

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТРОЙСТВА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ ЛАМИНАРНОГО РЕЖИМА

С.С. Хануни*, А.Н. Дрязгов, С.В. Пономарев

Кафедра «Автоматизированные системы и приборы», ТГТУ

Представлена членом редколлегии профессором С.В. Мищенко

Ключевые слова и фразы: ламинарный поток; температурное поле; теплофизические характеристики жидкостей; численное решение.

Аннотация: Предложена конструкция измерительного устройства и представлен вывод расчетных зависимостей, положенных в основу программы для расчета температурного поля устройства, с помощью которого проводятся исследования теплофизических свойств жидкостей методом ламинарного режима. Представлены результаты численного моделирования процессов теплопереноса в измерительном устройстве.

Обозначения

a – температуропроводность, $\text{м}^2/\text{с}$;	T^* – средняя температура в слое термометра сопротивления, $^{\circ}\text{C}$.
c_p – объемная теплоемкость, $\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$;	U – значение температуры жидкости, $^{\circ}\text{C}$;
d – внутренний диаметр трубки, м ;	$U_{\text{ср.м}}$ – среднемассовая температура жидкости на выходе из трубки, $^{\circ}\text{C}$;
h_r – шаг сетки по оси r ;	W – удельная мощность внутреннего источника тепла;
h_z – шаг сетки по оси z ;	z – осевая (продольная) координата, м ;
l_n – длина начального гидродинамического участка, м ;	λ_A – теплопроводность исследуемой жидкости, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$;
L, Z_{max} – длина начального и теплообменного участков трубки, м ;	λ – теплопроводность, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$;
Pe – число Пекле;	τ – шаг сетки по времени t ;
Q – расход жидкости, $\text{м}^3/\text{с}$;	$\bar{\omega}$ – средняя скорость течение жидкости, $\text{м}/\text{с}$;
r – радиальная координата, м ;	ω_z – продольная скорость жидкости в направлении оси z , $\text{м}/\text{с}$.
R – внутренний радиус трубки, м ;	
Re – число Рейнольдса;	
t – время, с ;	
T_1, T_2, T_3, T_4 – температуры, измеряемые в слое термометров сопротивления, $^{\circ}\text{C}$;	

Введение

Традиционные стационарные и нестационарные методы измерения теплофизических характеристик (**ТФХ**) жидкостей основаны на предположении, что исследуемые жидкости в процессе эксперимента находятся в «квазитвердом» состоянии (в образце отсутствует конвективный перенос теплоты). Именно это предположение и является основной причиной [1, 2], препятствующей применению этих методов для измерения ТФХ в потоках технологических жидкостей.

* С. С. Хануни (Йемен) – докторант кафедры АСП ТГТУ.

В литературе имеются сведения о некоторых методах измерения ТФХ жидкостей в процессе их ламинарного течения. В работах [1 – 3] такие методы были названы методами ламинарного режима.

Данная статья содержит результаты, являющиеся продолжением исследований [1, 2], ранее выполненных на кафедре «Автоматизированные системы и приборы» ТГТУ. С целью повышения точности и уменьшения погрешности измерения была разработана математическая модель и компьютерная программа для расчета температурного поля многослойной осесимметричной системы с протекающим в ней ламинарным потоком жидкости. Данная математическая модель позволяет решать прямую краевую задачу теплопроводности для измерительного преобразователя, предназначенного для контроля теплофизических свойств жидкостей методом ламинарного режима. Решение прямой краевой задачи может служить основой численного решения обратной краевой задачи теплопроводности. На этапе разработки конструкции эта программа помогает выбрать подходящую конфигурацию устройства, материалы и размеры деталей измерительного преобразователя. Она позволяет спрогнозировать зависимость выходного сигнала измерительного преобразователя (термометра сопротивления) от входных параметров, в том числе от определяемых теплофизических свойств исследуемой жидкости (температуропроводности, теплопроводности, удельной теплоемкости).

1 Физическая модель измерительного устройства

Измерительное устройство (датчик) представляет собой многослойную систему (рис. 1), которая включает в себя: трубку 1, внутри которой протекает исследуемая жидкость A ; электрическую изоляцию 2; слой 3, в котором находится нагреватель; слой 4, в котором располагаются медные термометры сопротивления, измеряющие температуры T_1, T_2, T_3, T_4 (соответственно, на каждой из четырех секций); разделительные перегородки 5 между секциями; слой тепловой изоляции 6, уменьшающий отток тепла во внешнюю среду; металлический кожух 7, предотвращающий попадание теплоносителя внутрь слоя тепловой изоляции; теплоизоляционные втулки 8 и 9; устройства 10 и 11 для измерения среднemasсовой температуры жидкости, соответственно, на входе и на выходе измерительного устройства (температуры T_0 и $T_{ср.м}$).

Чтобы уменьшить влияние конвекции на результаты измерений, преобразователь устанавливается вертикально; исследуемую жидкость подают снизу вверх. Снаружи измерительный преобразователь омывается жидкостью B с постоянной температурой, которая должна быть равна температуре исследуемой жидкости на входе в измерительное устройство, т.е. температуре T_0 . Длина прямого участка трубки ниже измерительного участка должна быть достаточной для установления близкого к параболическому профиля скорости по сечению потока, т.е., согласно [1], $\ell_n/d > 0,065 Re$, где ℓ_n – длина начального гидродинамического участка, м; d – внутренний диаметр трубки, м; Re – число Рейнольдса для потока жидкости. В нашем случае $\ell_n > Re \cdot 2,6 \cdot 10^{-4}$ и при $Re = 2300$ получается: $\ell_n > 0,6$ м. Весь измерительный участок разделен на четыре секции. Это сделано для повышения надежности устройства. При выходе из строя одного из термометров можно воспользоваться другим каналом измерения. Кроме того, в некоторых вариантах расчета при решении обратной краевой задачи используются значения температуры, измеренные в различных секциях датчика.

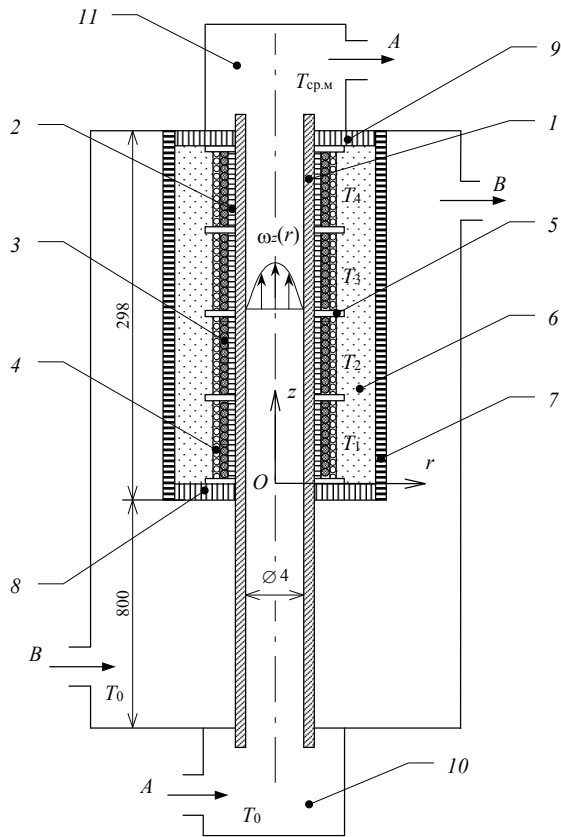


Рис. 1 Физическая модель измерительного устройства

2 Математическая модель измерительного устройства

Математическая модель данного преобразователя представляет собой систему нестационарных уравнений энергии, записанных в цилиндрической системе координат при заданных начальных и граничных условиях.

В соответствии с [1] уравнение энергии для каждого слоя измерительного преобразователя имеет вид:

$$\text{ср} \left[\frac{\partial U(r, z, t)}{\partial t} + \omega_z(r) \frac{\partial U(r, z, t)}{\partial z} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \lambda \frac{\partial U(r, z, t)}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \frac{\partial U(r, z, t)}{\partial z} \right] + W(t); \quad (1)$$

$$r_1(z) \leq r \leq r_2(z), \quad z_1(r) \leq z \leq z_2(r), \quad t \geq 0,$$

где r, z – радиальная и продольная координаты, м; t – время, с; U – температура, К; $\lambda, \text{ср}$ – теплопроводность и объемная теплоемкость, Вт/(м·К) и Дж/(м³·К) соответственно; ω_z – продольная скорость (отлична от нуля для слоя жидкости и принимается равной нулю для всех остальных слоев), м/с; W – удельная мощность внутреннего источника тепла (отлична от нуля для слоя нагревателя), Вт/м³.

Начальное условие для всех слоев измерительного устройства

$$U(r, z, 0) = T_0.$$

Граничные условия для слоя жидкости:
при $r = 0$ (условие симметрии)

$$\partial U(0, z, t) / \partial r = 0 ;$$

при $r = R$ (ГУ-4)

$$U(R-0, z, t) = U(R+0, z, t), \quad \lambda_A \frac{\partial U(R-0, z, t)}{\partial r} = \lambda_1 \frac{\partial U(R+0, z, t)}{\partial r} ;$$

при $z = 0$ и $r \leq R$ (ГУ-1)

$$U(r, 0, t) = T_0 .$$

При $z = Z$, где Z – длина, намного превышающая длину измерительного участка трубки, вводится искусственное условие, задающее отсутствие теплового потока в направлении координаты z на достаточном удалении от измерительного участка. Наличие этого условия позволяет воспользоваться неявным методом прогонки по координате z при решении прямой краевой задачи

$$\partial U(r, Z, t) / \partial z = 0 .$$

Граничные условия для других слоев измерительного устройства.

Условия на границах между слоями, параллельных оси потока при $r = r_i$ (граничное условие четвертого рода специального вида, см. [1])

$$U(r_{i-0}, z, t) = U(r_{i+0}, z, t), \quad \lambda_{i-0} \frac{\partial U(r_{i-0}, z, t)}{\partial r} - \lambda_{i+0} \frac{\partial U(r_{i+0}, z, t)}{\partial r} = P(t),$$

где P – поверхностная мощность теплового потока, выделяемая на границе между слоями, Вт/м². Значение P обычно принимается равным нулю на всех границах между слоями измерительного устройства. Однако в качестве альтернативного варианта расчета можно рассматривать вариант, при котором толщина слоя нагревателя 3 (см. рис. 1) принимается равной нулю и весь тепловой поток от нагревателя выделяется на границе между слоем электрической изоляции 2 и слоем 4, где располагаются термометры сопротивления.

Условия на границах, перпендикулярных оси потока, при $z = z_j$ (ГУ-4)

$$U(r, z_{j-0}, t) = U(r, z_{j+0}, t), \quad \lambda_{j-0} \frac{\partial U(r, z_{j-0}, t)}{\partial z} = \lambda_{j+0} \frac{\partial U(r, z_{j+0}, t)}{\partial z} .$$

Условие на внешней поверхности металлического кожуха 7 при $r = r_{7\max}$ (ГУ-1)

$$U(r_{7\max}, z, t) = T_0 .$$

Условия на внешней поверхности теплоизоляционных втулок 8 и 9 (отсутствие теплового потока):

$$\partial U(r, z_{8\min}, t) / \partial z = 0, \quad \partial U(r, z_{9\max}, t) / \partial z = 0 .$$

Условие, задающее отсутствие теплового потока в направлении координаты r на внешней поверхности трубки 1 за пределами измерительного участка, при $z > z_{9\max}$

$$\partial U(r_{1\max}, z, t) / \partial r = 0 .$$

Это условие в некоторой степени нарушает адекватность математической модели реальному устройству и принято только потому, что все другие варианты задания граничного условия на этой поверхности представляются еще менее подходящими. Для того, чтобы уменьшить влияние погрешности, вызванной использованием данного условия, мы не будем учитывать в расчете температуру T_4 , измеренную термометром сопротивления, установленным на последней секции датчика.

Перечислим основные допущения, принятые в данной математической модели.

1. Предполагается, что все свойства исследуемой жидкости (и других слоев измерительного устройства) не зависят от температуры, пространственной координаты и времени. В этой связи особо следует выделить динамическую вязкость жидкости (μ , Па·с). Для вязкости это допущение справедливо только в случае, если диапазон изменения температуры жидкости по сечению потока будет минимальным.

Если число Рейнольдса меньше критического значения $Re < Re_{кр}$, учитывая данное допущение, можно предположить, что в трубке имеет место течение Хагена–Пуазейля. В этом случае продольная составляющая скорости жидкости рассчитывается по формуле

$$\omega_z(r) = 2Q(1 - r^2/R^2) / (\pi R^2),$$

где Q – расход жидкости, м³/с, R – внутренний радиус трубки, м.

Радиальная составляющая скорости жидкости ω_r принимается равной нулю.

2. На границах между слоями предполагается отсутствие термического сопротивления.

3. Диссипативная составляющая прироста температуры внутри жидкости принимается равной нулю. Вклад данной составляющей в прирост температуры для течения Пуазейля можно оценить по формуле [4]

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{\text{диссип}}(r) = \frac{\mu}{c\rho} \frac{16\bar{\omega}^2}{R^4} r^2 = \frac{\mu}{c\rho} \frac{16Q^2}{\pi^2 R^8} r^2,$$

где $\bar{\omega}$ – средняя скорость потока жидкости, м/с, $\bar{\omega} = Q / (\pi R^2)$.

Наша цель состоит в нахождении теплофизических свойств исследуемой жидкости. Эти свойства можно определить, решив обратную краевую задачу, описываемую данной математической моделью, относительно искомым теплофизических свойств слоя жидкости. Решение этой задачи аналитическим методом представляется невозможным, т.к. неизвестна функция, описывающая распределение температур в любой точке измерительного устройства в произвольный момент времени. Обратную краевую задачу можно решать путем численного подбора значений теплопроводности λ и удельной теплоемкости $c\rho$ (либо температуропроводности $a = \frac{\lambda}{c\rho}$) исследуемой жидкости, при которых решение прямой краевой задачи (поле температур) будет совпадать со значениями, полученными из эксперимента.

В данном случае мы говорим о совпадении не точечных значений температуры, а интегральных характеристик, таких как среднemasсовая температура жидкости на входе и на выходе измерительного устройства, средняя температура в слое термометра сопротивления (по длине секции). Таким образом, нашей задачей на первоначальном этапе являлась разработка алгоритма решения

прямой краевой задачи, т.е. расчета поля температур, удовлетворяющего приведенной выше математической модели, при выбранных значениях λ и $c\rho$ (либо a) для слоя жидкости.

3 Метод решения прямой краевой задачи

Уравнение (1) можно решить численно с применением метода переменных направлений [5]. Для начала перепишем это уравнение в виде, более удобном для преобразования в сеточную форму

$$\frac{\partial U(r, z, t)}{\partial t} + \omega_z(r) \frac{\partial U(r, z, t)}{\partial z} = a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U(r, z, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 U(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U(r, z, t)}{\partial z^2} \right] + \frac{W(t)}{c\rho}, \quad (2)$$

где a – температуропроводность слоя, $\text{м}^2/\text{с}$.

Введем сетку по пространственным координатам и по времени

$$r_i = r_0 + ih_r, \quad z_j = z_0 + jh_z, \quad t_k = k\tau,$$

где h_r, h_z, τ – шаги сетки по соответствующим координатам и времени; i, j, k – целые числа.

Метод переменных направлений предполагает поочередную замену исходного дифференциального уравнения (2) следующими уравнениями, записанными на сетке

$$\frac{U_{ijk+1} - U_{ijk}}{\tau} + \omega_{zi} \frac{U_{ijk} - U_{ij-1k}}{h_z} = \frac{a}{r_i} \frac{U_{i+1jk+1} - U_{i-1jk+1}}{2h_r} + a \frac{U_{i+1jk+1} - 2U_{ijk+1} + U_{i-1jk+1}}{h_r^2} + a \frac{U_{ij+1k} - 2U_{ijk} + U_{ij-1k}}{h_z^2} + \frac{W_k}{c\rho}, \quad (3)$$

$$\frac{U_{ijk+1} - U_{ijk}}{\tau} + \omega_{zi} \frac{U_{ijk+1} - U_{ij-1k+1}}{h_z} = \frac{a}{r_i} \frac{U_{i+1jk} - U_{i-1jk}}{2h_r} + a \frac{U_{i+1jk} - 2U_{ijk} + U_{i-1jk}}{h_r^2} + a \frac{U_{ij+1k+1} - 2U_{ijk+1} + U_{ij-1k+1}}{h_z^2} + \frac{W_k}{c\rho}. \quad (4)$$

Уравнение (3) является неявным по координате r и явным по координате z , уравнение (4) неявно по координате z и явно по координате r . Температура U_{ijk+1} на следующем временном слое $t = t_{k+1}$ должна находиться из уравнения (3) при четном k , и из уравнения (4) при нечетном k . Данная расчетная схема предполагает линейное изменение температуры в пределах временного шага τ . Точность схемы возрастает по мере уменьшения шага по времени.

Согласно [6] первые производные по продольной координате z рекомендуется аппроксимировать центральными разностями при $\text{Pe} \leq 2$, и схемой против потока при $\text{Pe} > 2$, где Pe – число Пекле: $\text{Pe} = \omega d/a$. Можно предположить, что в нашем случае условие $\text{Pe} > 2$ будет выполняться для подавляющего большинства

исследуемых жидкостей. Первые производные в этом случае аппроксимируют левыми разностями, если направление потока совпадает с направлением координатной оси, и правыми разностями при обратном направлении потока. Для аппроксимации производных по радиальной координате r обычно используют центральные разности.

Опуская индексы j и $k+1$, можно переписать уравнение (3) в следующем виде

$$A_i U_{i-1} - C_i U_i + B_i U_{i+1} = -F_i, \quad (5)$$

где $i = 1, 2, \dots, M-1$.

Коэффициенты A_i, B_i, C_i, F_i вычисляются по формулам

$$A_i = \frac{a}{h_r^2} - \frac{a}{2h_r r_i}, \quad B_i = \frac{a}{h_r^2} + \frac{a}{2h_r r_i}, \quad C_i = \frac{1}{\tau} + \frac{2a}{h_r^2}, \quad (6)$$

$$F_i = U_{ij-1k} \left(\frac{a}{h_z^2} + \frac{\omega_{zi}}{h_z} \right) + U_{ijk} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2a}{h_z^2} - \frac{\omega_{zi}}{h_z} \right) + U_{ij+1k} \frac{a}{h_z^2} + \frac{W_k}{c\rho}.$$

Уравнение (5) можно дополнить граничными условиями:

$$U_0 = \chi_1 U_1 + v_1, \quad U_M = \chi_2 U_{M-1} + v_2. \quad (7)$$

В рассматриваемой математической модели на внешних границах устройства используются условия первого и второго рода. Для граничного условия первого рода, вида $U(r, z, t) = T_0$, коэффициенты χ_1, v_1, χ_2, v_2 задаются следующим образом:

$$\chi_1 = 0, \quad v_1 = T_0, \quad \chi_2 = 0, \quad v_2 = T_0.$$

Для граничного условия второго рода, определяющего равенство нулю теплового потока $\partial U(r, z, t) / \partial r = 0$, эти коэффициенты равны:

$$\chi_1 = 1, \quad v_1 = 0, \quad \chi_2 = 1, \quad v_2 = 0.$$

Полученная система уравнений (5) – (7) решается методом прогонки. При прямом ходе прогонки рассчитываются коэффициенты α_i, β_i :

$$\alpha_1 = \chi_1, \quad \beta_1 = v_1, \quad \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i},$$

где $i = 1, 2, \dots, M-1$.

При обратном ходе прогонки получают значения температуры

$$U_M = (v_2 + \chi_2 \beta_M) / (1 - \alpha_M \chi_2),$$

$$U_i = \alpha_{i+1} U_{i+1} + \beta_{i+1},$$

где $i = M-1, M-2, \dots, 1, 0$.

На границе между слоями, там, где задано граничное условие четвертого рода специального вида: $\lambda_{i-0} \partial U(r_{i-0}, z, t) / \partial r - \lambda_{i+0} \partial U(r_{i+0}, z, t) / \partial r = P(t)$, это условие может быть перенесено на сетку следующим образом

$$\lambda_{i-0} \frac{U_i - U_{i-1}}{h_{i-0}} - \lambda_{i+0} \frac{U_{i+1} - U_i}{h_{i+0}} = P_k. \quad (8)$$

Тогда коэффициенты α_{i+1} , β_{i+1} , используемые в методе прогонки, вычисляются на границе между слоями по формулам:

$$\alpha_{i+1} = \frac{\lambda_{i+0} h_{i-0}}{\lambda_{i-0} h_{i+0} (1 - \alpha_i) + \lambda_{i+0} h_{i-0}}, \quad \beta_{i+1} = \frac{(\lambda_{i-0} \beta_i + P_k h_{i-0}) \cdot h_{i+0}}{\lambda_{i-0} h_{i+0} (1 - \alpha_i) + \lambda_{i+0} h_{i-0}}.$$

Рассмотренная выше схема является неявной по координате r и явной по координате z .

Аналогичным образом, опуская индексы i и $k+1$, можно переписать уравнение (4) в виде

$$A_j U_{j-1} - C_j U_j + B_j U_{j+1} = -F_j, \quad (9)$$

где $j = 1, 2, \dots, N-1$.

Коэффициенты A_j , B_j , C_j , F_j вычисляются по формулам

$$A_j = \frac{a}{h_z^2} + \frac{\omega_{zi}}{h_z}, \quad B_j = \frac{a}{h_z^2}, \quad C_j = \frac{1}{\tau} + \frac{\omega_{zi}}{h_z} + \frac{2a}{h_z^2}, \quad (10)$$

$$F_j = U_{i-1jk} \left(\frac{a}{h_r^2} - \frac{a}{2h_r r_i} \right) + U_{ijk} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2a}{h_r^2} \right) + U_{i+1jk} \left(\frac{a}{h_r^2} + \frac{a}{2h_r r_i} \right) + \frac{W_k}{c\rho}.$$

Уравнение (9) можно дополнить граничными условиями вида

$$U_0 = \chi_1 U_1 + v_1, \quad U_N = \chi_2 U_{N-1} + v_2. \quad (11)$$

Здесь коэффициенты χ_1 , v_1 , χ_2 , v_2 выбираются аналогично тому, как это делалось при решении уравнения (3).

Система уравнений (9) – (11) решается методом прогонки. При прямом ходе прогонки рассчитываются коэффициенты α_j , β_j

$$\alpha_1 = \chi_1, \quad \beta_1 = v_1, \quad \alpha_{j+1} = \frac{B_j}{C_j - \alpha_j A_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{A_j \beta_j + F_j}{C_j - \alpha_j A_j},$$

где $j = 1, 2, \dots, N-1$.

При обратном ходе прогонки получают значения температуры:

$$U_N = (v_2 + \chi_2 \beta_N) / (1 - \alpha_N \chi_2),$$

$$U_j = \alpha_{j+1} U_{j+1} + \beta_{j+1},$$

где $j = N-1, N-2, \dots, 1, 0$.

На границе между слоями, там, где задано граничное условие четвертого рода: $\lambda_{j-0} \partial U(r, z_{j-0}, t) / \partial z = \lambda_{j+0} \partial U(r, z_{j+0}, t) / \partial z$, это условие может быть перенесено на сетку следующим образом

$$\lambda_{j-0} \frac{U_j - U_{j-1}}{h_{j-0}} = \lambda_{j+0} \frac{U_{j+1} - U_j}{h_{j+0}}. \quad (12)$$

Тогда коэффициенты α_{j+1} , β_{j+1} , используемые в методе прогонки, на границе между слоями вычисляются по формулам:

$$\alpha_{j+1} = \frac{\lambda_{j+0} h_{j-0}}{\lambda_{j-0} h_{j+0} (1 - \alpha_j) + \lambda_{j+0} h_{j-0}}, \quad \beta_{j+1} = \frac{\lambda_{j-0} \beta_j h_{j+0}}{\lambda_{j-0} h_{j+0} (1 - \alpha_j) + \lambda_{j+0} h_{j-0}}.$$

Данная схема является неявной по координате z и явной по координате r .

Следует отметить, что при решении уравнения (3) описанным выше способом не находятся значения температуры в узлах сетки, лежащих на границах слоев, параллельных оси Or . Соответственно, при решении уравнения (4) не находятся температуры в узлах, расположенных на границах, параллельных оси Oz . Температура в этих узлах должна находиться явным образом из граничных условий после того, как температурное поле будет рассчитано на новом временном слое $t = t_{k+1}$.

Рассмотрим условия на границах, параллельных оси Or . Если используется условие первого рода: $U(r, z_{\min}, t) = T_0$, либо $U(r, z_{\max}, t) = T_0$, то температура на границе соответственно равна T_0 : $U_{i0k+1} = T_0$, либо $U_{iNk+1} = T_0$. Если на границе задано условие отсутствия теплового потока ($\partial U(r, z_{\min}, t)/\partial r = 0$, либо $\partial U(r, z_{\max}, t)/\partial r = 0$), тогда: $U_{i0k+1} = U_{i1k+1}$, либо $U_{iNk+1} = U_{iN-1k+1}$. На границах между слоями, которые параллельны оси Or , задается граничное условие четвертого рода (12). Из него можно найти температуру U_j

$$U_{ijk+1} = \frac{\lambda_{j-0} h_{j+0} U_{ij-1k+1} + \lambda_{j+0} h_{j-0} U_{ij+1k+1}}{\lambda_{j-0} h_{j+0} + \lambda_{j+0} h_{j-0}}.$$

Теперь рассмотрим условия на границах, параллельных оси Oz . Если на границе задано условие первого рода $U(r_{\max}, z, t) = T_0$, то температура соответственно равна T_0 . На границах, где имеет место условие отсутствия теплового потока ($\partial U(0, z, t)/\partial z = 0$, либо $\partial U(r_{\max}, z, t)/\partial z = 0$), температура задается как $U_{0jk+1} = U_{1jk+1}$, либо $U_{Mjk+1} = U_{M-1jk+1}$. На границах между слоями, параллельными оси Oz , в общем случае используется граничное условие четвертого рода специального вида (8). Из него можно найти температуру U_i

$$U_{ijk+1} = \frac{P_k h_{i-0} h_{i+0} + \lambda_{i-0} h_{i+0} U_{i-1jk+1} + \lambda_{i+0} h_{i-0} U_{i+1jk+1}}{\lambda_{i-0} h_{i+0} + \lambda_{i+0} h_{i-0}}.$$

Для повышения точности лучше использовать неравномерную сетку по координате r для слоя жидкости, которая сгущается в направлении от оси потока к внутренней стенке трубки, т.е. шаг сетки h_{ri} в слое жидкости рассчитывается как $h_{ri} = h_0 + \text{coef } i$, где $\text{coef} < 1$, $i = 0, 1, \dots, M-1$.

Тогда величина шага h_r , которая используется в приведенных выше расчетных формулах, вычисляется для каждого i как $h_r = (h_{ri-1} + h_{ri})/2$.

Основными результатами, снимаемыми в ходе измерения, являются значения температуры, средние по слоям, в которых установлены термометры сопротивления T_2, T_3 и среднемассовая температура жидкости на выходе измерительного устройства: $T_{\text{ср.м}}$. В результате решения прямой краевой задачи находится распределение температур $U = U_{ijk}$ в узлах сетки в момент времени $t = t_k$. Мы можем использовать эти данные для расчета средних температур, аналогичных измеряемым температурам.

При ламинарном течении жидкости в трубке (течении Хагена–Пуазейля) среднемассовая температура жидкости в сечении $z = Z$ находится по формуле

$$U_{\text{ср.м}}(t) = \frac{4}{R^2} \int_0^R U(r, t) r (1 - r^2/R^2) dr.$$

Эту формулу можно аппроксимировать на сетке путем замены интеграла суммой площадей под кривыми, которые описываются полиномом второй степени. Такие кривые можно построить по трем точкам: r_{i-2}, r_{i-1}, r_i , для каждого $i = 2, 4, 6, \dots, N$ в пределах слоя жидкости. Затем интерполяционные полиномы интегрируются на участке (r_{i-2}, r_i) , и находится сумма площадей под каждой из кривых. Данный метод численного расчета интеграла аналогичен методу Симпсона, но учитывает тот факт, что сетка является неравномерной по координате r .

Температуры T_1, T_2, T_3, T_4 , измеряемые в слое термометров сопротивления, можно рассчитать для данного поля температур $U(r, z, t)$, предположив, что эти температуры измеряются в середине слоя термометров сопротивления при $r = (r_{\min} + r_{\max})/2$, где r_{\min} и r_{\max} соответствуют минимальному и максимальному значениям координаты r для данного слоя. Тогда средние температуры рассчитываются по формуле

$$T_x^*(t) = \frac{1}{z_{\max} - z_{\min}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} U(z, t) dz \approx \frac{1}{N} \left(\frac{U_{j \min}}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} U_n + \frac{U_{j \max}}{2} \right) \quad (\text{по методу трапеций}).$$

Рассмотренная выше математическая модель описывает температурное поле внутри измерительного устройства в произвольный момент времени $t = t_k$. Однако на практике мы не можем с достаточной степенью точности соотнести моменты времени, в которые получают экспериментальные данные, с моментами времени, для которых температурное поле моделируется с помощью компьютерной программы. Выходом в данной ситуации может быть рассмотрение установившегося процесса теплообмена при $t = \infty$ (рис. 2, 3). В расчетную модель необходимо ввести критерий, который позволит судить о достижении стационарного процесса. В качестве такого критерия принято максимальное относительное отклонение температуры на новом временном слое от соответствующего значения на предыдущем временном слое

$$\left\{ \left| \frac{U_{ijk+1} - U_{ijk}}{U_{ijk}} \right| \right\}_{\max} < \varepsilon U.$$

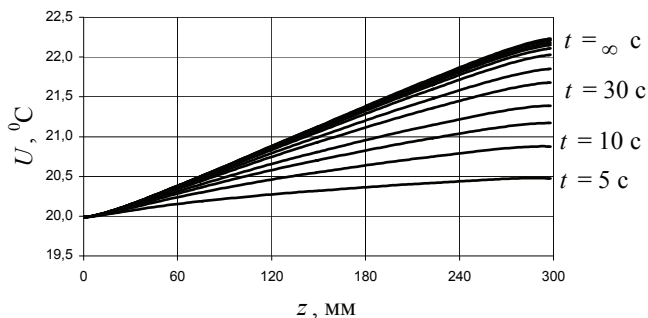


Рис. 2 Среднемассовая температура жидкости по длине измерительного участка

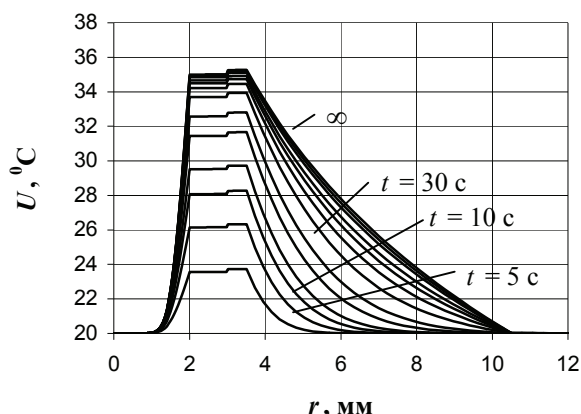


Рис. 3 Распределение температуры по радиальной координате в середине третьей секции

Соответственно, значения температуры, измеренные датчиком, можно использовать в расчете после того, как они достигнут некоторого установившегося значения. Однако по причине того, что метод, используемый в решении обратной краевой задачи, является итерационным, сходящимся в течение некоторого времени, можно начинать приближение к экспериментальным данным раньше, чем измеряемые значения температуры выйдут на стационарный уровень.

Особенность данной математической модели заключается в том, что в ней принимается во внимание распространение тепла как в самой жидкости, так в других частях измерительного устройства. Кроме того, рассчитывается распространение тепла как в радиальном (перпендикулярном оси потока), так и в продольном (параллельном оси потока) направлениях, т.е. решение находится в двухмерной системе координат $r - z$. Взаимное расположение и размеры деталей измерительного преобразователя могут быть различными, однако характеристики преобразователя не должны зависеть от угловой координаты φ , а, кроме того, должно выполняться допущение о неизменности профиля скорости потока по длине измерительного преобразователя.

4 Результаты численного моделирования

В соответствии с данной математической моделью разработана компьютерная программа. Она позволяет задавать геометрическую конфигурацию моделируемого устройства (размеры и взаимное расположение слоев), начальные и граничные условия, свойства отдельных слоев, шаг по времени и расчетную схему (локально-одномерная чисто неявная схема или симметричная схема переменных направлений (схема Писмена–Рэкфорда)). Кроме того, все эти параметры, за исключением геометрической конфигурации, могут быть изменены в процессе расчета. Получаемые результаты отображаются на экране или, по желанию пользователя, сохраняются в базе данных.

Программа учитывает распространение тепла как в радиальном, так и в продольном направлении, т.е. решение находится в двухмерной системе координат $r - z$. При расчете все теплофизические свойства деталей измерительного преобразователя должны быть заданы в виде функций температуры и, если необходимо, координат r и z . Конфигурация моделируемого преобразователя может быть любой, лишь бы соблюдалась его осесимметричность и неизменность профиля скоростей потока жидкости по всей длине преобразователя.

При каждом измерении определяются два значения температуры. Первое – это средняя по длине нагревателя температура T_3 , которая измеряется термометром сопротивления 4 на третьей секции (см. рис. 1). Второе – это среднemasсовая температура $T_{\text{ср.м}}$ исследуемой жидкости на выходе, измеряемая устройством 11 (см. рис. 1). Аналогичные температуры могут быть найдены для рассчитанного температурного поля внутри измерительного преобразователя. Метод решения обратной краевой задачи теплопроводности заключается в подборе таких значений теплопроводности λ^* и температуропроводности a^* , при которых вычисленные температуры T_3 и $T_{\text{ср.м}}$ будут равны измеренным значениям T_3 и $T_{\text{ср.м}}$. Алгоритм подбора реализован на основе метода последовательного приближения, который обобщен на случай двух переменных и нестационарного процесса. Найденные таким образом значения $\lambda = \lambda^*$ и $a = a^*$ представляют собой решение обратной краевой задачи теплопроводности, т.е. искомые значения теплофизических свойств исследуемой жидкости.

Данный алгоритм многократно использовался при решении как прямых, так и обратных задач для ряда режимов работы рассматриваемого измерительного устройства. В ходе выполнения расчетов признаков неустойчивости и некорректности полученных результатов выявлено не было.

Список литературы

1. Пономарев С.В., Мищенко С.В. Методы и устройства для измерения эффективных теплофизических характеристик потоков технологических жидкостей. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 1997. – 249 с.
2. Ponomarev S.V., Mishchenko S.V., Irvine T.F. Measurements of Thermophysical Properties by Laminar Flow Methods. – New-York: Begell House Inc., 2001. – 250 p.
3. Цедерберг Н.В. Теплопроводность газов и жидкостей. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 468 с.
4. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. – М.: Энергия, 1967. – 411 с.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – 3-е изд. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
6. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.

Modeling of Device for Measuring Thermophysical Properties of Liquid by Means of Laminar Mode

S.S. Hanooni, A.N. Dryazgov, S.V. Ponomarev

Department "Automated Systems and Devices", TSTU

Key words and phrases: numerical solution; laminar stream; temperature field; thermophysical properties of liquids.

Abstract: Designing of measuring device is offered and the derivation of calculating dependencies forming the basis of the program for calculating temperature

field of the device for carrying out the research of thermophysical properties of liquids by means of laminar mode is represented.

Modellierung des Meßgeräts für die Bestimmung der wärme-physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeit durch die Methode des Laminärregimes

Zusammenfassung: Es ist die Konstruktion des Meßgeräts vorgeschlagen. Es ist die Schlußfolgerung der im Grunde des Programms für die Berechnung des Temperaturfeldes des Geräts gelegten Rechenabhängigkeiten vorgebracht. Mit Hilfe dieses Geräts werden die Untersuchungen der wärme-physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeiten durch die Methode des Laminärregimes durchgeführt. Es sind die Ergebnisse der Ziffermodellierung von Prozessen der Wärmeübertragung im Meßgeräts angeführt.

Modélage du dispositif de mesure des propriétés thermophysiques du liquide par la méthode laminaire

Résumé: On a proposé la construction du dispositif de mesure et l'on a présenté la déduction des dépendances de calcul mises à la base du programme pour le calcul du champ thermique du dispositif à l'aide duquel on effectue les études des propriétés thermophysiques des liquides par la méthode du régime laminaire. On a présenté les résultats du modélage numérique des processus du transfert de chaleur dans le dispositif de mesure.
