УДК 539.2

# ВЫВОД ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЗАРЯДА ИЗ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

**А.Н. Пчелинцев, В.А. Шишин**

*Кафедра физики, ТГТУ*

*Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым*

**Ключевые слова и фразы:** вектор плотности тока вероятности; волновая функция; закон сохранения заряда; уравнение непрерывности; уравнение Шредингера.

**Аннотация:** Рассматривается движение заряженной частицы в некотором потенциальном поле. Показано, как из уравнения Шредингера для волновой функции, описывающей такое движение, можно получить один из фундаментальных законов природы – закон сохранения заряда.

---

Закон сохранения электрического заряда известен уже более ста лет. Он базируется на экспериментальных данных и классической электродинамике. Авторы попытались получить его также из основного уравнения квантовой механики. В современной научной литературе не найдено такого вывода этого закона.

Пусть частица с массой $m$ и зарядом $e$ описывается волновой функцией $\Psi(x,y,z,t)$. Так как $|\Psi(x,y,z,t)|^2$ есть плотность вероятности встретить частицу с координатами $x$, $y$, $z$ в момент времени $t$, то произведение $e\,|\Psi(x,y,z,t)|^2$ можно истолковать как выражение для средней величины плотности заряда.

Установим теперь, как меняется плотность вероятности с течением времени. Для того чтобы это выяснить, воспользуемся общим уравнением Шредингера для одной частицы

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{1}$$

где $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(x,y,z,t)$, $\hat{H}$ – гамильтониан (квантовомеханический оператор); $U$ – потенциальная энергия частицы; $\nabla^2$ – оператор Лапласа; $i$ – мнимая единица.

Запишем теперь уравнение, комплексно-сопряженное с уравнением (1)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\overset{*}{\Psi} + U\overset{*}{\Psi} = -i\hbar\frac{\partial\overset{*}{\Psi}}{\partial t}. \tag{2}$$

Здесь через $\overset{*}{\Psi}$ обозначена величина, комплексно-сопряженная с $\Psi$.

Умножая (1) на $\overset{*}{\Psi}$, а (2) – на $\Psi$ и вычитая второй результат умножения из первого, найдем

$$i\hbar\left(\overset{*}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\Psi\frac{\partial\overset{*}{\Psi}}{\partial t}\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\overset{*}{\Psi}\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\overset{*}{\Psi}\right).$$

Это уравнение можно записать в иной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi\overset{*}{\Psi}\right)=\frac{i\hbar}{2m}\nabla\left(\overset{*}{\Psi}\nabla\Psi-\Psi\nabla\overset{*}{\Psi}\right). \qquad (3)$$

Правильность (3) проверяется непосредственным вычислением.

Выражение (3) перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi\right|^2=\mathrm{div}\left\{\frac{i\hbar}{2m}\left(\overset{*}{\Psi}\,\mathrm{grad}\Psi-\Psi\,\mathrm{grad}\,\overset{*}{\Psi}\right)\right\}.$$

Обозначив плотность вероятности $\left|\Psi\right|^2$ через ω, а выражение в фигурных скобках – через так называемый вектор плотности тока вероятности

$$\vec{j}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\mathrm{grad}\,\overset{*}{\Psi}-\overset{*}{\Psi}\,\mathrm{grad}\Psi\right),$$

составим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\mathrm{div}\,\vec{j}=0\,. \qquad (4)$$

Умножим теперь уравнение (4) на величину заряда частицы и проинтегрируем его по некоторому конечному объему $V$

$$\int_V e\,\mathrm{div}\,\vec{j}dV=-\frac{\partial}{\partial t}\int_V e\omega\,dV\;.$$

Интеграл в левой части полученного равенства по формуле Остроградского-Гаусса можно преобразовать в интеграл по замкнутой поверхности $S$, окружающей объем $V$, согласно тождеству

$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{j}dV=\oint_S j_n\,dS\;,$$

где $j_n$ – проекция вектора $\vec{j}$ на нормаль к элементу поверхности $dS$. Поэтому

$$\oint_S ej_n dS=-\frac{\partial}{\partial t}\int_V e\omega dV\,. \qquad (5)$$

Правая часть равенства (5) характеризует изменение величины среднего заряда в объеме $V$ за единицу времени. Так как величина заряда в объеме $V$ может изменяться только за счет его прохождения сквозь поверхность $S$, можно сказать, что левая часть равенства (5) описывает поток заряда сквозь поверхность $S$ за единицу времени.

Таким образом, мы получили равенство, выражающее закон сохранения заряда.

*Список литературы*

1. Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика (с задачами). – М: Наука, 1976. – 336 с.
2. Грашин А.Ф. Квантовая механика. – М: Просвещение, 1974. – 207 с.

## Derivation of Charge Conservation Law from Schrödinger Equation

**A.N. Pchelintsev, V.A. Shishin**

*Department of Physics, TSTU*

**Key words and phrases:** density vector of probability current; wave function; charge conservation law; continuity equation; Schrödinger equation.

**Abstract:** Movement of charged particle in some potential field is considered. It is shown how to derive one of fundamental nature laws – charge conservation law – from Schrödinger equation for wave function.

---

## Aufstellung des Gesetzes der Erhaltung der Ladung aus der Schrödinger-Gleichung

**Zusammenfassung:** Es wird die Bewegung des geladenen Teilchen in einem gewissenen Potentialfeld betrachtet. Es ist gezeigt, wie eines der Fundamentalgesetze der Natur – das Gesetz der Erhaltung der Ladung – aus der Schrödinger-Gleichung für die Wellenfunktion, die solche Bewegung beschreibt, erhalten werden kann.

---

## Déduction de la loi de la conservation de la charge à partir de l'équation de Schrödinger

**Résumé:** On examine le mouvement de la particule chargée dans un champ potentiel. On montre qu'à partir de l'équation de Schrödinger pour une fonction d'onde on peut établir une des lois fondamentales de la nature, celle de la conservation de la charge.

---