но в среднем трудоемкость вычислений здесь имеет аналогичный порядок.

Поэтому рассматриваемые варианты метода Гаусса–Зейделя в данном отношении проигрывают при больших n генетическому алгоритму, для которого требуется число вычислений целевой функции на каждом этапе порядка числа особей в одном поколении m. Аналогично обстоит дело в случае роевого метода, для которого на каждом этапе вычисляется N функций цели, равное размерности роя. Улучшение процедуры метода Гаусса–Зейделя достигается в его варианте, называемом методом быстрой переменной, которая выбирается из условия максимума модуля производных по координатам от функции цели. Однако это требует также n оценок производных. Благоприятным обстоятельством является то, что в задаче о квадратичном назначении быструю переменную можно найти по значениям матрицы связей. Таковые переменные соответствуют элементам, имеющим наибольшее количество связей. То есть оценочный критерий быстрой переменной есть величина, равная матричной норме для матрицы связей **R**, а именно $\max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$. Однако данный критерий является, как было отмечено, оценочным, по этой и другим причинам улучшение вычислительных качеств метода достигается за счет рандомизации. При этом выбор координат для локальной оптимизации осуществляется случайно, но вероятность выбора переменной прямо пропорциональна строчной сумме матрицы связей **R**, а именно $\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$, $i = 1,\ldots,n$, равной числу связей элемента с остальными элементами цепи.

3. Метод решения задачи размещения на основе генетического алгоритма и парных перестановок

Генетический алгоритм оптимизации является примером применения бионического подхода [10, 14]. Он заключается в следующем.

1. На первом шаге осуществляется задание начальной популяции с определенной численностью.

2. На втором шаге в соответствии с целевой функцией вычисляются коэффициенты выживаемости, их сумма равна единице. Иногда применяются относительные оценки погрешностей и другие критерии.

3. Осуществляется статистическая генерация заданного числа пар для размножения. Вероятность особи попасть в пару определяется коэффициентом выживаемости (значением функции ценности).

4. Проводится скрещивание отобранных пар. Векторы независимых переменных делятся на две части, которыми члены пары обмениваются. В результате потомки со смешанными векторами образуют новую популяцию.

5. Если характеристики потомства плохие, то рационально применение мутации, основанной на рандомизации.

6. Селекция потомства позволяет отобрать особи с наилучшими свойствами выживаемости.

7. Если требуется улучшить найденное решение, то осуществляется переход к шагу 2.

Согласно исследованиям, генетический алгоритм сходится заведомо не хуже метода Монте-Карло. Известны и другие алгоритмы стохастической оптимизации [11, 12].

Проведенное исследование показывает, что метод штрафных функций в задаче размещения и для случая генетического алгоритма является малоэффективным. Поэтому представляет интерес в качестве особей популяции рассматривать перестановки без повторений. Это обстоятельство учитывается на этапах селекции и мутации: на указанных этапах стандартные вычисления, согласно генетическому алгоритму, дополняются процедурой парных перестановок генов в хромосоме.

Приведем описание программы для реализации на ЭВМ рассматриваемого метода. Вначале осуществляется задание размерностей задачи и матрицы связей элементов r[i, j]. Далее при помощи заданного количества итераций методом Монте-Карло находится m различных перестановок без повторений из чисел $1, \ldots, n$ – начальное приближение к решению задачи, или первое поколение из m особей. На следующих этапах вычислений осуществляются итерации по методу генетического алгоритма с корректировкой согласно методу парных перестановок (благодаря этому функция штрафа всегда равна нулю, то есть не происходит выход за пределы допустимой области):

1) вычисляются коэффициенты выживаемости для каждой особи и соответствующие вероятности участия в скрещивании;

2) разыгрываются методом Монте-Карло номера m пар особей для скрещивания; вероятности участия в скрещивании пропорциональны коэффициенту выживаемости особи;

3) в результате процедуры скрещивания находятся $2m$ особей – детей. Скрещивание осуществляется согласно следующему правилу. Первый потомок состоит из головной части хромосомы второго родителя длиной в k элементов. Остальные $(n - k)$-генов образуют хвост хромосомы первого потомка и берутся от первого родителя. Второй потомок получается аналогичным образом, но с зеркальной симметрией: он состоит из головной части хромосомы первого родителя длиной в k генов. Остальные $(n - k)$-генов образуют хвост хромосомы второго потомка и берутся от второго родителя;

4) полученные в п. 3 обычной процедурой скрещивания хромосомы $2m$ потомков модифицируются в соответствии с правилами метода парных перестановок, чтобы вернуть соответствующие целочисленные наборы чисел в допустимое множество перестановок без повторений из первых n натуральных чисел. При этом рассматриваются поочередно k первых генов потомка, для каждого отыскивается совпадающий с ним ген его хромосомы. Для исключения дублирования генов вместо найденной копии гена головной части подставляется соответствующий ген из головной части хромосомы его родителя. Данная модификация хромосом является, по сути, своеобразной мутацией потомков, полученных в п. 3.

4. Тестовые примеры вычислений

Генетический алгоритм

Матрица соединений разреженная и задана в виде $r_{ij} = 1, |i - j| = 1;$ $r_{ij} = 0, |i - j| \neq 1; \ i, j = 1, \ldots, n$. Шаг ячейки, число шагов по координатам, общее число ячеек и элементов, число особей в одной популяции – соответственно $h = 1$; $n_0 = 6$; $n = 36$; $m = 5$. Каждые два этапа вычислений осуществлялась мутация, наихудший член популяции заменялся на случайный. Начальное размещение показано на рис. 4 ($x_i = i$, $i = 1, \ldots, n$). Соответствующее значение целевой функции $f_{\min} = 120$, при точном $f_{\inf} = 70$.

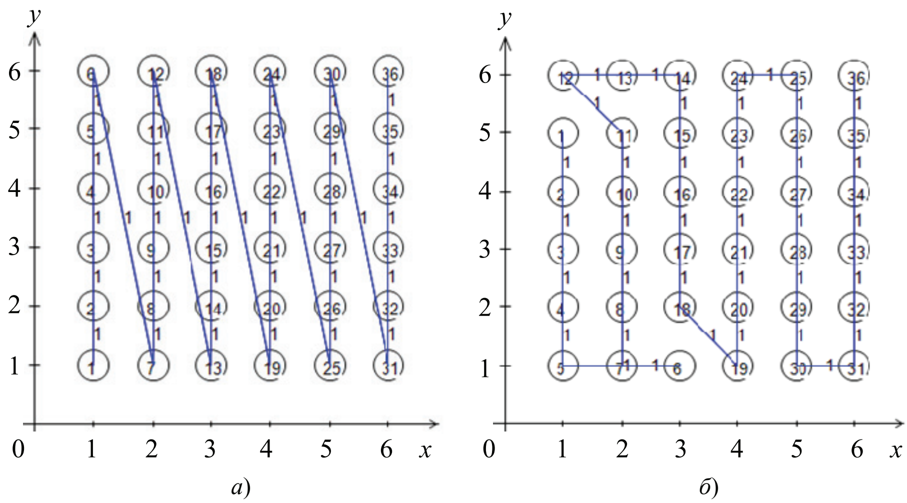


Рис. 4. **Метод генетического алгоритма:**
а – начальное размещение; *б* – локально оптимальное размещение после 28 790 итераций

Наилучшее приближенное решение после 28 790 итераций $f_{\min} = 76$ (не было улучшено и после 100 000 итераций) (см. рис. 4).

Гибридный метод

«Генетический алгоритм + комбинаторный аналог метода Гаусса–Зейделя». Начальное условие то же, что и в предыдущем пункте (см. рис. 4). Глобальный оптимум достигнут после 59 итерации.

5. Задача оптимального размещения оборудования производства фенил-гамма-кислоты и фенил-и-кислоты

Данная задача – одна из актуальных прикладных задач и решается при следующих допущениях:

1) рассматривается цех, построенный из типовых строительных элементов с шагом сетки колонн кратным 0…6 м (например, 6 м);

2) считается, что в каждой строительной клетке можно поставить только один аппарат (в центре);

3) критерий оптимизации – суммарная длина соединений;

4) габариты цеха тоже фиксированы (например, 6×6 м).

Исходные данные:

а) таблица оборудования (табл. 1).

б) таблица соединений оборудования трубопроводами (табл. 2).

Требуется найти такое расположение объектов на сетке, чтобы критерий (длина соединений) был наименьшим.

Таблица 1

Оборудование производства фенил-гамма-кислоты и фенил-и-кислоты

Номер аппарата	Обозначение на схеме	Название	Размер
1	2	3	4
1	0-108	Парогенератор	5
2	304	Мерник	10

Окончание табл. 1

1	2	3	4
3	301а	Аппарат	25
4	301б		25
5	306а		18
6	306б		
7	311	Фильтр-пресс	10
8	319а	Теплообменник	18
9	319б		
10	0-3	Емкость	16
11	305	Мерник	10
12	0-74	Аппарат	25
13	3м-3а	Бункер	6
14	3м-3б		
15	0-27	Ловушка	6
16	309	Сборник	10
17	0-63	Ловушка	6

Таблица 2

Журнал связей

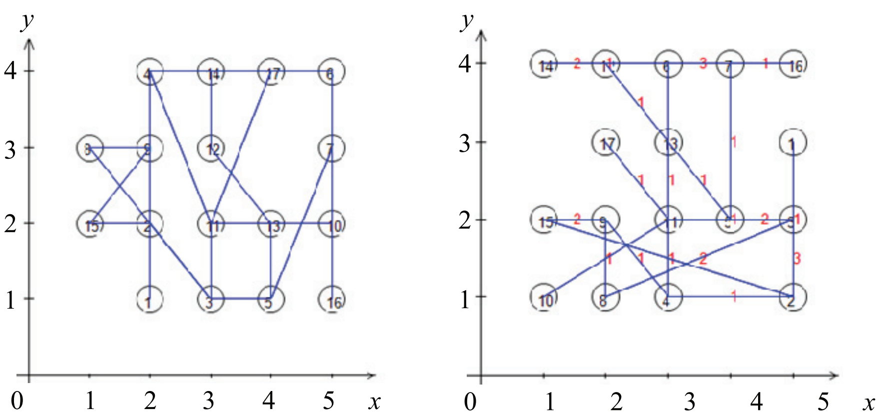
Номер связи	Аппарат-источник	Аппарат-приемник	Стоимость единицы длины
1	1	2	
2	2	15	
3	2	3	
4	2	4	
5	3	8	
6	4	9	
7	3	5	
8	4	6	
9	5	7	
10	6	7	
11	7	16	1
12	8	9	
13	9	15	
14	10	11	
15	11	3	
16	11	4	
17	11	17	
18	12	13	
19	12	14	
20	13	5	
21	14	6	

Результаты вычислений для случая однократных связей

Всего в цехе имеется 17 аппаратов. Для заполнения поля СК добавляем три фиктивных элемента, без всяких связей и не влияющих поэтому на значение критерия. Суммарное число элементов после этого равно 20, габариты цеха – 6×6 м. Число связей между аппаратами – не более 1.

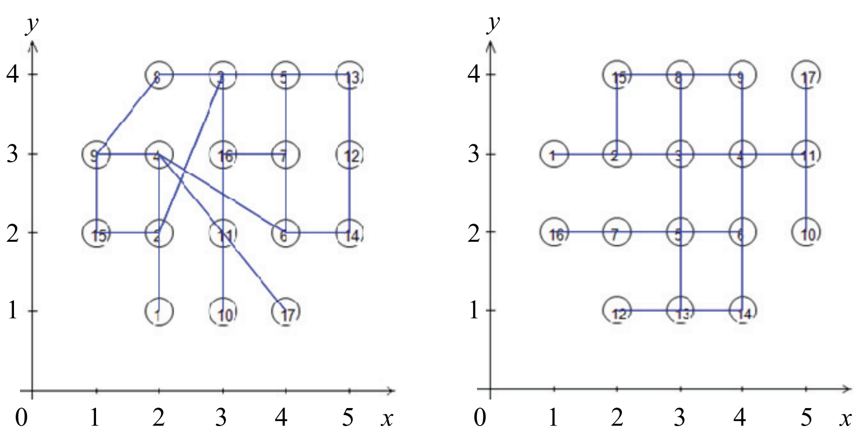
При вычислениях методом Монте-Карло после 500 000 итераций значение критерия оказалось равным $f_{\text{inf}} = 78$ (рис. 5, *а*).

Для сравнения применены три известных метода получения начального размещения [1], а именно алгоритмы последовательного размещения и размещения по критерию связности, которые дали следующие результаты: $f_{\text{inf}}^1 = 82$, $f_{\text{inf}}^2 = 82$, $f_{\text{inf}}^3 = 76$. Комбинаторный аналог метода Гаусса–Зейделя существенно эффективнее. Наилучшие достигнутые значения локальных минимумов в зависимости от числа итераций (в различных сериях вычислений): $f_{\text{inf}}(50) = 58$, $f_{\text{inf}}(100) = 52$, $f_{\text{inf}}(500) = 56$, $f_{\text{inf}}(1500) = 50$, $f_{\text{inf}}(5000) = 50$. Соответствующие размещения представлены на рис. 6.



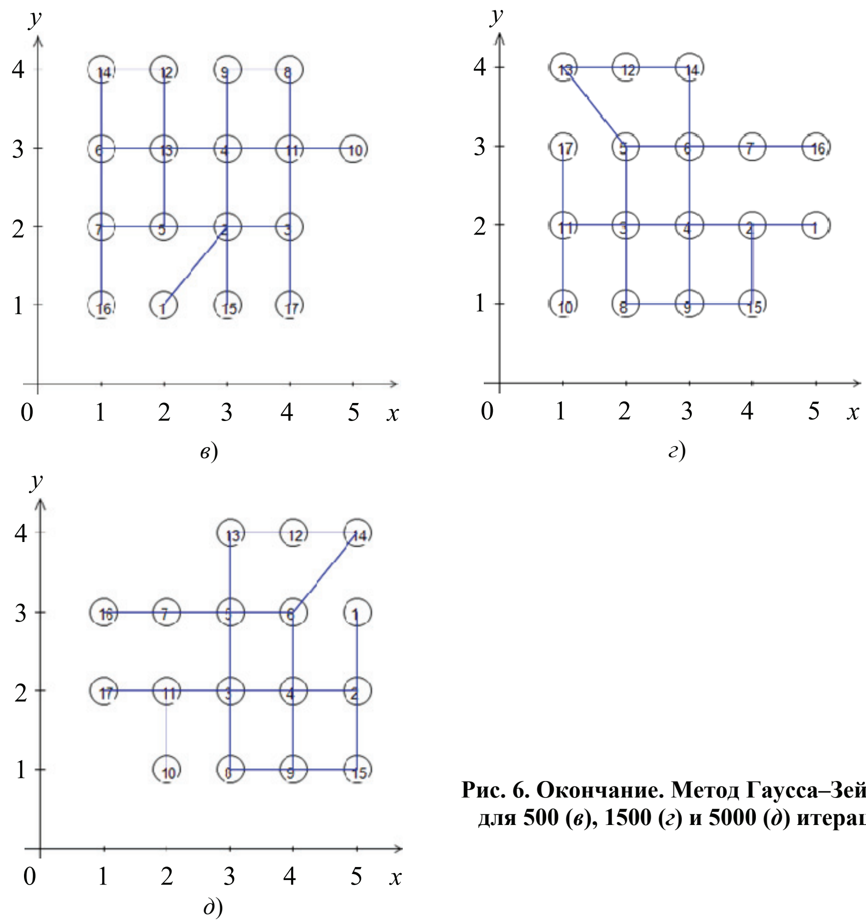
а) *б*)

Рис. 5. Размещение оборудования методом Монте-Карло после 500 000 итераций:
а, *б* – соответственно однократные и многократные связи



а) *б*)

Рис. 6. Метод Гаусса–Зейделя для 50 (*а*), 100 (*б*) итераций (начало)



в) *г*) *д*)

Рис. 6. Окончание. Метод Гаусса–Зейделя для 500 (*в*), 1500 (*г*) и 5000 (*д*) итераций

Результаты вычислений для случая многократных связей

По сравнению с предыдущей задачей количество связей меняется в пределах 1…3. Массив матрицы связей **R**:
r[1, 2] = 3; r[2, 15] = 1; r[2, 3] = 2; r[2, 4] = 1; r[3, 8] = 1; r[4, 9] = 1; r[3, 5] = 2; r[4, 6] = 1; r[5, 7] = 3; r[6, 7] = 1; r[7, 16] = 3; r[8, 9] = 1; r[9, 15] = 2; r[10, 11] = 2; r[11, 3] = 1; r[11, 4] = 3; r[11, 17] = 1; r[12, 13] = 1; r[12, 14] = 2; r[13, 5] = 1; r[14, 6] = 1; r[2, 1] = 1; r[15, 2] = 1; r[3, 2] = 3; r[4, 2] = 1; r[8, 3] = 2; r[9, 4] = 1; r[5, 3] = 2; r[6, 4] = 1; r[7, 5] = 1; r[7, 6] = 3; r[16, 7] = 1; r[9, 8] = 1; r[15, 9] = 2; r[11, 10] = 1; r[3, 11] = 1; r[4, 11] = 2; r[17, 11] = 1; r[13, 12] = 1; r[14, 12] = 2; r[5, 13] = 1; r[6, 14] = 1.

При вычислениях методом Монте-Карло после 500 000 итераций значение критерия равно $f_{\text{inf}} = 113$. Соответствующее размещение показано на рис. 5, *б*.

Для сравнения применены три известных метода получения начального размещения [1], а именно алгоритмы последовательного размещения и размещения по критерию связности, которые дали следующие результаты: $f^1_{\text{inf}} = 129$, $f^2_{\text{inf}} = 140$, $f^3_{\text{inf}} = 111$. Комбинаторный аналог метода Гаусса–Зейделя существенно эффективнее. Наилучшие достигнутые значения локальных минимумов в зависимости от числа итераций (в различных сериях вычислений): $f_{\text{inf}}(50) = 86$, $f_{\text{inf}}(500) = 78$, $f_{\text{inf}}(1500) = 74$. Соответствующие размещения представлены на рис. 7.

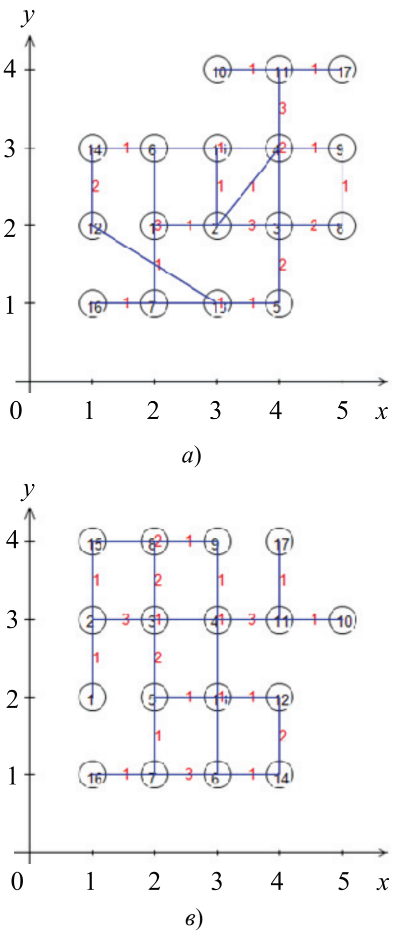


Рис. 7. Метод Гаусса–Зейделя
для 50 (*а*), 500 (*б*) и 1500 (*в*) итераций

Выводы

Исследованы и реализованы на ЭВМ метод Монте-Карло, комбинаторные аналоги метода Гаусса–Зейделя, генетического алгоритма и соответствующие гибридные методы, а также известные методы получения начального размещения, а именно алгоритмы последовательного размещения и размещения по критерию связности для решения задачи квадратичного назначения при оптимальном размещении элементов оборудования в цехах предприятий. Проведена серия вычислительных экспериментов на основе процедуры мультистарта, которые показали удовлетворительные вычислительные качества предложенных вариантов методов, а также позволили выявить их достоинства и недостатки. Наилучшими характеристиками обладают метод Гаусса–Зейделя и гибридные аналоги на его основе. Решена актуальная прикладная задача оптимального размещения оборудования производства фенил-гамма-кислоты и фенил-и-кислоты как для однократных, так и многократных соединений аппаратов.

Список литературы

1. Алгоритмы размещения элементов. – Текст : электронный. – URL : https://helpiks.org/8-12562.html (дата обращения: 21.04.2021).

2. Silva, A. Quadratic Assignment Problem Variants: A Survey and an Effective Parallel Memetic Iterated Tabu Search / A. Silva, L. C. Coelho, M. Darvish // European Journal of Operational Research. – 2021. – Vol. 292, No. 3. – P. 1066 – 1084. doi: 10.1016/j.ejor.2020.11.035

3. Николов, Н. П. Размещение элементов электронных узлов методом многоуровневой декомпозиции и макромоделирования и реализация на его основе ППП для САПР РЭА : дис. … канд. техн. наук : 05.13.12 / Николов Николай Пенчев. – Львов, 1985. – 194 с.

4. Горбачев, А. А. Методы и алгоритмы пространственной трассировки печатных плат : дис. … канд. техн. наук : 05.13.12 / Горбачев Андрей Александрович. – Калининград, 1999. – 184 с.

5. Селютин, В. А. Автоматизированное проектирование топологии БИС / В. А. Селютин. – М. : Радио и связь, 1983. – 113 с.

6. Морозов, К. К. Автоматизированное проектирование конструкций радиоэлектронной аппаратуры / К. К. Морозов, В. Г. Одиноков, В. М. Курейчик. – М. : Радио и связь, 1983. – 280 с.

7. Мартюшев, А. В. Метод плетей и границ в квадратичной задаче о назначениях : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.09 / Мартюшев Алексей Владимирович. – СПб., 2005. – 100 с.

8. Палубецкис, Г. С. Генератор тестовых задач квадратичного назначения с известным оптимальным решением / Г. С. Палубецкис // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1988. – № 11. – С. 1740 – 1743.

9. Леушкин, А. Д. Квадратичная задача о назначении. Обзор методов, генерация тестовых задач с априорно известным оптимумом / А. Д. Леушкин, Е. А. Неймарк // Труды НГТУ им. Р. Е. Алексеева. – 2020. – № 4 (131). – С. 26 – 34. doi: 10.46960/1816-210X_2020_4_26

10. Старостин, Н. В. Многоуровневый алгоритм решения задачи архитектурно-зависимой декомпозиции : учеб.-метод. пособие / Н. В. Старостин, Н. В. Быкова. – Н. Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2017. – 24 с.

11. Рашковский, С. А. Решение задач комбинаторной оптимизации методом Монте-Карло / С. А. Рашковский // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 471, № 4. – С. 403 – 407. doi: 10.7868/S0869565216340065

12. Rashkovskiy, S. A. Monte Carlo Solution of Combinatorial Optimization Problems / S. A. Rashkovskiy // Doklady Mathematics. – 2016. – Vol. 94, No. 3. – P. 720 – 724. doi: 10.1134/S106456241606020X

13. Дарховский, Б. С. Метод пакетных итераций Монте-Карло для решения задач глобальной оптимизации / Б. С. Дарховский, А. Ю. Попков, Ю. С. Попков // Информ. технологии и вычислительные системы. – 2014. – № 3. – С. 39 – 52.

14. Кулаков, А. А. Разработка и исследование алгоритмов оптимального размещения компонентов СБИС трехмерной интеграции : дис. … канд. техн. наук : 05.13.12 / Кулаков Андрей Анатольевич. – Таганрог, 2016. – 164 с.

15. Алгоритм роя частиц. Описание и реализации на языках Python и C#. Канонический алгоритм. – Текст : электронный. – URL : https://jenyay.net/Programming/ParticleSwarm (дата обращения: 21.04.2021).

16. Метаоптимизация роя частиц на основе метода дробного исчисления / И. Г. Дутова, В. А. Мохов, А. В. Кузнецова, В. А. Есаулов // Соврем. проблемы науки и образования. – 2015. – № 2-1. – С. 11 – 13.

17. Автоматизированная информационная система поддержки принятия проектных решений по компоновке промышленных объектов. Часть 1. Аналитические и процедурные модели / С. Я. Егоров, В. Г. Мокрозуб, В. А. Немтинов, И. В. Милованов // Информационные технологии в проектировании и производстве. – 2009. – № 4. – С. 3 – 11.

Numerical Methods and Algorithms to Solve the Problem of Quadratic Assignment and Their Application in Space-Planning Industrial Design

V. M. A. Abas[1], S. Ya. Egorov[2]

Department of Applied Mathematics, Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI) (1), Novocherkassk, Rostov region, Russia; Department of Computer-Integrated Systems in Mechanical Engineering, egorovsy@yandex.ru; TSTU (2), Tambov, Russia

Keywords: hangar shop; equipment layout; criteria and optimization methods; metric parameters; placement restrictions; optimization; grid of columns; topological parameters; transport networks.

Abstract: The problem of optimal placement of equipment indoors and the determination of the optimal parameters of transport-pipe-wire networks is considered. A fixed set of apparatus positions and a distance matrix based on an orthogonal metric are given. The Monte Carlo method, combinatorial analogs of the Gauss–Seidel method, the genetic algorithm and the corresponding hybrid methods, as well as known methods for obtaining the initial placement, namely, algorithms for sequential placement and placement according to the connectivity criterion for solving the problem of quadratic assignment with the optimal placement of equipment elements in the shops of enterprises, have been studied and implemented on a computer. A series of computational experiments based on the multistart procedure was carried out; it showed satisfactory computational qualities of the proposed variants of the methods, and also made it possible to identify their advantages and disadvantages. It has been established that the Gauss–Seidel method and hybrid analogues based on it have the best characteristics. The problem from the field of computer-aided design of the most complex and time-consuming stage of designing multi-assortment productions is considered - determining the rational layout of production. The actual applied problem of optimal placement of equipment for the production of phenyl-gamma-acid and phenyl-n-acid for both single and multiple connections of apparatuses has been solved.

References

1. https://helpiks.org/8-12562.html (accessed 21 April 2022).

2. Silva A., Coelho L.C., Darvish M. Quadratic Assignment Problem Variants: A Survey and an Effective Parallel Memetic Iterated Tabu Search, *European Journal of Operational Research*, 2021, vol. 292, no. 3, pp. 1066-1084, doi: 10.1016/j.ejor.2020.11.035

3. Nikolov N.P. *PhD Dissertation* (*Technical*), Lvov, 1985, 194 p. (In Russ.)

4. Gorbachev A.A. *PhD Dissertation* (*Technical*), Kaliningrad, 1999, 184 p. (In Russ.)

5. Selyutin V.A. *Avtomatizirovannoye proyektirovaniye topologii BIS* [Computer-aided design of LSI topology], Moscow: Radio i svyaz', 1983, 113 p. (In Russ.)

6. Morozov K.K., Odinokov V.G., Kureychik V.M. *Avtomatizirovannoye proyektirovaniye konstruktsiy radioelektronnoy apparatury* [Computer-aided design of structures for radio-electronic equipment], Moscow: Radio i svyaz', 1983, 280 p. (In Russ.)

7. Martyushev A.V. *PhD Dissertation* (*Physical and Mathematical*), St. Petersburg, 2005, 100 p. (In Russ.)

8. Palubetskis G.S. [Generator of quadratic assignment test problems with known optimal solution], *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1988, no. 11, pp. 1740-1743. (In Russ.)

9. Leushkin A.D., Neymark Ye.A. [Quadratic Assignment Problem. Review of methods, generation of test problems with a priori known optimum], *Trudy NGTU im. R. Ye. Alekseyeva* [Proceedings of NNSTU im. R. E. Alekseeva], 2020, no. 4 (131), pp. 26-34, doi: 10.46960/1816-210X_2020_4_26 (In Russ., abstract in Eng.)

10. Starostin N.V., Bykova N.V. *Mnogourovnevyy algoritm resheniya zadachi arkhitekturno-zavisimoy dekompozitsii: uchebno-metodicheskoye posobiye* [Multilevel algorithm for solving the problem of architecture-dependent decomposition: teaching aid], Nizhniy Novgorod: Nizhegorodskiy gosuniversitet, 2017, 24 p. (In Russ.)

11. Rashkovskiy S.A. [Solving combinatorial optimization problems by the Monte Carlo method], *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2016, vol. 471, no. 4, pp. 403-407, doi: 10.7868/S0869565216340065 (In Russ.)

12. Rashkovskiy S.A. Monte Carlo Solution of Combinatorial Optimization Problems, *Doklady Mathematics*, 2016, vol. 94, no. 3, pp. 720-724, doi: 10.1134/S106456241606020X

13. Darkhovskiy B.S., Popkov A.Yu., Popkov Yu.S. [The Monte Carlo batch iteration method for solving global optimization problems], *Informatsionnyye tekhnologii i vychislitel'nyye sistemy* [Information Technologies and Computing Systems], 2014, no. 3, pp. 39-52. (In Russ.)

14. Kulakov A.A. *PhD Dissertation* (*Technical*), Taganrog, 2016, 164 p. (In Russ.)

15. https://jenyay.net/Programming/ParticleSwarm (accessed 21 April 2022).

16. Dutova I.G., Mokhov V.A., Kuznetsova A.V., Yesaulov V.A. [Meta-optimization of a swarm of particles based on the method of fractional calculus], *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya* [Modern problems of science and education], 2015, no. 2-1, pp. 11-13. (In Russ., abstract in Eng.)

17. Yegorov S.Ya., Mokrozub V.G., Nemtinov V.A., Milovanov I.V. [Automated information system for supporting the adoption of design decisions on the layout of industrial facilities. Part 1. Analytical and procedural models], *Informatsionnyye tekhnologii v proyektirovanii i proizvodstve* [Information technologies in design and production], 2009, no. 4, pp. 3-11. (In Russ., abstract in Eng.)

Numerische Methoden und Algorithmen zur Lösung der Aufgabe der quadratischen Bestimmung und ihre Anwendung bei der Volumenplanung der Produktion

Zusammenfassung: Es ist das Problem der optimalen Platzierung von Geräten in Innenräumen und die Bestimmung der optimalen Parameter von Transport-Rohrleitungsnetzen betrachtet. Ein fester Satz von Fahrzeugpositionen und eine Abstandsmatrix basierend auf einer orthogonalen Metrik sind gegeben. Das Monte-Carlo-Verfahren, kombinatorische Analoga des Gauss-Seidel-Verfahrens, der genetische Algorithmus und die entsprechenden Hybridverfahren sowie bekannte Verfahren zum Erhalten der anfänglichen Platzierung, nämlich Algorithmen zur sequentiellen Platzierung und Platzierung nach dem Verbindungskriterium zur Lösung des Problems der quadratischen Zuordnung mit optimaler Platzierung, sind am Computer untersucht, und Ausstattungselemente sind in Werkstätten von Unternehmen implementiert. Es ist eine Reihe von rechnerischen Experimenten auf Basis des Multistart-Verfahrens durchgeführt, die zufriedenstellende rechnerische Qualitäten der vorgeschlagenen Verfahrensvarianten zeigten und es auch ermöglichten, ihre Vor- und

Nachteile zu identifizieren. Es ist festgestellt, dass die Gauß-Seidel-Methode und darauf basierende Hybridanaloga die besten Eigenschaften aufweisen. Es ist das Problem aus dem Bereich des computergestützten Designs des komplexesten und zeitaufwändigsten Schrittes bei der Gestaltung von Mehrsortimentsproduktionen betrachtet - die Bestimmung des rationellen Layouts der Produktion. Das aktuell angewandte Problem der optimalen Platzierung von Anlagen zur Herstellung von Phenyl-Gamma-Säure und Phenyl-N-Säure sowohl für Einzel- als auch für Mehrfachverbindungen von Apparaten ist gelöst.

Méthodes numériques et algorithmes de la résolution du problème de la destination quadratique et leur application lors de la planification de la conception volumétrique de la production

Résumé: Est examiné le problème du placement optimal de l'équipement à l'intérieur des locaux et de la détermination des paramètres optimaux des réseaux de transport et de pipelines. Sont donnés l'ensemble fixe des positions de l'appareils et une matrice des distances basée sur une métrique orthogonale. Sont étudiés et mis en œuvre sur ordinateur la méthode Monte-Carlo, les analogues combinatoires de la méthode Gauss-Seidel, l'algorithme génétique et les méthodes hybrides correspondantes ainsi que les méthodes connues pour obtenir le placement initial, à savoir les algorythmes de placement séquentiel et de placement selon le critère de connectivité pour résoudre le problème de la destination quadratique avec le placement optimal des éléments de l'équipement dans les ateliers des entreprises. Est réalisée une série d'expériences de calcul à la base de la procédure multistart, qui ont montré les qualités de calcul satisfaisantes des variantes de méthodes proposées, ainsi que leurs avantages et leurs inconvénients. Est établi que les meilleures caractéristiques donnent la méthode de Gauss–Seidel et les analogues hybrides. Est examinée la tâche du domaine de la conception assistée par ordinateur de l'étape la plus complexe et la plus laborieuse de la conception des productions multigammes, celle de la détermination de la disposition rationnelle de la production. Est résolu le problème d'application actuel de l'emplacement optimal de l'équipement pour les composés simples et multiples des appareils.

Авторы: ***Абас Висам Махди Абас*** – аспирант кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М. И. Платова», Новочеркасск, Ростовская обл., Россия; ***Егоров Сергей Яковлевич*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Компьютерно-интегрированные системы в машиностроении», ФГБОУ ВО «ТГТУ», Тамбов, Россия.