УДК 517.928.4

О СЛАБО ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ ЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ КОЭФФИЦИЕНТОМ СТЕПЕННОГО ВИДА

В.И. Фомин

Кафедра прикладной математики и механики, ТГТУ

Представлена членом редколлегии профессором Г.М. Куликовым

Ключевые слова и фразы: банахово пространство; неограниченный линейный оператор; производящий оператор; полугруппа; решение; сильное вырождение; слабое вырождение.

Аннотация: В банаховом пространстве изучается задача Коши для сингулярного дифференциального уравнения первого порядка со слабо вырождающимся коэффициентом.

В банаховом пространстве E изучается уравнение

$$t^{\alpha} x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad 0 < t < \infty, \tag{1}$$

с неограниченным линейным оператором $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to E$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$; $f(t) \in \in C([0, \infty); E)$; $\alpha \in (0, \infty)$.

Для нахождения ограниченных в точке вырождения $t = 0$ решений уравнения (1) рассмотрим задачу вида

$$\begin{cases} t^{\alpha} x'(t) = Ax(t) + f(t), \ \ 0 < t < \infty, & (2) \\ \lim\limits_{t \to +0} x(t) = x_0, \ \ x_0 \in \mathcal{D}(A). & (3) \end{cases}$$

Теорема. Пусть A – производящий оператор полугруппы $U(t)$ класса C_0; $f(t) \in \in \mathcal{D}(A)$, $0 \le t < \infty$; $A f(t) \in C([0, \infty); E)$.

Тогда в случае слабой вырождаемости уравнения (1), т. е. при $0 < \alpha < 1$ задача (2), (3) имеет решение

$$x(t) = U\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)x_0 + \int_0^t U\left(\frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\frac{f(s)}{s^{\alpha}}\,ds. \tag{4}$$

Если тип ω полугруппы $U(t)$ отрицателен и $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то решение (4) ограничено на $(0, \infty)$.

Доказательство. Заменой

$$t = \left[(1-\alpha)\tau\right]^{1/(1-\alpha)}$$

уравнение (2) сводится к уравнению без вырождения:

$$u'(\tau) = Au(\tau) + g(\tau), \ \ 0 < t < \infty \ ,$$

где $u(\tau) := x\left(\left[(1-\alpha)\tau\right]^{1/(1-\alpha)}\right)$, $g(\tau) := f\left(\left[(1-\alpha)\tau\right]^{1/(1-\alpha)}\right)$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u'(\tau) = Au(\tau) + g(\tau), \ \ 0 \le \tau < \infty, & (5) \\ u(0) = x_0 \ . & (6) \end{cases}$$

Известно ([1, с. 166]), что задача (5), (6) имеет решение

$$u(\tau) = U(\tau)x_0 + \int_0^t U(\tau - \rho)g(\rho)d\rho.$$

Возвращаясь при $0 < \tau < \infty$ к переменной t, получаем формулу (4). Используя непрерывность решения $u(\tau)$, имеем:

$$\lim_{t \to +0} x(t) = \lim_{\tau \to +0} u(\tau) = u(0) = x_0 \, ,$$

т.е. решение (4) уравнения (2) удовлетворяет начальному условию (3).

Далее

$$\| x(t) \| \le \left\| U\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \right\| \cdot \| x_0 \| + \int_0^t \left\| U\left(\frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \right\| \frac{\| f(s) \|}{s^\alpha} ds \ . \tag{7}$$

Из (7) и оценки вида

$$\| U(t) \| \le M_\delta \exp(\omega_\delta t), \ \ 0 \le t < \infty,$$

где $M_\delta > 0$, $\omega_\delta = \omega + \delta$, δ – произвольное сколь угодно малое положительное число, получаем:

$$\| x(t) \| \le M_\delta \exp\left(\frac{\omega_\delta}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right) \| x_0 \| + M_\delta \cdot N(t) \int_0^t \exp\left(\omega_\delta \frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \frac{ds}{s^\alpha}, \tag{8}$$

где $N(t) = \max\limits_{0 \le s \le t} \| f(s) \|$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp\left(\omega_\delta \frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \frac{ds}{s^\alpha} &= \frac{1}{-\omega_\delta} \exp\left(\omega_\delta \frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\Bigg|_0^t = \\ &= \frac{1}{-\omega_\delta}\left[1 - \exp\left(\frac{\omega_\delta}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right)\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

В силу (8), (9)

$$\| x(t) \| \le M_\delta \exp\left(\frac{\omega_\delta}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right) \cdot \| x_0 \| + \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t) \left[1 - \exp\left(\frac{\omega_\delta}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right)\right]. \qquad (10)$$

Если ω <0, то за счет выбора δ можно считать, что $\omega_\delta < 0$. Тогда из (10) следует, что

$$\| x(t) \| \le M_\delta \| x_0 \| + \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t), \ 0 < \mathrm{t} < \infty . \qquad (11)$$

Из (11) видно, что если $f(t)$ ограничена на [0, ∞), то решение (4) ограничено на (0, ∞).

Теорема доказана.

Замечание 1. Если $f(t) \equiv f$, $0 \le t < \infty$; $f \in R(A)$ и оператор A обратим, то решение (4) можно записать в виде

$$x(t) = -A^{-1} f + U\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\left(x_0 + A^{-1} f\right). \qquad (12)$$

Действительно, в этом случае, используя известные соотношения ([1, с. 41])

$$U'(t)\, x = AU(t)\, x, \quad x \in \mathcal{D}(A);$$

$$AU(t)\, x = U(t)\, A\, x, \quad x \in \mathcal{D}(A),$$

имеем

$$\int_0^t U\left(\frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\frac{f}{s^\alpha} ds = \left| \mu = \frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right| = \int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} U(\mu) f d\mu = \int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} U(\mu) A(A^{-1} f) d\mu =$$

$$= \int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} AU(\mu)\left(A^{-1} f\right) d\mu = \int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \left[U(\mu)\left(A^{-1} f\right)\right]' d\mu = U(\mu)\left(A^{-1} f\right)\Big|_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} =$$

$$= U\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) A^{-1} f - A^{-1} f.$$

Получили

$$\int_0^t U\left(\frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\frac{f}{s^\alpha} ds = -A^{-1} f + U\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) A^{-1} f. \qquad (13)$$

В силу (13) решение (4) принимает вид (12).

Замечание 2. Если $f(t) \equiv f$, $0 \le t < \infty$; $f \in R(A)$ и оператор A обратим, то задача (2), (3) с начальным значением $x_0 = -A^{-1} f$ имеет стационарное решение $x(t) = -A^{-1} f$.

В случае сильной вырождаемости уравнения (1) (α ≥ 1) его ограниченное в точке вырождения $t = 0$ решение найдено методом малых стабилизирующих возмущений в [2], [3].

Список литературы

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
2. Фомин В.И. Малые возмущения сингулярного дифференциального уравнения с постоянным неограниченным операторным коэффициентом и переменной правой частью // Вестник ТГТУ. – 1997. – Т. 3, № 4. – С. 435 – 454.
3. Фомин В.И. Метод малых регулярных возмущений при исследовании сингулярных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 12. – С. 1712.

On a Weakly Degenerated Linear Differentiation Equation of the First Order in Banach Space

V.I. Fomin

Department of Applied Mathematics and Mechanics, TSTU

Key words and phrases: Banach space; generator; semi-group; strong degeneration; solution; unbounded linear operator; weak degeneration.

Abstract: Cauchy problem for singular differential equation of the first order with weakly degenerated coefficients in Banach space is analyzed.

Über die schwachausartende lineare Differentialgleichung der ersten Ordnung im Banachischen Raum

Zusammenfassung: Im Banachischen Raum wird die Koschy-Aufgabe für die singularischen Differentialgleichung der ersten Ordnung mit dem schwachausartenden Koeffizienten untersucht.

Sur l'équation différentielle linéaire du premier ordre faiblement dégénérante dans l'espace de Banach

Résumé: Le problème de Cauchy pour l'équation différentielle singulaire du premier ordre avec le coefficient faiblement dégénérant est étudié dans l'espace de Banach.
