УДК 517.8

ЗАДАЧА БЕЛЛМАНА-ДЖОНСОНА ДЛЯ КОНВЕЙЕРНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОРЯДКОМ РАБОТ

В.И. Левин

Пензенский технологический институт

Представлена членом редколлегии профессором Г.М. Куликовым

Ключ слова и фразы: оптимальное планирование; теория расписаний; системы с последовательными ступенями.

Аннотация: Дано уточнение постановки и решения задачи Беллмана–Джонсона для многоступенчатых последовательных систем в условиях переменного порядка выполнения работ.

Введение

Для эффективной работы технических, экономических, административных и иных систем важно оптимальное планирование их работы. Решением этой задачи занимается современная теория расписаний. Ее возникновение связывают с работой С.М. Джонсона [1], в которой впервые была решена задача Беллмана–Джонсона оптимального по быстродействию упорядочения работ в конвейерных системах с двумя последовательными ступенями. Впоследствии в [1] был обнаружен и исправлен ряд неточностей, связанных с планированием порядка работ в случае равного времени их выполнения на обеих ступенях [2, 3]. В настоящей работе устанавливается другая существенная неточность работы [1], связанная с оптимизацией порядка работ в конвейерных системах с более чем тремя последовательными ступенями. Как показано в [1] на примере, если число ступеней $m \geq 4$, оптимальный порядок выполнения работ в системе в общем случае может потребовать изменения порядка подачи работ при переходе от предыдущей ступени к последующей. Однако при этом С.М. Джонсон упустил из виду, что изменение порядка работ есть особая операция, требующая конечного времени и имеющая свою особую математическую модель, что неизбежно влияет на решение всей задачи построения оптимального расписания выполнения работ. Эта неточность повторялась во всех последующих работах по теории расписаний [4 – 7]. Некоторые авторы даже построили на этой основе специальные теории для отыскания оптимального порядка работ в системе с учетом возможного изменения порядка работ при переходе от одной ступени к другой [8, 9]. Однако правомерность таких построений и их практическая польза в свете сказанного выше вызывают серьезные сомнения.

В настоящей статье устраняется неточность, введенная в теорию и практику составления расписаний в работе [1]. С этой целью строится адекватная математическая модель процесса изменения порядка следования работ при переходе от одной ступени системы к другой, и на ее основе – адекватная математическая модель всего процесса выполнения работ в конвейерной системе с учетом указанного возможного изменения порядка работ. Эти модели позволяют анализировать и синтезировать расписания выполнения работ с указанными изменениями. На типовых примерах, неоднократно использованных в литературе, показано, что введение новых моделей существенно изменяет результаты анализа имеющихся и синтеза новых расписаний для конвейерных систем.

1 Постановка задачи

Задача синтеза оптимального расписания работ в конвейерной системе с постоянным порядком выполнения работ ставится так [1, 5, 6, 10]: 1) имеется n работ, выполняемых в системе из m последовательных ступеней; 2) каждая работа $j, j=\overline{1,n}$, состоит из m различных операций, выполняемых на соответствующих ступенях: сначала 1-я операция на 1-й ступени, далее 2-я операция на 2-й ступени и т.д.; 3) каждая i-я ступень в любой момент времени выполняет только одну работу (ее i-ю операцию) либо простаивает; 4) в любой ступени начавшаяся операция не прерывается, а продолжается до ее окончания; 5) все работы проходят последовательные ступени в одном и том же порядке P; 6) каждая ступень начинает выполнение очередной работы сразу после ее поступления (если ступень в этот момент свободна) либо после окончания предыдущей работы (если она занята выполнением предыдущей работы); 7) времена выполнения всех работ j на всех ступенях i точно известны и заданы матрицей времен работ $A=\|a_{ij}\|, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$; 8) требуется найти порядок P прохождения работ через систему, при котором общее время выполнения всех работ $T(P)$ минимально, т.е. оптимальный по быстродействию порядок работ $P_{\text{опт}}$.

Задача синтеза оптимального расписания работ в системе с переменным порядком выполнения работ отличается от изложенной задачи, во-первых, заменой пп. 5 и 8 на 5' и 8' соответственно, все работы проходят последовательные ступени $1,2,...,m$ в соответствующем порядке $P_1,P_2,...,P_m$, где в общем случае $P_i \neq P_j$ при $i \neq j$; 8') требуется найти набор $P=(P_1,P_2,...,P_m)$ порядков прохождения работ через систему, при котором общее время выполнения всех работ $T(P)$ минимально (оптимальный по быстродействию набор $P_{\text{опт}}$). Во-вторых, в формулировку новой задачи вводятся три новых пункта: 9) между любыми 2 соседними ступенями $i,i+1$ происходит преобразование порядка P_i, в котором работы проходят ступень i, в порядок P_{i+1} прохождения ими ступени $i+1$, причем времена преобразования $B(P_i,P_{i+1})$ для всех пар порядков (P_i,P_{i+1}) точно известны и заданы матрицей времен преобразований $B=\|B(P_i,P_{i+1})\|$; 10) преобразование порядка работ $P_i \to P_{i+1}$ начинается сразу после прохождения всех n работ через ступень i; 11) совокупность работ, переставленная после очередной ступени i в новом порядке P_{i+1}, немедленно подается в этом порядке на следующую ступень $i+1$ и обрабатывается дальше так, как если бы это была 1-я ступень. Глобальная задача синтеза оптимального расписания работ в конвейерной системе заключается в выборе лучшего по быстродействию из расписаний с постоянным и переменным порядками выполнения работ.

При формулировке пп. 9, 10 исходим из того, что преобразование порядка следования работ на очередной i-й ступени должно осуществляться путем одновременной перестановки всех n работ. Действительно, в общем случае преобразование порядка следования работ требует перестановки всех n работ. Причем только одновременность этой перестановки может обеспечить достаточно малое время преобразования и тем самым возможность уменьшения общего времени выполнения всех работ при переходе от постоянного порядка их прохождения через систему к переменному. В случаях, когда работы означают обслуживание людей, участие всех работ в перестановке понимается и в том смысле, что каждый человек должен дать согласие на преобразование порядка обслуживания, даже если его лично это преобразование не коснется.

2 Идея решения

Основную идею решения покажем для простейшего случая, когда порядок следования работ через систему может меняться только один раз, на некоторой r-й ступени. Тогда переменный порядок прохождения работ через систему имеет вид $P_{\text{пе}} = (P_1, P_2)$, где P_1 – порядок следования работ через ступени $1,\dots,r$, а P_2 – порядок следования через ступени $r+1,\dots,m$, где в общем случае $P_1 \neq P_2$. Общее время $T(A, P_{\text{пе}})$ выполнения всех работ в данной системе

$$T\left(A, P_{\text{пе}}\right) = T\left[A\begin{pmatrix}1\\ r\end{pmatrix}, P_1\right] + T\left[A\begin{pmatrix}r+1\\ m\end{pmatrix}, P_2\right] + B\left(P_1, P_2\right). \qquad (1)$$

Здесь $T\left[A\begin{pmatrix}1\\ r\end{pmatrix}, P_1\right]$ – время выполнения всех работ в подсистеме 1, образованной ступенями $1,\dots,r$ (матрица времен работ этой подсистемы $A\begin{pmatrix}1\\ r\end{pmatrix}$ образована строками $1,\dots,r$ матрицы времен работ всей системы A), $T\left[A\begin{pmatrix}r+1\\ m\end{pmatrix}, P_2\right]$ – время выполнения всех работ в подсистеме 2, образованной ступенями $r+1,\dots,m$ (матрица времен работ этой подсистемы $A\begin{pmatrix}r+1\\ m\end{pmatrix}$ образована строками $r+1,\dots,m$ матрицы A), а $B\left(P_1, P_2\right)$ – время преобразования порядка работ P_1 в P_2, при переходе с r-й на $(r+1)$-ю ступень.

Оптимизация переменного порядка работ в системе $P_{\text{пе}}$ в силу независимости подсистем 1, 2 сводится к оптимизации порядков работ в указанных подсистемах, т.е. $P_{\text{пе,опт}} = (P_{1,\text{опт}}, P_{2,\text{опт}})$. Оптимальные постоянные порядки работ $P_{1,\text{опт}}, P_{2,\text{опт}}$ в подсистемах 1, 2 можно найти общеизвестными методами построения оптимальных расписаний для постоянного порядка работ [4–7, 10]. После этого методами [4–7, 10] можно вычислить соответствующие минимальные времена $T[\cdot]$ выполнения всех работ в подсистемах 1, 2, а затем по формуле (1) минимальное время $T(\cdot)$ выполнения всех работ в системе. Для того, чтобы принять оптимальный переменный порядок $P_{\text{пе,опт}}$ за глобально оптимальный порядок $P_{\text{опт}}$ прохождения работ через систему, надо сравнить его с оптимальным постоянным порядком $P_{\text{по,опт}}$ работ в системе. Если при этом окажется, что соответствующее минимальное время $T(A, P_{\text{по,опт}})$ выполнения всех работ в системе таково, что $T(A, P_{\text{пе,опт}}) < T(A, P_{\text{по,опт}})$ или с учетом (1)

$$T\left[A\binom{1}{r}, P_{1,\text{опт}}\right] + T\left[A\binom{r+1}{m}, P_{2,\text{опт}}\right] + B\left(P_{1,\text{опт}}, P_{2,\text{опт}}\right) < T\left(A, P_{\text{по,опт}}\right), \tag{2}$$

то принимаем $P_{\text{пе,опт}}$ за $P_{\text{опт}}$, т.е. в случае выполнения неравенства (2) глобально оптимальным порядком прохождения работ через систему $P_{\text{опт}}$ является оптимальный переменный порядок $P_{\text{пе,опт}}$. Если же окажется, что $T(A, P_{\text{пе,опт}}) \geq$ $\geq T(A, P_{\text{по,опт}})$, так что выполнено противоположное (2) неравенство, то принимаем $P_{\text{по,опт}}$ за $P_{\text{опт}}$. Т.е. в случае выполнения неравенства, противоположного (2), глобально оптимальным порядком прохождения работ через систему $P_{\text{опт}}$ является оптимальный постоянный порядок $P_{\text{по,опт}}$. Другими словами, в этом случае для увеличения быстродействия системы нет необходимости прибегать к изменению порядка выполнения работ при их прохождении через систему – такое изменение может только ухудшить быстродействие.

Время $T(A, P)$ выполнения всех работ в системе с матрицей времен работ A и постоянным порядком следования работ P определяем по формуле [10]

$$T(A, P) = A^{\vee}(P), \tag{3}$$

где $A(P)$ – матрица A, в которой столбцы переставлены в порядке P, а $A^{\vee}(P)$ – логический определитель (**ЛО**) от этой матрицы, являющийся ее числовой характеристикой и вводимый так. Пусть $A = \left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$ – любая прямоугольная матрица с вещественными элементами a_{ij}. Тогда ЛО $A^{\vee}$ от матрицы A есть максимальная из сумм элементов на путях из левой верхней в правую нижнюю клетку A, где каждый шаг пути направлен вправо или вниз [10]. Вычисляется ЛО по итеративному алгоритму, на каждом шаге которого вычисляется очередной элемент A^{*}_{rs} новой матрицы $A^{*} = \left\|A^{*}_{ij}\right\|_{m\times n}$, используя соотношение

$$A^{*}_{rs} = (A^{*}_{r-1,s} \vee A^{*}_{r,s-1}) + a_{rs} \qquad (\vee - \text{операция max}), \tag{4}$$

пока не будет вычислен правый нижний элемент A^{*}_{mn}, равный искомому ЛО $A^{\vee}$. Например,

$$A^{\vee} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}^{\vee} = \begin{Vmatrix} 2^{\underline{|2}} & 3^{\underline{|5}} & 5^{\underline{|10}} \\ 3^{\underline{|5}} & 2^{\underline{|7}} & 1^{\underline{|11}} \\ 5^{\underline{|10}} & 4^{\underline{|14}} & 2^{\underline{|16}} \end{Vmatrix} = 16 \text{ (вычисления показаны справа над элементами } a_{ij}\text{)}.$$

Оптимальный постоянный порядок $P_{\text{по,опт}}$ прохождения работ через систему с матрицей времен работ A находится так [10]. Вводим двухстолбцевые ЛО из всевозможных пар соответственных участков i-го и j-го столбцов матрицы A

$$A^{\vee}_{sr}(i, j) = \begin{vmatrix} a_{si} & a_{sj} \\ - & - \\ a_{ri} & a_{rj} \end{vmatrix}^{\vee}, \quad 1 \leq s \leq r \leq m. \tag{5}$$

Тогда для оптимальности порядка работ $P = (i_1, ..., i, j, ..., i_n)$, соответствующего порядку столбцов в матрице A, необходимо выполнение для любых соседних работ i, j системы неравенств

$$
\left.
\begin{array}{l}
A_{12}^{\vee}(i,j) \le A_{12}^{\vee}(j,i) \ \text{ или} \\
A_{s3}^{\vee}(i,j) \le A_{s3}^{\vee}(j,i), \ \ s=\overline{1,2}\,\} \ \text{или} \\
\text{--------------------------------} \\
A_{sm}^{\vee}(i,j) \le A_{sm}^{\vee}(j,i), \ \ s=\overline{1,m-1}\,\}.
\end{array}
\right. \qquad (6)
$$

Для отыскания $P_{\text{по,опт}}$ с помощью условий (6) нужно: 1) для каждой упорядоченной пары (i,j) столбцов матрицы A проверить выполнение условий (6); 2) построить орграф Γ приоритетов работ с вершинами, соответствующими столбцам, и дугами $i \to j$ между вершинами i, j, для которых упорядоченные пары столбцов (i,j) удовлетворяют (6); 3) найти в Γ все гамильтоновы пути, каждый путь определит некоторый порядок столбцов P в A; 4) для каждого найденного порядка столбцов P в A вычислить по алгоритму (4) соответствующий ЛО $A^{\vee}(P)$; 5) найти порядок P, для которого $A^{\vee}(P) = \min$. Это согласно (3) и будет $P_{\text{по,опт}}$.

Изложенный алгоритм позволяет находить также оптимальные постоянные порядки $P_{1,\text{опт}}, P_{2,\text{опт}}$ прохождения работ через подсистемы 1, 2: в первом случае матрица времен работ есть $A\begin{pmatrix}1\\ r\end{pmatrix}$, во втором $A\begin{pmatrix}r+1\\ m\end{pmatrix}$. По найденным $P_{\text{по,опт}}, P_{1,\text{опт}}$, $P_{2,\text{опт}}$ находим времена выполнения работ $T(\square)$ [по формуле (3)] и время преобразования порядка работ $B(\square)$, фигурирующие в неравенстве (2). Это позволяет проводить глобальную оптимизацию порядка выполнения работ в конвейерной системе, не ограничиваясь одним определенным классом порядков работ, в котором ищется оптимум (постоянных или переменных порядков).

Рассмотрение общего случая, когда порядок следования работ через систему может меняться несколько раз (на нескольких ступенях), аналогично.

3 Некоторые примеры

Пример 1 [1]. Рассмотрим конвейерную систему с 4 ступенями, 2 работами и матрицей времен работ $A = \begin{Vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{Vmatrix}$. Согласно [1] оптимальный порядок следования работ в этой системе состоит из двух постоянных порядков соответственно на первых двух и последних двух ступенях, с изменением порядка при переходе со 2-й ступени на 3-ю. Проанализируем систему изложенным методом. Найдем оптимальный постоянный порядок выполнения работ $P_{\text{по,опт}}$. Проверяем условия (6). Они выполнены для обеих пар работ: $(1,2)$ и $(2,1)$. Соответствующий орграф приоритетов работ Г дан на рис. Из него видно, что имеется 2 гамильтоновых пути и, соответственно, 2 порядка столбцов в A: $P_1 = (1,2)$ и $P_2 = (2,1)$. Для каждого по алгоритму (4) вычисляем ЛО: $A^{\vee}(P_1) = 15, A^{\vee}(P_2) = 15$. Так как ЛО равны, то по (3) равны и времена $T(A,P_1) = T(A,P_2) = 15$, и любой из порядков P_1, P_2 можно принять за $P_{\text{по,опт}}$.

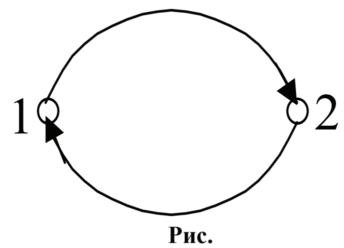

Рис.

Найдем оптимальный переменный

порядок выполнения работ $P_{\text{пе,опт}}$. Так как на первых двух ступенях этот порядок должен быть постоянным, как и на последних двух ступенях, ищем его в виде $P_{\text{пе,опт}} = (P_{1,\text{опт}}, P_{2,\text{опт}})$, где $P_{i,\text{опт}}$ – оптимальный постоянный порядок работ в i-й подсистеме $(i = 1,2)$, где 1-я подсистема включает 1-ю и 2-ю ступени, а 2-я – 3-ю и 4-ю, с преобразованием порядка между 1-й и 2-й подсистемами. Время преобразования B. Аналогично изложенному находим $P_{1,\text{опт}} = (1,2), P_{2,\text{опт}} =$ $= (2,1), T\left[A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, P_{1,\text{опт}}\right] = 7, T\left[A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, P_{2,\text{опт}}\right] = 7$.

Теперь неравенство (2) приобретает вид $7 + 7 + B < 15$ или $B < 1$. Таким образом, найденный оптимальный переменный порядок следования работ $P_{\text{пе,опт}} = (P_{1,\text{опт}}, P_{2,\text{опт}})$, где $P_{1,\text{опт}} = \ = (1,2), P_{2,\text{опт}} = (2,1)$, является глобально оптимальным только при $B < 1$. Если же $B \ge 1$, то глобально оптимальным является любой из 2 оптимальных постоянных порядков $P_1 = (1,2), P_2 = (2,1)$. Этот результат дополняет и уточняет результаты [1].

Пример 2 [9]. Имеем конвейерную систему с 4 ступенями, 3 работами и матрицей времен работ $A = \begin{Vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{Vmatrix}$. В литературе считается ([9] и другие работы), что глобально оптимальный порядок следования работ здесь есть переменный порядок $P_{\text{пе,опт}} = (P_1, P_2)$, где $P_1 = (3,2,1)$, $P_2 = (2,3,1)$, т.е. он состоит из постоянных порядков P_1 на первых двух и P_2 на последних двух ступенях, с преобразованием порядка между 2-й и 3-й ступенями.

Проанализируем систему аналогично примеру 1. Оптимальный постоянный порядок выполнения работ в системе $P_{\text{по,опт}} = P_1 = (2,3,1)$ или $P_2 = (3,2,1)$. Соответствующие времена выполнения $T(A, P_1) = A^{\vee}(P_1) = 16, T(A, P_2) = A^{\vee}(P_2) = 16$. Оптимальный переменный порядок выполнения работ, как и в примере 1, ищем в виде $P_{\text{пе,опт}} = (P_{1,\text{опт}}, P_{2,\text{опт}})$, где $P_{1,\text{опт}}$ и $P_{2,\text{опт}}$ – оптимальные постоянные порядки выполнения работ на первых двух и последних двух ступенях. Находим $P_{1,\text{опт}} = (2,3,1)$ или (3, 2, 1), $P_{2,\text{опт}} = (1,2,3)$ или (2, 3, 1), или (2, 3, 1), $T\left[A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, P_{1,\text{опт}}\right] = 13, T\left[A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, P_{2,\text{опт}}\right] = 7$.

Теперь неравенство (2) конкретиз ируется как $13 + 7 + B < 16$, где B – время преобразования $P_{1,\text{опт}} \to P_{2,\text{опт}}$. Полученное неравенство невозможно при любом $B \ge 0$. Это означает, что глобально оптимальный порядок следования работ через систему есть не переменный $P_{\text{пе,опт}}$, а постоянный оптимальный порядок $P_{\text{по,опт}}$, т.е. $P_1 = (2,3,1)$ или $P_2 = (3,2,1)$, со временем выполнения всех работ $T = 16$. Переменный же порядок $P_{\text{пе,опт}}$ имеет большее время выполнения даже при $B = 0$, а именно, по формуле (1) $T = 13 + 7 = 20$. Этот результат исправляет и уточняет известные из литературы результаты.

Заключение

Построена адекватная модель процесса выполнения работ в конвейерных системах при допустимости изменения порядка работ в процессе их движения от одной ступени системы к другой. Это позволяет более точно, с учетом указанных изменений, синтезировать и анализировать расписания выполнения работ в этих системах.

Список литературы

1. Johnson S.M. Optimal two- and three stage production schedules with set-up times included // Nav. Res. Log. Quart. 1954. V. 1, No. 1. Pp. 61–68.
2. Хоботов Е.Н. Некоторые замечания к теореме Джонсона // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 10. – С. 186–187.
3. Левин В.И. К задаче Беллмана–Джонсона // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1999. – № 1. – С. 99–105.
4. Португал В.М., Семенов А.И. Теория расписаний. – М.: Знание, 1972.
5. Конвей Р.В., Максвелл В.Л., Миллер Л.В. Теория расписаний. – М.: Наука, 1975.
6. Танаев В.С., Шкурба В.В. Введение в теорию расписаний. – М.: Наука, 1975.
7. Исследование операций. Т. 2. Модели и применения / Под ред. Дж. Моудера и С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981.
8. Мирецкий И.Ю. Оптимизационная модель конвейерной системы // Вестник ТГТУ. – 2000. – Т. 6, № 3. – С. 459–465.
9. Мирецкий И.Ю. Конвейерная задача: алгоритмы синтеза оптимальных расписаний // Вестник ТГТУ. – 2001. – Т. 7, № 4. – С. 634–639.
10. Левин В.И. Структурно-логические методы исследования сложных систем. – М.: Наука, 1987.

Bellman-Johnson Problem for Conveyor Systems with Changing Work Order

V.I. Levin

Penza Technological Institute

Key words and phrases: optimum planning; schedule theory; system with sequential steps.

Abstract: Refinement of setting and solving of Bellman-Johnson problem for multi-step sequential systems in terms of changing work order is given.

Bellman- Johnson Aufgabe für die Fließsysteme mit der variablen Arbeitsordnung

Zusammenfassung: Es ist die Präzisierung der Stellung und der Lösung der Bellman-Johnson Aufgabe für die mehrstufigen aufeinanderfolgenden Systeme unter den Bedingungen der variabelen Ordnung der Arbeiterfüllung gegeben.

Problème de Bellman-Johnson pour les systèmes de chaîne avec le régime variable du fonctionnement

Résumé: Est donnée la précision de la formation et de la résolution du problème de Bellman-Johnson pour les systèmes à plusieurs niveaux dans les conditions de régime variable du fonctionnement.