УДК 532.51

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ РОТОРОМ И СТАТОРОМ РОТОРНОГО АППАРАТА

В.М. Червяков[1], В.И. Галаев[2], А.А. Коптев[3]

*Кафедры: «Теория механизмов, машин и детали машин» (1),
«Теоретическая механика» (2),
«Конструирование машин и аппаратов» (3), ТГТУ*

Ключевые слова и фразы: дифференциальное уравнение движения; метод разделения переменных; уравнение Навье-Стокса.

Аннотация: Методом Фурье решено уравнение нестационарного течения жидкости в зазоре между ротором и статором, полученное из уравнения Навье–Стокса.

Обозначения

C_1, C_2, C_1^*, C_2^* – постоянные интегрирования;
n – количество каналов ротора;
Q – расход жидкости через аппарат, м^3/с;
$J_{\frac{\beta}{2}+1}(r\lambda)$ – функция Бесселя 1-го рода;
R_1, R_2 – наружный диаметр ротора и внутренний диаметр статора, м;
$r, \bar{r}$ – размерная и безразмерная координаты, цилиндрическая система;
S – площадь поперечного сечения одного канала ротора, м^2;
$t, \bar{t}$ – размерное и безразмерное время;
T – масштаб времени, с;
u – окружная составляющая скорости, м/с;
$\bar{u}$ – безразмерная составляющая скорости;
U – масштаб окружной составляющей скорости, м/с;
V – масштаб радиальной составляющей скорости, м/с;
υ – радиальная составляющая скорости, м/с;
$\bar{\upsilon}$ – безразмерная радиальная составляющая скорости;
υ_1 – радиальная составляющая скорости на входе в зазор, м/с;
$Y_{\frac{\beta}{2}+1}(r\lambda)$ – функция Неймана;
λ – параметр разделения переменных;
ν – коэффициент кинематической вязкости, м^2/с;
$\zeta(r,t)$ – произвольная функция;
ρ – плотность среды, кг/м^3;
φ – окружная координата, цилиндрическая система;
ω – угловая скорость ротора, с$^{-1}$.

Течение между вращающимися и неподвижными проницаемыми цилиндрическими поверхностями часто определяет эффективность работы некоторых циклонов и гидроциклонов [1], фильтрующих центрифуг [2], центробежных грануляторов [3], роторно-пульсационных аппаратов [4].

В научной литературе известно точное решение задачи течения вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися непроницаемыми коаксиальными цилиндрами [5]. Имеется ряд работ, посвященных исследованию движения сплошной среды в зазоре между проницаемыми цилиндрами [4, 6 – 9]. В этих работах величина зазора и угловая скорость цилиндров принимается постоянной, поэтому течение в зазоре рассматривается как установившееся. Однако в работах [10, 11] показано, что в жидкостных центробежных экстракторах, вращающихся с переменной угловой скоростью, производительность сопел возрастает на 50 % по сравнению с производительностью при равномерном вращении. В данной работе сделана попытка смоделировать протекание процесса течения среды в зазоре во время разгона ротора до рабочей угловой скорости вращения. Это позволит определить закономерности периода установления стационарного течения и рассмотреть возможность использования режима «ускорение – торможение» ротора для повышения эффективности работы роторного аппарата. Кроме того, эта задача представляет определенный самостоятельный научный интерес.

Рассмотрим симметричное нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости между проницаемыми коаксиальными цилиндрами – вращающимся (ротором) и неподвижным (статором). Сделаем следующие допущения: течение жидкости, ввиду малого радиального зазора ($\delta \approx 10^{-4}$ м), полагаем ламинарным; составляющая скорости по оси z равна нулю; вдув жидкости в радиальном направлении равномерный; массовыми силами пренебрегаем.

С учетом принятых допущений дифференциальные уравнения Навье-Стокса и неразрывности в цилиндрических координатах принимают вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{vu}{r} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0\,. \tag{3}$$

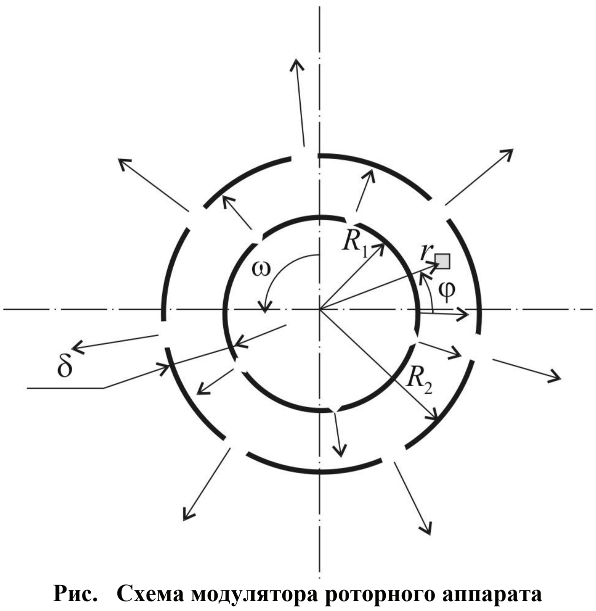

Рис. Схема модулятора роторного аппарата

При решении уравнения (2) используются граничные условия в виде (вращаются оба цилиндра):

$$u\big|_{r=R_1} = u_1, \quad u\big|_{r=R_2} = u_2 .$$

При постоянном расходе жидкости через роторный аппарат граничное условие для уравнения (1) имеет вид

$$v\Big|_{r=R_1} = \frac{Q}{nS} = v_1 . \tag{4}$$

За начальное условие примем закон распределения окружной составляющей скорости в начальной момент времени $u(R,0)$.

Подставив (3) в уравнение (1), после несложных преобразований [12] получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{v^2 + u^2}{r}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} . \tag{5}$$

Из уравнения неразрывности (3), используя граничное условие (4) получим

$$v = v_1 \frac{R_1}{r} . \tag{6}$$

Подставим (4) в уравнение (2) и получим уравнение движения для окружной составляющей скорости

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\left(v_1 R_1 - \nu\right)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}(v_1 R_1 + \nu)\ u . \tag{7}$$

Для приведения уравнения (7) к безразмерному виду введем следующие подстановки:

$$r = R_1\bar{r}\ ,\ u = U\bar{u}\ ,\ t = T\bar{t}\ . \tag{8}$$

Используем критерии подобия

$$\mathrm{Re}_\varphi = \frac{UR_1}{\nu} = \beta \tag{9}$$

– критерий Рейнольдса, характеризующий интенсивность движения в окружном направлении;

$$\mathrm{Re}_r = \frac{v_1 R_1}{\nu} = \beta_1 \tag{10}$$

– критерий Рейнольдса, характеризующий интенсивность движения в радиальном направлении;

$$\mathrm{Sh}_\varphi = \frac{R_1}{TU} = \alpha \tag{11}$$

– критерий Струхаля, характеризующий инерционность жидкости в зазоре в окружном направлении.

После несложных преобразований безразмерное уравнение движения в окружном направлении принимает вид (черточки для удобства отбрасываем)

$$\mathrm{Sh}_\varphi \, \mathrm{Re}_\varphi \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r}(\mathrm{Re}_r - 1)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}(\mathrm{Re}_r + 1)\, u \,. \tag{12}$$

Для удобства решения, учитывая (9) – (11), уравнение (12) представим в другой записи

$$\alpha\beta \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r}(\beta_1 - 1)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}(\beta_1 + 1)\, u \,. \tag{13}$$

Ищем решение уравнения (13) в виде

$$u(r,\, t) = \zeta(r,\, t) + u(r)\,, \tag{14}$$

где $u(r)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r}(\beta_1 - 1)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}(\beta_1 + 1)u\,, \tag{15}$$

удовлетворяющему условиям:

$$u\big|_{r=r_1} = u_1\,,\; u\big|_{r=r_2} = u_2\,.$$

Это решение имеет вид [5]

$$u(r) = C_1 \frac{1}{r} + C_2 r^{\beta_1 + 1}\,, \tag{16}$$

где $C_1 = \dfrac{(u_1 r_2^{\beta_1+1} - u_2 r_1^{\beta_1+1}) r_1 r_2}{r_2^{\beta_1+2} - r_1^{\beta_1+2}}$, $C_2 = \dfrac{u_2 r_2 - u_1 r_1}{r_2^{\beta_1+2} - r_1^{\beta_1+2}}$.

Относительно функции $\zeta(r,t)$ получается уравнение в частных производных вида (13), с заменой $u(r,t)$ на $\zeta(r,t)$

$$\alpha\beta \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} - \frac{1}{r}(\beta_1 - 1)\frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{1}{r^2}(\beta_1 + 1)\zeta \,. \tag{17}$$

Для функции $\zeta(r,t)$ граничные условия:

$$\zeta\big|_{r=r_1} = 0\,, \qquad \zeta\big|_{r=r_2} = 0\,.$$

Решение уравнения (17) ищем методом разделения переменных [13]

$$\zeta(r,\, t) = T(t) R(r)\,. \tag{18}$$

Функция $R(r)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$R\big|_{r=r_1} = 0, \qquad R\big|_{r=r_2} = 0\,. \tag{19}$$

Подставляя (18) в уравнение (17) получаем

$$\frac{\alpha\beta T'}{T} = \frac{R'' - \frac{1}{r}(\beta_1 - 1)R' - \frac{1}{r^2}(\beta_1 + 1)R}{R} = -\lambda^2\,. \tag{20}$$

Для функции $R(r)$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$R'' - \frac{1}{r}(\beta_1 - 1)R' + \left[\lambda^2 - \frac{1}{r^2}(\beta_1 + 1)\right]R = 0\,. \qquad (21)$$

Вместо переменной r введем переменную $r_* = r\lambda$, тогда уравнение (21) примет вид

$$r_*^2 R'' - (\beta_1 - 1) r_* R' + \left[r_*^2 - (\beta_1 + 1)\right]R = 0\,. \qquad (22)$$

Решение уравнения (22) может быть представлено в форме

$$R(r) = (r\lambda)^{\frac{\beta_1}{2}}\left[C_1^* J_{\frac{\beta_1}{2}+1}(r\lambda) + C_2^* Y_{\frac{\beta_1}{2}+1}(r\lambda)\right]. \qquad (23)$$

В соответствии с граничными условиями (19), для определения постоянных C_1^* и C_2^*, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1^* J_{\frac{\beta_1}{2}+1}(r_1\lambda) + C_2^* Y_{\frac{\beta_1}{2}+1}(r_1\lambda) = 0; \\ C_1^* J_{\frac{\beta_1}{2}+1}(r_2\lambda) + C_2^* Y_{\frac{\beta_1}{2}+1}(r_2\lambda) = 0. \end{cases} \qquad (24)$$

Так как C_1^* и C_2^* одновременно не равны нулю, то получаем уравнение

$$J_{\frac{\beta_1}{2}+1}(r_1\lambda) Y_{\frac{\beta_1}{2}+1}(r_2\lambda) - J_{\frac{\beta_1}{2}+1}(r_2\lambda) Y_{\frac{\beta_1}{2}+1}(r_1\lambda) = 0\,. \qquad (25)$$

Из уравнения (25) определяем собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ рассматриваемой задачи. Собственные функции имеют вид

$$R_m(r\lambda_m) = (\lambda_m r)^{\beta_1/2}\left[J_{\frac{\beta_1}{2}+1}(r\lambda_m) Y_{\frac{\beta_1}{2}+1}(r_1\lambda_m) - J_{\frac{\beta_1}{2}+1}(r_1\lambda_m) Y_{\frac{\beta_1}{2}+1}(r\lambda_m)\right] \qquad (26)$$

и удовлетворяют следующим условиям:

$$\int_{r_1}^{r_2} r^{1-\beta_1} R_m(r\lambda_m) R_n(r\lambda_n)\,dr = 0\,, \text{ если } m \neq n\,; \qquad (27)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} r^{1-\beta_1}\left[R_m(r\lambda_m)\right]^2 dr = \frac{1}{2}\left\{r_2^{2-\beta_1}\left[R'_m(r_2\lambda_m)\right]^2 - r_1^{2-\beta_1}\left[R'_m(r_1\lambda_m)\right]^2\right\}. \qquad (28)$$

Для функции $T(t)$ из уравнения (20) получаем дифференциальное уравнение

$$\alpha\beta T' + \lambda_m{}^2 T = 0\,. \qquad (29)$$

Решением уравнения (29), соответствующим собственному значению $\lambda_m \; (m = 1, 2, 3, \ldots)$, является выражение

$$T_m = A_m \mathrm{e}^{-\frac{\lambda_m^2}{\alpha\beta} t} . \qquad (30)$$

В результате общее решение дифференциального уравнения (13) запишется в виде

$$u(r,t) = C_1 \frac{1}{r} + C_2 r^{\beta_1 + 1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \mathrm{e}^{-\frac{\lambda_m^2}{\alpha\beta} t} R_m (r\lambda_m) . \qquad (31)$$

Постоянная A_m определяется по начальному условию

$$u\big|_{t=0} = u(r,\ 0) . \qquad (32)$$

Тогда

$$A_m = \frac{\int\limits_{r_1}^{r_2} \left[r^{1-\beta_1} u(r,0) - C_1 r^{-\beta_1} - C_2 r^2 \right] R_m (\lambda_m r) dr}{\int\limits_{r_1}^{r_2} r^{1-\beta_1} \left[R_m (\lambda_m r) \right]^2 dr} . \qquad (33)$$

Начальное распределение скорости в зазоре роторного аппарата можно принять, например, в виде прямой с граничными условиями:

$$u\big|_{r=r_1} = u_1 , \quad u\big|_{r=r_2} = 0 , \qquad (34)$$

тогда уравнением начального распределения окружной скорости является выражение

$$u(r,\ 0) = \frac{u_1}{r_2 - r_1} (r_2 - r) . \qquad (35)$$

Граничные условия (34) упрощают выражения (16) и (31).

Результаты вычислений по уравнению (31) показывают, что из-за множителя $\mathrm{e}^{-\frac{\lambda_m^2}{\alpha\beta} t}$ распределение окружных скоростей достаточно быстро приближается к известному профилю скорости для установившегося течения (16).

Список литературы

1. Баранов Д.А., Кутепов А.М., Лагуткин М.Г. Расчет сепарационных процессов в гидроциклонах // ТОХТ. – 1996. – Т. 30, № 2. – С. 117 – 123.
2. Соколов В.И. Центрифигурирование – М.: Химия, 1976. – 408с.
3. Холин Б.А. Центробежные и вибрационные грануляторы плавов и распылители жидкости. – М.: Машиностроение, 1977. – 182 с.
4. Богданов В.В., Христофоров Е.И., Клоцунг Б.А. Эффективные малообъемные смесители. – Л.: Химия, 1989. – 224 с.

5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
6. Плотников В.А., Трошкин О.А. Вихревой поток между пористыми цилиндрами // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2000. – № 3. – С. 16 – 19.
7. Волк А.М. Трение вязкой жидкости в пространстве между движущимися проницаемыми поверхностями // ИФЖ. – 1993. – Т. 65, № 2. – С. 152 - 158.
8. Di Prima R.C., Stuart J.T. Flow between rotating cylinders // Trans. ASME. - 1972 – F94, No. 3. – Pp. 266 – 274.
9. Gupta M., Goyai M. Unsteady flow of viscous incom steady pressible fluid between two porous coaxial rotating cylinders // Jng. Journal Pure Appl. Meth. – 1972. – V. 3, No. 4. – Pp. 547 – 555.
10. Поникаров С.И., Кафаров В.В. Истечение жидкости из сопел во вращающуюся среду другой плотности // ТОХТ. – 1997. – Т. 31, № 5. – С. 453 – 457.
11. Weinman P.D. On the spin-up and spin-down of a rotating fluid // J. Fluid Mech. – 1976. – V.77, No. 5. – Pp. 685 – 694.
12. Червяков В.М, Галаев В.И., Коптев А.А. Нестационарное течение жидкости во вращающихся каналах роторного аппарата // Вестник ТГТУ. – 2000. – Т. 6, № 4. – С. 611 – 616.
13. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 416 с.

Non-Stationary Liquid Flow in Clearance between Rotor and Stator of Rotor Apparatus

V.M. Chervyakov[1], V.I. Galaev[2], A.A. Koptev[3]

Departments: "Theory of Mechanisms, Machines and Machine Parts" (1), "Theoretical Mechanics" (2), "Design of Machines and Apparatuses" (3), TSTU

Key words and phrases: differential movement equation; method of variables division; Navier-Stockes equation.

Abstract: Equation of non-stationary liquid flow in clearance between rotor and stator obtained through Navier-Stockes equation is solved by Fourier method.

Unstationäre Flüssigkeitsströmung im Spielraum zwischen dem Rotor und dem Stator vom Rotorapparat

Zusammenfassung: Mit Hilfe der Fourier-Methode ist es die aus der Navier-Stockes-Gleichung erhaltene Gleichung der unstationären Flüssigkeitsströmung im Spielraum zwischen dem Rotor und dem Stator gelöst.

Ecoulement non-stationnaire du liquide dans le jeu entre le rotor et le stator de l'appareil de rotor

Résumé: Par la méthode de Fourier est résolue l'équation de l'écoulement non-stationnaire du liquide dans le jeu entre le rotor et le stator reçue à partir de l'équation de Navier-Stockes.