

## СОБИРАЮЩЕЕ И РАССЕИВАЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЯ ЗЕРКАЛ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Н.Я. Молотков<sup>1</sup>, О.В. Ломакина<sup>1</sup>, В.В. Шальнев<sup>2</sup>

Кафедры: «Теоретическая механика» (1),  
«Физика» (2), ТГТУ

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

**Ключевые слова и фразы:** дифракция; зеркало; фазовая субзонная пластинка; фокусировка; электромагнитные волны.

**Аннотация:** На основе теории дифракции дается объяснение фокусирующего действия зеркал. Вогнутые и выпуклые зеркала рассматриваются как предельный случай фазовых субзонных пластинок, работающих на отражение волн. Дается понятие о зонировании фокусирующих зеркал. Теоретические выводы подтверждаются экспериментом в сантиметровом диапазоне электромагнитных волн.

В курсах общей физики действие выпуклых и вогнутых зеркал традиционно объясняется законами геометрической оптики. Учитывая, что геометрическая оптика является предельным случаем волновой, представляет интерес применить теорию дифракции к объяснению собирающего и рассеивающего действия зеркал. Плодотворность такого подхода позволяет найти форму поверхности собирающего зеркала, не обладающего сферической аберрацией, а также ввести понятие о зонировании зеркал, которое нашло применение в технике сверхвысоких частот.

Предлагаемый теоретический дифракционный подход к объяснению собирающего и рассеивающего действия зеркал находит экспериментальное подтверждение наглядными опытами в сантиметровом диапазоне электромагнитных волн  $\lambda = 3,2$  см.

Пусть источник и приемник волн находится в точке  $M$  на расстоянии  $OM = f$  от плоского зеркала (рис. 1). Разобьем поверхность зеркала на элементарные

кольцевые участки, называемые субзонами. Размер субзон значительно меньше зон Френеля. Границей первой центральной субзоны являются точки на зеркале, которые находятся на расстоянии  $\left(f + \frac{\Delta}{2}\right)$  от точки  $M$ , где  $\Delta \ll \frac{\lambda}{2}$ .

Границей второй кольцевой субзоны являются точки на поверхности плоского зеркала, которые находятся на расстоянии  $\left(f + 2\frac{\Delta}{2}\right)$  от точки  $M$ . Продолжая

разбиение зеркала на кольцевые элементарные участки, легко видеть, что границей  $i$ -ой субзоны

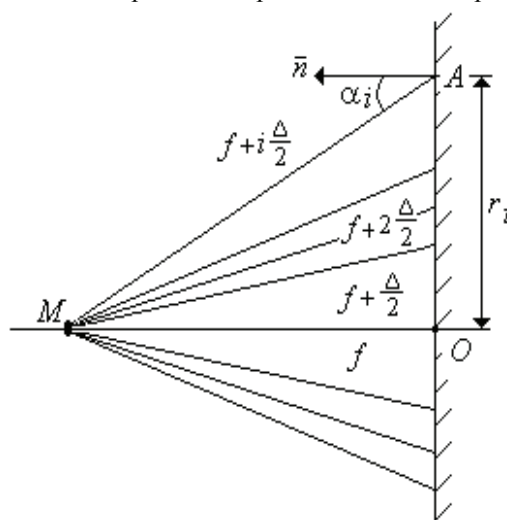


Рис. 1

являются точки на зеркале, которые находятся от точки  $M$  на расстоянии  $\left(f + i\frac{\Delta}{2}\right)$ . Очевидно, что  $\Delta$  есть геометрическая разность хода вторичных волн, приходящих в точку  $M$  от любых двух соседних субзон. Если допустить, что каждая зона Френеля, на которые можно разбить поверхность плоского зеркала, делится на  $N$  кольцевых субзон, то разность хода вторичных волн, приходящих в точку  $M$  от любых соседних субзон, равна

$$\Delta = \frac{\lambda}{2N}. \quad (1)$$

Из прямоугольного треугольника  $OMA$  найдем радиусы субзон

$$r_i^2 = \left(f + i\frac{\Delta}{2}\right)^2 - f^2$$

или

$$r_i^2 = if\Delta + \frac{i^2\Delta^2}{4}. \quad (2)$$

Если отбросить член  $\frac{i^2\Delta^2}{4}$  второго порядка малости, то получим приближенную формулу

$$r_i = \sqrt{if\Delta}. \quad (3)$$

Учитывая формулу (1), получим

$$r_i = \sqrt{\frac{if\lambda}{2N}}. \quad (4)$$

Например, для сантиметровых электромагнитных волн  $\lambda = 3,2$  см при  $f = 75$  см и  $N = 3$ , радиус первой ( $i = 1$ ) субзоны  $r_i = \sqrt{\frac{f\lambda}{2N}} = 63,2$  мм. Радиус любой субзоны легко найти по формуле  $r_i = r_1\sqrt{i} = 63,2\sqrt{i}$  мм при  $i = 1, 2, 3, \dots, 12$ . Можно показать, что площади кольцевых субзон одинаковы:  $\Delta S = \pi f \Delta$ . Однако амплитуды вторичных волн, приходящих в точку наблюдения  $M$ , будут различны. Причем, чем больше номер  $i$ , тем меньше амплитуда вторичной волны, так как с ростом номера субзоны увеличивается угол  $\alpha_i$  (см. рис. 1) между нормалью к зеркалу и направлением в точку наблюдения  $M$ . Следовательно, между амплитудами волн, отраженных от субзон и приходящих в точку  $M$ , имеется соотношение:

$$|\bar{E}_1| > |\bar{E}_2| > |\bar{E}_3| > \dots \quad (5)$$

Так как геометрическая разность хода вторичных волн, приходящих в точку  $M$  от любых соседних субзон, равна  $\Delta$ , то между ними имеется разность фаз, равная

$$\varphi = k\Delta, \quad (6)$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число. Учитывая формулу (1), получим

$$\varphi = \frac{\pi}{N}. \quad (7)$$

Например, при  $N = 3$  имеем  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . Будем считать, что фаза вторичной волны, приходящей в точку  $M$  от первой ( $i = 1$ ) субзоны  $\varphi_1 = 0$ . Тогда фаза вторичной волны, приходящей от второй ( $i = 2$ ) субзоны  $\varphi_2 = \varphi$ ; фаза вторичной волны от третьей ( $i = 3$ ) субзоны  $\varphi_3 = 2\varphi$  и т.д. Следовательно, фазы вторичных волн, приходящих от субзон в точку  $M$ , образуют арифметическую прогрессию:  $0; \varphi; 2\varphi; 3\varphi; \dots$ . Согласно принципу Гюйгенса–Френеля амплитуда результирующей волны, приходящей в точку  $M$ ,

$$E = E_1 \cos \omega t + E_2 \cos(\omega t - \varphi) + E_3 \cos(\omega t - 2\varphi) + \dots + E_n \cos[\omega t - (n-1)\varphi]. \quad (8)$$

Для нахождения амплитуды результирующей волны, отраженной от плоского зеркала и приходящей в точку наблюдения, воспользуемся векторной диаграммой (рис. 2), построенной на основании формулы (8) при  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . Векторная диаграмма представляет собой ломаную линию, вписанную в свертывающуюся спираль, причем каждый последующий вектор  $\vec{E}_{i+1}$  повернут против часовой стрелки на угол  $\varphi$  по отношению к предыдущему вектору  $\vec{E}_i$ .

Амплитуда результирующей волны, отраженной от плоского зеркала и приходящей в точку  $M$ , численно равна модулю вектора, соединяющего начало и конец векторной диаграммы. Легко видеть, что при бесконечно большом числе субзон амплитуда результирующей волны равна половине амплитуды волны, приходящей от первых трех субзон, или половине амплитуды волны, приходящей от первой зоны Френеля. В частном случае двенадцати субзон или четырех зон Френеля, как показано на рис. 2, амплитуда результирующей волны, отраженной от плоского зеркала, будет не столь большой.

Для того чтобы увеличить в точке наблюдения амплитуду результирующей вторичной волны, отраженной от зеркала, необходимо «размотать» спираль векторной диаграммы и превратить ее в прямую линию. Для этой цели увеличим фазу вторичной волны, отраженной от второй субзоны, на  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ , то есть повернем вектор  $\vec{E}_2$  на диаграмме по часовой стрелке на угол  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  по отношению к век-

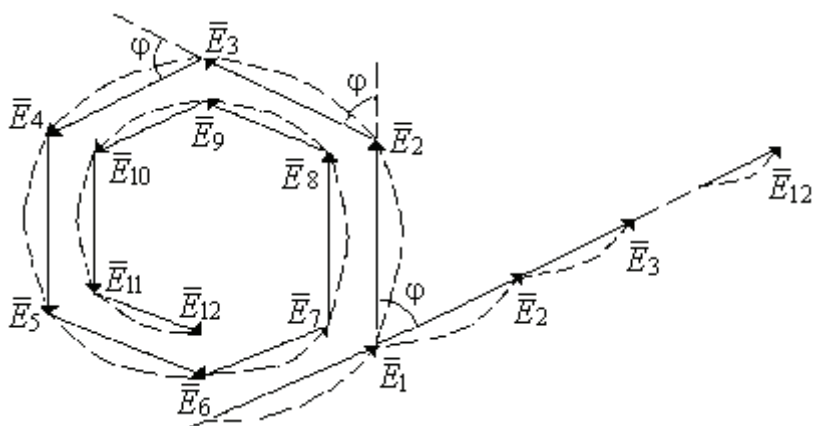


Рис. 2

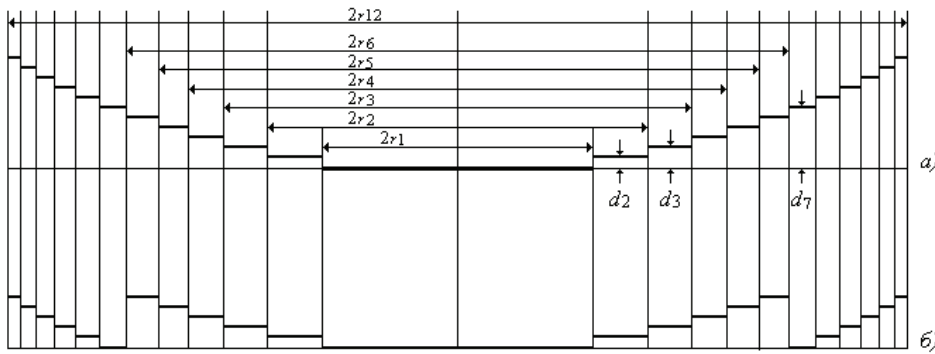


Рис. 3

тору  $\bar{E}_1$ , волны отраженной от первой субзоны. Другими словами, необходимо компенсировать геометрическую разность хода  $\Delta$  между вторичными волнами  $E_2$  и  $E_1$ . Технически это можно реализовать соответствующим смещением или сдвигом отражающего кольцевого слоя второй субзоны навстречу падающим волнам на отрезок

$$d_2 = d = \frac{\Delta}{2}$$

по отношению к отражающей поверхности первой субзоны как схематично показано на рис. 3, а.

Увеличим фазу волны, отраженной от третьей субзоны, на  $2\varphi$ , то есть повернем вектор  $\bar{E}_3$  на диаграмме (см. рис. 2) по часовой стрелке на угол  $2\varphi$  по отношению к вектору  $\bar{E}_1$ . Другими словами, компенсируем геометрическую разность хода  $2\Delta$  между вторичными волнами, отраженными от первой и третьей субзон. Это можно достичь, если отражающий кольцевой слой третьей субзоны сдвинуть навстречу падающим лучам на отрезок

$$d_3 = 2d = \frac{2\Delta}{2} = \Delta$$

по отношению к отражающей поверхности первой субзоны (рис. 3, а). Аналогично, осуществляя данную операцию с остальными субзонами, получим, что для компенсации геометрической разности хода между вторичными волнами необходимо отражающий слой  $i$ -ой субзоны сместить на величину

$$d_i = (i-1)d = (i-1)\frac{\Delta}{2}. \quad (9)$$

В частном случае, при  $N=3$  и  $\Delta = \frac{\lambda}{2N} = \frac{\lambda}{6}$ , величина смещения двух сосед-

них субзон равна  $d = \frac{\Delta}{2} = \frac{\lambda}{12} = 2,67$  мм при  $\lambda = 32$  мм.

Таким образом, плоское зеркало превращается в ступенчатую фазовую субзонную пластинку, работающую на отражение, благодаря которой ломаная спираль векторной диаграммы (см. рис. 2) превращается в кусочную прямую линию, а амплитуда отраженной результирующей волны в точке  $M$  становится равной

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_{12}. \quad (10)$$

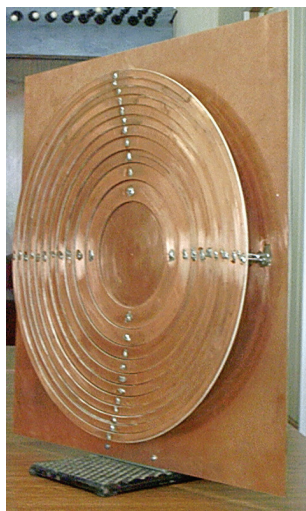


Рис. 4

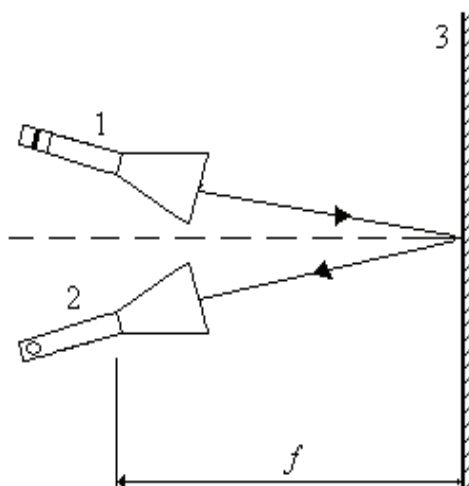


Рис. 5

На рис. 4 показана фотография ступенчатой фазовой субзонной пластинки для сантиметровых электромагнитных волн  $\lambda = 3,2$  см, которая содержит 12 субзон или 4 зоны Френеля и имеет фокусное расстояние  $f = 75$  см при  $\Delta = \frac{\lambda}{2N} = \frac{\lambda}{6}$ .

Для проведения опытов устанавливают источник 1 и приемник 2 сантиметровых электромагнитных волн с рупорными антеннами, как показано на рис. 5.

Для измерения интенсивности принимаемых волн рупорная антенна соединяется с осциллографом или демонстрационным микроамперметром. Перед источником и приемником радиоволн на расстоянии  $f = 75$  см устанавливают круглое металлическое плоское зеркало 3 радиусом  $r_{12} = 219$  мм и измеряют интенсивность  $I_0$  принимаемой волны. Плоское зеркало может быть изготовлено из любого металлического листа, содержащего 12 субзон или 4 зоны Френеля.

Вместо плоского зеркала перед источником 1 и приемником 2 на том же расстоянии  $f = 75$  см устанавливают ступенчатую фазовую субзонную пластинку (рис. 4) и отмечают разное увеличение интенсивности  $I$  принимаемого сигнала, то есть  $I \gg I_0$ .

Очевидно, что ступенчатая фазовая субзонная пластинка не позволяет достичь предельной фокусировки волн, так как вторичные волны, приходящие в точку наблюдения от внешнего и внутреннего края каждой субзоны имеют разность фаз, равную  $\varphi$ , которая при  $N = 3$  согласно формуле (7) равна  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . Следова-

тельно, чтобы полностью «размотать» спираль векторной диаграммы и достичь максимальной фокусировки волн, необходимо значительно увеличить число субзон  $N$ , на которое разбивается каждая зона Френеля и изменить соответствующие фазы вторичных волн, то есть необходимо перейти от ступенчатой фазовой субзонной пластинки к вогнутому зеркалу. Чтобы найти форму поверхности собирающего зеркала, необходимо из выражений (2) и (9) исключить величину  $\Delta$ . При больших порядковых числах субзон можно считать, что  $i \approx (i - 1)$ . Тогда получим уравнение гиперболы

$$r^2 = 2fd + 4d^2. \quad (11)$$

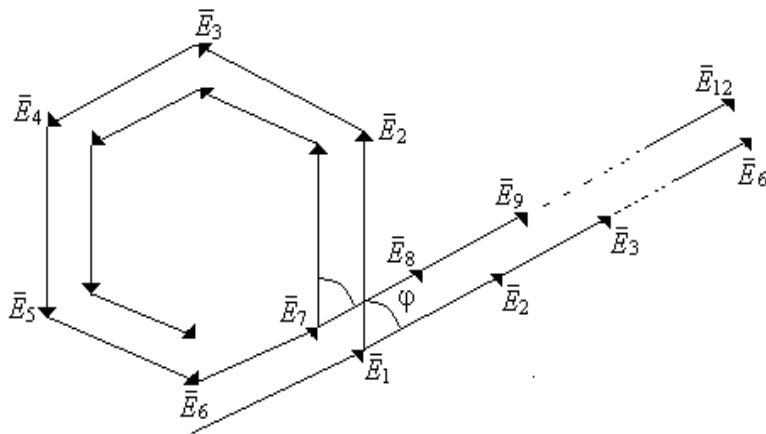


Рис. 6

Другими словами, собирающее зеркало, не обладающее сферической аберрацией, должно иметь поверхность в виде гиперboloида вращения. Если величину  $\Delta$  исключить из уравнений (3) и (9), то получим уравнение параболы

$$r^2 = 2fd . \quad (12)$$

Следовательно, в первом приближении форму поверхности собирающего зеркала можно считать параболоидом вращения.

Дадим понятие о зонировании собирающих зеркал. С помощью ступенчатой фазовой субзонной пластинки изменились фазы вторичных волн, идущие от всех субзон, кроме первой субзоны. При  $N = 3$  фаза волны, идущая от седьмой субзоны изменилась на  $2\pi$  и есть вектор  $\vec{E}_7$  на диаграмме (см. рис. 2) поворачивающийся по часовой стрелке на угол  $2\pi$ . Однако такое изменение фазы на  $2\pi$  не влияет на соотношение всех фаз вторичных волн, приходящих в точку наблюдения. Следовательно, отражающие поверхности седьмой субзоны, и следующих за ней остальных субзон двенадцатой включительно, не следует сдвигать навстречу падающим волнам согласно формуле (9) на отрезок  $d_i = (i-1)d = (i-1)\frac{\Delta}{2}$ . При  $\lambda = 3,2$  см и

$$N = 3 \text{ имеем } d_7 = (i-1)\frac{\lambda}{12} = \frac{\lambda}{2} = 16 \text{ мм (рис. 3, б).}$$

Другими словами, для осуществления фокусировки волн спираль векторной диаграммы следует «разматывать» не всю сразу, а каждую ломаную окружность или многоугольники по отдельности (рис. 6).

Все это говорит о том, что изменение фазы отраженных волн на  $2\pi$  или сдвиг отражающих поверхностей субзон на  $\frac{\lambda}{2}$  не изменяет фокусирующих свойств ступенчатой фазовой субзонной пластинки. На рис. 7 показана зонированная фазовая субзонная пластинка для сантиметровых радиоволн. Опыт показывает, что ее фокусирующее действие то же, что и обычной фазовой субзонной пластинки (см. рис. 4).

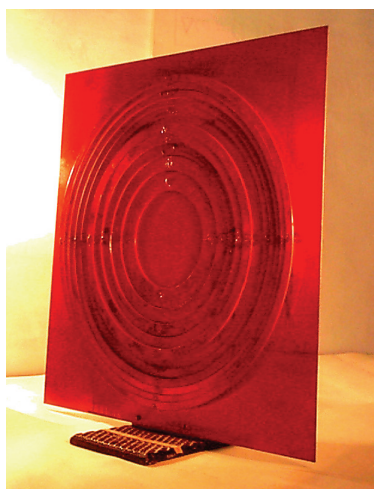


Рис. 7

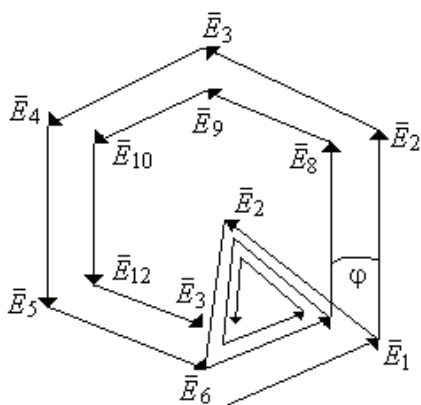


Рис. 8

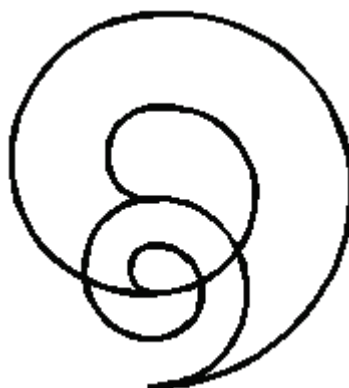


Рис. 9

Увеличивая неограниченно число  $N$  субзон в каждой зоне Френеля зонированной фазовой субзонной пластинки, можно перейти к зонированному фокусирующему зеркалу. Каждая отражающая поверхность в зонированном вогнутом зеркале содержит две зоны Френеля, а отражающие поверхности в ней сдвинуты. Рассмотрим действие рассеивающего зеркала с точки зрения теории дифракции. Как показано выше, векторная диаграмма вторичных волн, отраженных от плоского зеркала и приходящих в точку наблюдения, представляет собой ломаную линию, вписанную в свертывающуюся спираль. Если каждая зона Френеля разбивается на  $N = 3$  субзоны, то векторная диаграмма соответствует рис. 8.

Уменьшим фазу вторичной волны от второй субзоны на  $\varphi$ , то есть повернем вектор  $\bar{E}_2$  на угол  $\varphi$  против часовой стрелки. Фазы волн от третьей, четвертой и т.д. субзон уменьшим соответственно на  $2\varphi$ ,  $3\varphi$  и т.д. Векторная диаграмма превратится в более быстро свертывающийся многоугольник, и амплитуда результирующей волны в точке наблюдения значительно уменьшится. Соответствующее уменьшение фаз вторичных волн от субзон на  $\varphi$ ,  $2\varphi$ ,  $3\varphi$ , ... можно осуществить, если отражающие поверхности субзон сдвигать в противоположную сторону по отношению к падающим волнам на отрезки:

$d_2 = d = \frac{\Delta}{2}$ ;  $d_3 = 2d = \Delta$ ; ...;

$d_i = (i-1)d = (i-1)\frac{\Delta}{2}$ . В частном случае, при  $N = 3$ ;  $\Delta = \frac{\lambda}{2N} = \frac{\lambda}{6}$ ;  $\lambda = 3,2$  см полу-

чим  $d = 2,67$  мм. Таким образом, мы приходим не к вогнутой, а к выпуклой ступенчатой фазовой зонной пластинке, работающей на отражение. В предельном повороте при  $N \rightarrow \infty$  выпуклая ступенчатая фазовая зонная пластинка превращается в выпуклое зеркало.

Легко показать, что форма поверхности рассеивающего зеркала представляет собой поверхность гиперboloида вращения, и оно допускает зонирование. С точки зрения теории дифракции рассеивающее зеркало преобразует спираль векторной диаграммы в спираль в два раза меньшего радиуса (рис. 9).

#### Список литературы

1. Сивухин Д.В. Оптика. – М.: Наука, 1980. – 752 с.
2. Дитчберн Р.В. Физическая оптика. – М.: Наука, 1985. – 632 с.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 756 с.

## Collecting and Dispersal Action of Mirrors from the Viewpoint of Diffraction Theory

N.Ya. Molotkov<sup>1</sup>, O.V. Lomakina<sup>1</sup>, V.V. Shalnev<sup>2</sup>

*Departments: "Theoretical Mechanics" (1),  
"Physics" (2), TSTU*

**Key words and phrases:** diffraction; electro-magnetic waves; focusing; mirror; phase sub-zone plate.

**Abstract:** The focusing action of mirrors is explained on the basis of diffraction theory. Dished and embossed mirrors are considered as limit case of phase sub-zone plates, working in wave reflection. The notion of focusing mirrors zoning is given. Theoretical conclusions are proved experimentally in centimeter range of electro-magnetic waves.

---

## Abnehmungs- und Streuungswirkung der Spiegel vom Standpunkt der Diffraktionstheorie

**Zusammenfassung:** Auf Grund der Diffraktionstheorie wird es die Erklärung des Bündelungseffekts der Spiegel gegeben. Die Konkav- und Konvexspiegel werden als Grenzfall der phasischen auf Wellenwiederspiegelung arbeitenden Subzonenplatten betrachtet. Es wird die Vorstellung über die Zonierung der Bündelungsspiegel gegeben. Die theoretischen Folgerungen werden durch das Experiment im Zentimeterbereich der elektromagnetischen Welle bestätigt.

---

## Actions de focalisation et de dissipation des miroirs du point de vue de la théorie de la diffraction

**Résumé:** A la base de la théorie de la diffraction est donnée l'explication de l'action de focalisation des miroirs. Les miroirs concaves et convexes sont examinés comme un cas limité des plaquettes sous-zones de phase qui fonctionnent pour la réflexion des ondes. Les conclusions théoriques sont confirmées par un expériment dans une gamme des ondes électromagnétiques en centimètres.

---