УДК 53.088:536.2.023

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ, АНАЛОГИЧНЫМ РЕГУЛЯРНОМУ РЕЖИМУ 1 РОДА

С.В. Пономарев, П.В. Балабанов

Кафедра “Автоматизированные системы и приборы”, ТГТУ

Представлена членом редколлегии профессором С.В. Мищенко

Ключевые слова и фразы: погрешность косвенного измерения; погрешность прямого измерения; систематическая погрешность; случайная погрешность; температуропроводность; теплопроводность.

Аннотация: Для ранее описанного метода измерения теплофизических свойств регенеративных продуктов, аналогичного регулярному режиму 1 рода, приведена оценка погрешности измерения теплопроводности и температуропроводности, а также даны рекомендации по уменьшению систематической и случайной составляющих погрешности измерения.

Обозначения

a – температуропроводность, м^2/с;
l_1, l_2, l_3, l_4 – координаты границ слоев измерительного устройства, м;
T_0 – температура термостатирования, К;
$\overline{T}$ – среднеинтегральная температура нагревателя, К;
$\overline{T_{\text{ст}}}$ – стационарная среднеинтегральная температура нагревателя, К;
W_1 – объемная плотность источника тепла, Вт/м^3;
$Z_{(1+\alpha)/2}$ – квантиль интегральной функции нормированного нормального распределения;
λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);
Θ – безразмерная температура;
Fo – число Фурье.

Измерению значения любой физической величины неизбежно сопутствуют погрешности, возникающие по ряду причин на различных этапах измерения или обработки экспериментальных данных. Данная статья посвящена оценке погрешности теплопроводности и температуропроводности, измеренных по методу, описанному в работе [1].

Суть этого метода заключается в подводе объемной плотности W_1 к источнику теплоты за счет подачи постоянной мощности на плоский нагреватель, расположенный между образцами исследуемого материала и отделенный от них плоскими защитными оболочками, образующими слои в физической модели измерительного устройства. На внешних поверхностях исследуемых образцов поддерживается постоянная температура T_0. Среднеинтегральная температура $\overline{T}$ нагревателя измеряется термометром сопротивления, изготовленным из медной проволоки, навитой по спирали Архимеда. При достижении постоянства во времени среднеинтегральной температуры $\overline{T_{\text{ст}}}$ регистрируется разность $\overline{T_{\text{ст}}} - T_0$, и теплопроводность λ исследуемого вещества вычисляется по формуле

$$\lambda = \frac{\lambda_3 (l_4 - l_3)}{\frac{\lambda_3}{W_1 l_1}(\overline{T_{\text{ст}}} - T_0) - \frac{1}{3}\frac{\lambda_3}{\lambda_1} l_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}(l_2 - l_1) + l_2 - l_3}, \tag{1}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 – известные теплопроводности слоев измерительного устройства; l_1, l_2, l_3, l_4 – координаты границ слоев измерительного устройства.

После достижения стационарной температуры $\overline{T_{\text{ст}}}$ нагреватель отключают и в моменты времени τ_j с шагом по времени $\Delta\tau$ регистрируют разность температур $(\overline{T} - T_0)_j$ до момента, когда $\overline{T} - T_0$ станет приближенно равна нулю. Для каждого τ_j рассчитывают значение безразмерной температуры $\Theta_j = \left(\overline{T} - T_0\right)_j \Big/ \left(\overline{T_{\text{ст}}} - T_0\right)$ и число Фурье $\text{Fo}_j = a_3 \tau_j \big/ l_4^2$, где a_3 – значение температуропроводности третьего слоя. Затем находят значение ε_1^2 как тангенс угла наклона прямолинейного участка зависимости $\ln\left(\Theta_j\right) = f\left(\text{Fo}_j\right)$, $j = 1, 2, ..., k$. Подставив найденное значение ε_1^2 в задачу Штурма-Лиувилля [1], численным методом подбирают значение искомой температуропроводности a, удовлетворяющее указанной задаче.

Как видно из формулы (1), при вычислении значения теплопроводности λ источниками погрешностей являются:

- погрешности прямого измерения величин l_1, l_2, l_3, l_4;
- погрешности задания свойств слоев λ_1, λ_2, λ_3;
- погрешности вычисления значения объемной плотности источника тепла W_1;
- погрешности измерения температур $\overline{T_{\text{ст}}}$ и T_0.

Предположим, что свойства слоев λ_1, λ_2, λ_3 хорошо известны, а остальные величины, входящие в формулу (1) являются результатами прямых измерений. Найдем погрешность определения теплопроводности λ как результата косвенного измерения. Запишем уравнение (1) в общем виде

$$\lambda = F\left(l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4, W_1, \overline{T_{\text{ст}}} - T_0\right). \tag{2}$$

Согласно [2] результат косвенного измерения записывается в виде

$$\lambda = \overline{\lambda} \pm t_p \sigma_{\overline{\lambda}},\ P = \alpha,$$

где $\overline{\lambda}$ – среднее арифметическое значение теплопроводности, полученное при подстановке в формулу (1) средних арифметических значений аргументов; t_p – значение коэффициента Стьюдента, определяемое при заданной доверительной вероятности $P = \alpha$; $\sigma_{\overline{\lambda}}$ – среднее квадратическое отклонение средних арифметических, определяемое по формуле

$$\sigma_{\bar{\lambda}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{4} E_{l_j}^2 + E_{W_1}^2 + E_{\left(\overline{T_{\text{ст}}} - T_0\right)}^2} \,. \tag{3}$$

Слагаемые $\sum_{j=1}^{4} E_{l_j}$, E_{W_1}, $E_{\left(\overline{T_{\text{ст}}} - T_0\right)}$ называются частными погрешностями измерения и равны произведению частных производных уравнения (2) косвенного измерения на средние квадратические отклонения средних арифметических значений результатов измерения соответствующих аргументов

$$E_{l_j} = \left(\frac{\partial F}{\partial l_j}\right)\sigma_{\bar{l}_j}, \; j = \overline{1,4}\,; \tag{4}$$

$$E_{W_1} = \left(\frac{\partial F}{\partial W_1}\right)\sigma_{\overline{W_1}}\,; \tag{5}$$

$$E_{\left(\bar{T} - T_0\right)} = \left(\frac{\partial F}{\partial\left(\bar{T} - T_0\right)}\right)\sigma_{\left(\bar{T} - T_0\right)}\,. \tag{6}$$

Значение частных производных вычисляется для средних арифметических значений аргументов.

Таким образом, проведя n измерений величин, входящих в формулу (2), подсчитав их средние арифметические значения и среднее квадратическое отклонение среднего арифметического, можно вычислить значение соответствующих частных производных и частных погрешностей

$$\frac{\partial F}{\partial l_1} = \frac{-l_1^2\left(\lambda_3\left[l_4 - l_3\right]\left[\frac{\lambda_3}{\lambda_2} - \frac{1}{3}\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right]\right) + \lambda_3^2\left(l_4 - l_3\right)\left(\overline{T_{\text{ст}}} - T_0\right)/W_1}{\left\{\frac{\lambda_3}{W_1}\left(\overline{T_{\text{ст}}} - T_0\right) + l_1^2\left[\frac{\lambda_3}{\lambda_2} - \frac{1}{3}\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right] + l_1\left(l_2 - l_3 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}l_2\right)\right\}^2}\,; \tag{7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial l_2} = \frac{-\lambda_3\left[l_4 - l_3\right]\left[1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right]}{\left\{\frac{\lambda_3}{W_1 l_1}\left(\overline{T_{\text{ст}}} - T_0\right) - \frac{1}{3}\frac{\lambda_3}{\lambda_1}l_1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}l_1 - l_3 + l_2\left(1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)\right\}^2}\,; \tag{8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial l_3} = \frac{\lambda_3 l_4 - \left[\frac{\lambda_3}{W_1 l_1}\left(\overline{T_{\text{ст}}} - T_0\right) - \frac{1}{3}\frac{\lambda_3}{\lambda_1}l_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\left(l_2 - l_1\right) + l_2\right]}{\left\{\frac{\lambda_3}{W_1 l_1}\left(\overline{T_{\text{ст}}} - T_0\right) - \frac{1}{3}\frac{\lambda_3}{\lambda_1}l_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\left(l_2 - l_1\right) + \left(l_2 - l_3\right)\right\}^2}\,; \tag{9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial l_4} = \frac{\lambda_3}{\frac{\lambda_3}{W_1 l_1}\left(\overline{T_{\text{ст}}} - T_0\right) - \frac{1}{3}\frac{\lambda_3}{\lambda_1}l_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\left(l_2 - l_1\right) + \left(l_2 - l_3\right)}\,; \tag{10}$$

$$\frac{\partial F}{\partial W_1} = \frac{\lambda_3^2 (l_4 - l_3)\left(\overline{T_{\text{ст}}} - T_0\right)/l_1}{\left\{\frac{\lambda_3}{l_1}\left(\overline{T_{\text{ст}}} - T_0\right) + W_1 (l_2 - l_3) - \frac{1}{3}\frac{\lambda_3}{\lambda_1} l_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}(l_2 - l_1)\right\}^2}; \tag{11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\left(\overline{T_{\text{ст}}} - T_0\right)} = \frac{-\lambda_3^2 (l_4 - l_3)/(W_1 l_1)}{\left\{\frac{\lambda_3}{W_1 l_1}\left(\overline{T_{\text{ст}}} - T_0\right) - \frac{1}{3}\frac{\lambda_3}{\lambda_1} l_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}(l_2 - l_1) + (l_2 - l_3)\right\}^2}. \tag{12}$$

После этого вычисляется среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\bar{\lambda}}$ по формуле (3) и доверительный интервал $\pm t_p \sigma_{\bar{\lambda}}$. Результат измерения записывается в виде $\lambda = \bar{\lambda} \pm t_p \sigma_{\bar{\lambda}}$, $P = \alpha$.

Следующие рекомендации позволят уменьшить погрешности измерения теплопроводности:

1) при многократном измерении величин l_j среднее квадратическое отклонение среднего арифметического $\sigma_{\bar{l}_j}$ уменьшится.

2) при достаточно стабильном напряжении питания нагревателя погрешность вычисления W_1 будет мала.

3) погрешности, возникающие из-за не учета наличия контактных тепловых сопротивлений между слоями, из-за допущения о равномерности теплового потока, из-за недостаточного знания действительных значений свойств слоев λ_1, λ_2, λ_3, приводят к возникновению систематической погрешности, устранить которую можно введением поправки.

Нахождение поправки осуществляется следующим образом. Зная действительное значение $\lambda^{\text{д}}$ какого-либо вещества, из экспериментов с этим веществом находят экспериментальное значение теплопроводности $\lambda^{\text{э}}$. Поправка q вычисляется из выражения $q = \lambda^{\text{д}} - \lambda^{\text{э}}$. Исправленный результат измерения получается прибавлением к неисправленному результату поправки.

Показанная выше методика использовалась при обработке результатов измерения свойств полиметилметакрилата по ГОСТ 15809–70. В результате измерений была получена поправка $q = -0{,}026$ Вт/(м·К). При обработке экспериментальных результатов измерения получено следующее исправленное значение теплопроводности $\lambda = 0{,}195 \pm 0{,}01$ Вт/(м·К), $P = 95\ \%$. Полученную поправку мы использовали для исправления результатов измерения свойств текстолита по ГОСТ 2910–74. В результате получен следующий результат $\lambda = 0{,}313 \pm 0{,}015$ Вт/(м·К), $P = 95\ \%$. Сравнивая полученные данные с табличными данными, можно сделать вывод, что погрешность измерения свойств теплопроводности в обоих случаях не превышает 5 %.

Проанализируем погрешности, возникающие при определении температуропроводности. К ним относятся:

1) погрешность измерения перепада температур $\bar{T} - T_0$;

2) погрешность, возникающая при вычислении числа Фурье $\text{Fo}_j = a_3 \tau_j / l_4^2$ из-за некоторого несоответствия значения a_3, принятого в расчетах, действительному значению;

3) погрешность вычисления первого собственного значения $\varepsilon_1^2 = \dfrac{\ln\Theta_{j+1} - \ln\Theta_j}{\mathrm{Fo}_{j+1} - \mathrm{Fo}_j}$;

4) при подстановке ε_1^2 в задачу Штурма-Лиувилля и численном ее решении, возникает некоторая погрешность численного метода. Но при достаточно малом шаге вычислений и использовании устойчивого численного метода можно пренебречь этой погрешностью.

Экспериментальные данные показывают, что погрешность определения температуропроводности будет иметь случайный характер и определяется погрешностью нахождения ε_1^2. Оценим погрешность измерения температуропроводности как результата прямых измерений. Обработка прямых измерений ведется в соответствии с ГОСТ 8.207–76. Для оценки погрешности измерения температуропроводности было проведено $n = 15$ измерений температуропроводности полиметилметакрилата, результаты которых приведены в таблице. Величина $\bar{a}$ есть среднее арифметическое значение температуропроводности, полученное по результатам 15 измерений.

Как уже было сказано, систематическая составляющая погрешности в результатах измерения температуропроводности очень мала, поэтому вводить поправку в результаты измерения нет нужды. Дальнейшая обработка результатов измерения выполняется в следующей последовательности.

1. Вычисляем среднее арифметическое значение $\bar{a}$

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{15} a_i = 1,04 \cdot 10^{-7}, \text{ м}^2/\text{с}.$$

2. Вычисляем среднее квадратическое отклонение ряда наблюдений S_a и среднее квадратическое отклонение среднего арифметического $S_{\bar{a}}$:

$$S_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15} (a_i - \bar{a})^2}{n-1}} = 0,074 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}, \qquad S_{\bar{a}} = S_a \big/ \sqrt{n} = 0,02 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}.$$

3. Проверяем гипотезу о нормальности распределения результатов измерения на основании двух критериев [2].

Таблица

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a \cdot 10^7$, м²/с	1,29	1,01	1,08	0,98	1,06	1,05	1,03	1,08	0,99
$\lvert a_i - \bar{a} \rvert \cdot 10^7$, м²/с	0,25	0,03	0,04	0,05	0,02	0,01	0,01	0,04	0,05

№ опыта	10	11	12	13	14	15
$a \cdot 10^7$, м²/с	1,01	1,03	0,99	1,03	1,01	1,03
$\lvert a_i - \bar{a} \rvert \cdot 10^7$, м²/с	0,03	0,01	0,05	0,02	0,03	0,01

Первый критерий основан на вычислении статистики $d_a = = \sum_{i=1}^{n} |a_i - \bar{a}| \Big/ \sqrt{n \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})^2}$ и проверке, лежит ли вычисленное значение в интервале $d_{1-q_1/2} < d_a \le d_{q_1/2}$, где $d_{1-q_1/2}, d_{q_1/2}$ – квантили распределения статистики d, определяемые из таблиц по значению величины уровня значимости q_1. Поскольку проверка гипотезы основывается на опытных данных, то при принятии решения о правдоподобности гипотезы всегда возможны ошибки. Отвергая в действительности верную гипотезу, мы совершаем ошибку первого рода. Вероятность этой ошибки и определяет величина q_1. На основании опытных данных было получено $d_a = 0,704$, $d_{1-q_1/2} = 0,6981$, $d_{q_1/2} = 0,904$ при $q_1 = 0,05$, поэтому, в соответствии с первым критерием, гипотеза о нормальности результатов измерения температуропроводности принимается.

На основании второго критерия гипотеза о нормальности распределения принимается, если не более m_a разностей $|a_i - \bar{a}|$ превосходят уровень $Z_{(1+\alpha)/2} S_a$, где $Z_{(1+\alpha)/2}$ – квантиль интегральной функции нормированного нормального распределения, определяемая из таблицы по значению величин m_a и α. Значение этих величин находится из таблиц при заданном числе измерений и уровне значимости. Для наших данных было получено $m_a = 1$ и $\alpha = 0,98$, $Z_{0,99} = 2,3267$, $Z_{0,99} S_a = 0,1722 \cdot 10^{-7}$ м^2/с. Анализируя данные табл., приходим к выводу, что и по второму критерию распределение результатов измерения подчиняется нормальному закону распределения.

4. Для проверки того, содержит ли результат измерения грубую погрешность, вычисляем значение критериев:

$$\nu_{\max} = \frac{a_{\max} - \bar{a}}{S_a}; \quad \nu_{\min} = \frac{\bar{a} - a_{\min}}{S_a},$$

где $a_{\max}, a_{\min}$ – максимальное и минимальное значение результата измерения, проверяемого на наличие грубой погрешности. Если $a_{\max} > \nu_{\max}$, то результат $a_{\max}$ следует рассматривать, как содержащий грубую погрешность. Проверкой установлено, что первый результат измерения содержит грубую погрешность и должен быть исключен из ряда экспериментальных данных. Пересчитав среднее арифметическое, среднее квадратическое отклонение отдельного результата измерения и среднее квадратическое отклонение среднего арифметического результатов, получим: $\bar{a} = 1,03 \cdot 10^{-7}$ м^2/с, $S_a = 0,034 \cdot 10^{-7}$ м^2/с, $S_{\bar{a}} = 0,009 \cdot 10^{-7}$ м^2/с.

5. Для доверительной вероятности $P = 95$ % определяем значение доверительных границ среднего арифметического $t_p S_{\bar{a}} = 2,131 \cdot 0,009 \cdot 10^{-7} = = 0,019 \cdot 10^{-7}$ м^2/с и единичного результата измерения $t_p S_a = 2,131 \cdot 0,034 \cdot 10^{-7} = = 0,072 \cdot 10^{-7}$ м^2/с.

Зная действительное значение температуропроводности полиметилметакрилата $a_д = 1,06 \cdot 10^{-7}$ м^2/с, можно рассчитать:

- случайную относительную погрешность отдельных результатов измерения $\delta_a^{\text{сл}} = \frac{t_p S_a}{a_{\text{д}}} 100\ \% = \frac{0,072 \cdot 10^{-7}}{1,06 \cdot 10^{-7}} 100\ \% \approx 7\ \%$;

- случайную относительную погрешность среднего арифметического результата измерения

$$\delta_a^{\text{сл}} = \frac{t_p S_{\overline{a}}}{a_{\text{д}}} 100\ \% = \frac{0,019 \cdot 10^{-7}}{1,06 \cdot 10^{-7}} 100\ \% \approx 2\ \%;$$

- систематическую относительную погрешность среднего арифметического результата измерения

$$\delta_a^{\text{сл}} = \frac{a_{\text{д}} - \overline{a}}{a_{\text{д}}} 100\ \% = \frac{1,06 \cdot 10^{-7} - 1,03 \cdot 10^{-7}}{1,06 \cdot 10^{-7}} 100\ \% \approx 3\ \%.$$

Таким образом, можно сделать следующие выводы. В результате измерения теплопроводности по методу [1] преобладает систематическая погрешность, которая устраняется путем введения поправки в результат измерения. После введения поправки погрешность вычисления теплопроводности не превысит 5 %. В результат измерения температуропроводности поправку вводить не требуется. Для получения более точного результата измерения следует проводить несколько измерений температуропроводности. Как показано на примере полиметилметакрилата, при 15 измерениях случайная относительная погрешность отдельного результатата измерения температуропроводности не превышает 7 %, а случайная относительная погрешность среднего арифметического результата измерения не превышает 2 %.

Список литературы

1. Математическая модель метода и устройства для измерения теплофизических свойств регенеративных веществ / П.В. Балабанов, С.В. Пономарев, Е.С. Пономарева // Труды ТГТУ: Сборник научных статей молодых ученых и студентов. 2002. – Вып. 11. – С. 13 – 17.

2. Бурдун Г.Д., Марков Б.Н. Основы метрологии. – М.: Изд-во стандартов, 1985. – 256 с.

Mathematical Processing of Results when Measuring Thermal Conductivity and Diffusivity Using the Method Similar to Regular Mode of 1 Type

S.V. Ponomarev, P.V. Balabanov

Department "Automated Systems and Devices", TSTU

Key words and phrases: indirect measurement error; direct measurement error; systematic error; unbiased error; thermal conductivity and diffusivity.

Abstract: For the method of measuring thermo-physical properties of regenerative products evaluation of measurement error of thermal conductivity and diffusivity as well as recommendations on reduction in systematic and unbiased components of measurement error are given.

Matematische Bearbeitung der Ergebnisse bei der Messung der Wärmeleitfähigkeit und der Temperaturleitfähigkeit von der Methode, die dem regelmäßigen Regime des ersten Types ähnlich ist

Zusammenfassung: Für die Methode der Messung der wärme-physikalischen Eigenschaften der Regenerativprodukte ist die Einschätzung des Fehlers der Messung der Wärmeleitfähigkeit und der Temperaturleitfähigkeit angeführt. Es sind die Empfehlungen nach der Verkleinerung der systematischen und zufälligen Komponenten des Meßfehlers gegeben.

Traitement mathématique des résultats au cours des mesures de la conductibilité calorifique et thermique par la méthode analogique au régime régulier du premier ordre

Résumé: Pour la méthode de la mesure des propriétés thermophysiques des produits régénératifs sont données l'évaluation des erreurs de la mesure de la conductibilité calorifique et thermique et les recommandations sur la diminution des composants systématiques et accidentelles occasitionnels des erreurs des mesures.
