УДК 519.86

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦ

С.М. Архипенков

Кафедра «Экономический анализ», ТГТУ

Представлена членом редколлегии профессором А.П. Романовым

Ключевые слова и фразы: размерность матриц; ряд, сходимость; экономико-математическая модель.

Аннотация: Рассмотрена экономико-математическая проблема обращения матриц очень больших размерностей. Предложен эффективный итерационный метод обращения любых матриц с вещественными элементами и с определителем, отличным от нуля. Доказана сходимость предлагаемого метода. Приведен пример решения.

Введение

В современных условиях применения прикладной математики часто приходится решать системы линейных алгебраических уравнений большой размерности, например, при нахождении решений линейных балансовых экономико-математических моделей [1 – 3]. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности успешно могут быть использованы при реализации конечно-разностных алгоритмов поиска решений сложных уравнений математической физики и математической экономики [4 – 6]. Нетрудно видеть, что процесс поиска решений систем линейных уравнений тесно связан с процессом обращения матриц. Если известна обратная матрица коэффициентов системы линейных уравнений, то решение этой системы легко можно получить [4, 5].

Метод обращения матриц больших размерностей можно также использовать при поиске решений сложных задач математического программирования. Однако при использовании в экономическом анализе балансовых линейных экономико-математических моделей часто требуется находить не только решения этих систем, но и обращать матрицы больших размерностей[1 – 3]. В этих и подобных случаях при выполнении экономико-математического анализа часто приходится корректировать матрицу прямых материальных затрат и, соответственно, вычислять обратные матрицы с учётом результатов корректировок.

Используемый в настоящее время итерационный метод |4, 5| применим лишь тогда, когда первоначальное приближение для обратной матрицы X_0 избрано достаточно близко к некоторой искомой матрице B^{-1}, то есть когда $\| E - BX_0 \| < 1$.

Поэтому в этой работе предлагается новый эффективный итерационный метод обращения матриц, который получен на основе улучшения метода, созданного мной и описанного в работе [7]. Предлагаемый метод наиболее целесообразно применять для проведения экономико-математического анализа в силу того, что он позволяет использовать результаты предыдущих обращений матриц, возникающих при проведении анализа.

Описание метода

Пусть A – произвольная квадратная невырожденная матрица с конечными вещественными элементами. Требуется вычислить A^{-1}.

Рассмотрим вначале матрицу $B = A^T A$, где A^T – транспонированная матрица (иногда обозначается A'). Известно, что B будет симметрической положительно-определлнной матрицей, для собственных чисел которой μ_i (i = $1, \ldots, n$) выполнятся неравенства: $0 < \mu_1 \le \ldots \le \mu_n$, где n – число строк (столбцов) в матрице A. Пусть $\|B\|$ – какая-либо легко вычисляемая норма матрицы B. Обозначим $\rho = \|B\|$. Рассмотрим теперь новую матрицу $C = \dfrac{B}{\rho}$. Собственные числа λ_i ($i = 1, \ldots, n$) матрицы C будут удовлетворять неравенствам: $0 < \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n \le 1$. Очевидно, что $C = E - (E - C) = E - D$, где $D = E - C$.

Собственные числа $\bar{\lambda}_i$ ($i = 1, ..., n$) симметрической матрицы D будут удовлетворять неравенству

$$0 \le \bar{\lambda}_i < 1 \;, i = 1, ..., n. \tag{1}$$

Следовательно, $C^{-1} = (E - D)^{-1}$. Известно, что в таких случаях матрица $(E - D)^{-1}$ может быть представлена в виде бесконечного сходящегося матричного ряда, то есть $(E - D)^{-1} = E + D + D^2 + \ldots$. Отсюда следует, что C^{-1} тоже будет симметрической матрицей.

Однако непосредственное использование этого матричного ряда для приближенного вычисления матрицы C^{-1} весьма не эффективно, ибо ряд не дает возможности использовать уже полученные другими методами приближенные значения матрицы C^{-1} для последующих улучшений.

Поэтому целесообразно использовать следующую рекуррентную формулу для обращения матриц типа матрицы С. Эта формула имеет вид

$$X_{i+1} = DX_i + E, \quad i = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

Подставив вместо X_{i+1} и X_i матрицу $(E - D)^{-1}$, получим тождество

$$(E - D)^{-1} = D(E - D)^{-1} + E . \tag{3}$$

Далее докажем сходимость итерационного метода.

Теорема. Последовательность матриц X_0, X_1, X_2, …, получаемых с помощью формулы (2) будет сходиться к матрице $(E - D)^{-1}$ при любой начальной матрице X_0 с конечными вещественными элементами.

Доказательство. Пусть X_0 – произвольная квадратная матрица с конечными вещественными элементами с числом строк, равным *n*.

$$X_0 = (E - D)^{-1} + \Delta ,$$

где Δ – какая-то неизвестная матрица, характеризующая отклонение выбранной матрицы X_0 от искомой $(E - D)^{-1}$.

С использованием формул (2) и (3) последовательность матриц

$$X_0, X_1, \ldots, X_k, \ldots$$

может быть представлена следующим образом:

$$X_1 = DX_0 + E = D((E - D)^{-1} + \Delta) + E = D(E - D)^{-1} + E + D\Delta = (E - D)^{-1} + D\Delta;$$

$$X_2 = D((E - D)^{-1} + D\Delta) + E = (E - D)^{-1} + D^2\Delta;$$

....

$$X_k = (E - D)^{-1} + D^k\Delta.$$

Поскольку собственные числа симметрической матрицы D удовлетворяют условию (1), то очевидно, что

$$\lim_{k \to \infty} || D^k \Delta || = 0$$

при любой матрице Δ с конечными вещественными элементами.

Поэтому $\lim X_K = (E - D)^{-1}$ при любой начальной матрице X_0 и при *k*, стремится к бесконечности.

Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что чем ближе избранная матрица X_0 к искомой матрице $(E - D)^{-1}$, тем ближе будет норма матрицы Δ к нулю и, следовательно, быстрее будет сходимость вычислительного процесса.

Таким образом, используя формулу (2) можно вычислить $(E - D)^{-1}$ или C^{-1} с какой угодно заданной точностью при любой начальной матрице X_0.

После нахождения матрицы C^{-1} легко можно вычислить матрицу B и, наконец , искомую матрицу A^{-1}. С этой целью воспользуемся следующими формулами:

$$C = \frac{B}{||B||} \text{ откуда } B^{-1} = \frac{C^{-1}}{||B||} \text{ или } (A^T A)^{-1} = B^{-1}, \text{ или } A^{-1}(A^T)^{-1} = B^{-1},$$

или

$$A^{-1} = B^{-1} A^T . \tag{4}$$

Вычислением матрицы A^{-1} по формуле (4) завершается процесс поиска искомой обратной матрицы.

Пример. Пусть имеется некоторая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $|A| \neq 0$. Требуется вычислить A^{-1}. Рассмотрим $B = A^T A$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}; \quad \|B\| = \max(12;17) = 17;$$

$$C = \frac{B}{17} = \begin{pmatrix} 0{,}294 & 0{,}412 \\ 0{,}412 & 0{,}588 \end{pmatrix}; \quad D = E - C = \begin{pmatrix} 0{,}706 & -0{,}412 \\ -0{,}412 & 0{,}412 \end{pmatrix}.$$

В качестве X_0 можно взять любую матрицу размерности 2×2 с конечными вещественными элементами. Однако чем ближе матрица X_0 к искомой C^{-1}, тем быстрее последовательность матриц, получаемая с помощью формулы (2), сойдется к матрице C^{-1}.

Положим

$$X_0 = \begin{pmatrix} 186 & -130 \\ -130 & 93 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X_1 = DX_0 + E = \begin{pmatrix} 185{,}6 & -130{,}096 \\ -130{,}096 & 92{,}88 \end{pmatrix};$$

$$X_2 = DX_1 + E = \begin{pmatrix} 0{,}706 & -0{,}412 \\ -0{,}412 & 0{,}412 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 185{,}6 & -130{,}096 \\ -130{,}096 & 92{,}88 \end{pmatrix} + E =$$
$$= \begin{pmatrix} 185{,}632 & -130{,}109 \\ -130{,}066 & 92{,}86 \end{pmatrix};$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0{,}706 & -0{,}412 \\ -0{,}412 & 0{,}412 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 185{,}632 & -130{,}109 \\ -130{,}066 & 92{,}86 \end{pmatrix} + E = \begin{pmatrix} 185{,}643 & -130{,}115 \\ -130{,}067 & 92{,}863 \end{pmatrix}.$$

Поскольку X_2 и X_3 отличаются незначительно, то в качестве приближенного значения матрицы C^{-1} можно брать X_3. Тогда матрица

$$B^{-1} = \frac{C^{-1}}{17} = \begin{pmatrix} 10{,}92 & -7{,}654 \\ -7{,}651 & 5{,}462 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = B^{-1} A^T = \begin{pmatrix} 3{,}264 & -1{,}126 \\ -2{,}189 & 1{,}084 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}075 & -0{,}042 \\ -0{,}039 & 1{,}0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу $M = E - AA^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}075 & 0{,}042 \\ 0{,}039 & 0 \end{pmatrix}$.

Сумма абсолютных значений элементов этой матрицы равна 0,156. Очевидно, что когда A^{-1} будет вычислена точно, то эта сумма будет равной нулю. Если же в качестве матрицы C^{-1} возьмем начальное приближение X_0, то выполнится следующее условие

$$B^{-1} = \frac{X_0}{17} = \begin{pmatrix} 10{,}941 & -7{,}647 \\ -7{,}647 & 5{,}470 \end{pmatrix}.$$

Тогда $A^{-1} = B^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 3,294 & -1,059 \\ -2,177 & 1,116 \end{pmatrix}$; $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1,117 & 0,057 \\ 0,057 & 1,23 \end{pmatrix}$ и матрица $M = E - AA^{-1} = \begin{pmatrix} -0,117 & -0,057 \\ -0,057 & -0,23 \end{pmatrix}$.

Сумма абсолютных значений элементов матрицы M в этом случае равна 0,461.

Заключение

Таким образом, даже за три итерации удалось вышеназванную сумму уменьшить почти в 3 раза и получить достаточно хорошее приближение для искомой матрицы A^{-1}.

Список литературы

1. Коссов В.В. Межотраслевые модели (теория и практика использования). – М.: Экономика, 1973. – 359 с.
2. Аганбегян А.Г., Гранберг А.Г. Экономико-математический анализ межотраслевого баланса СССР. - М.: Мысль, 1968. – 357 с.
3. Экономико-математические методы и модели: Учебн. пособие / Холод Н.И. и др. – Минск: БГЭУ, 2000. – 412 с.
4. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.-Л.: ФИЗМАТГИЗ, 1963. – 734 с.
5. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. – Т.II. – 620 с.
6. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными: Пер. с анг.| – М.: Мир, 1975. – 558 с.
7. Архипенков С.М. Метод последовательных приближений для обращения матриц больших размерностей // Модели и методы агроинформатики в научных исследованиях и рыночных условиях хозяйствования: Сб. науч. тр. / РАСХН. Сиб. Отделение. СибНИИЭСХ. – Новосибирск, 1992. – С. 182–187.

Iterative Method of Matrix Inversion

S.M. Archipenkov

Department "Economic Analysis", TSTU

Key words and phrases: convergence; economic-mathematical model; matrix of big dimensions; row.

Abstract: Economic-mathematical model of matrix inversion of big dimensions is considered. Effective iterative method of any matrix inversion with substantial elements and determiner different from zero is suggested. Convergence of the suggested method is proved. The example of problem solving is given.

Iterative Methode des Umlaufes der Matrizen

Zusammenfassung: Es ist das ökonomik-matematische Problem des Umlaufes der Matrizen von sehr großen Dimensionen untersucht. Es ist die wirksame iterative

Methode des Umlaufes der beliebigen Matrizen mit den materiellen Elementen und mit der von der Null unterscheidenen Determinante angeboten. Es ist die Konvergenz der angebotenen Methode bewiesen. Es ist das Beispiel der Lösung angeführt.

Méthode d'itération de la conversion des matrices

Résumé: Est examiné le problème mathématique et économique de très grandes dimensions. On a proposé une méthode efficace d'itération de la conversion de n'importe quelle matrice avec les élements réels et avec le déterminant différent de zero. On a prouvé la convergence de la méthode proposée. On a cité l'exemple de la résolution.