

УДК 539.219.3:001.891.573

**К ВОПРОСУ О ПОГРЕШНОСТЯХ ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА
ДИФФУЗИИ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ**

С.В. Мищенко¹, С.В. Пономарев¹, С.Г. Толстых¹, С.С. Толстых²

*Кафедры: «Автоматизированные системы и приборы» (1),
«Информационные процессы и управление» (2), ТГТУ*

Ключевые слова и фразы: имитационное моделирование; коэффициент диффузии влаги; погрешность измерения.

Аннотация: Рассматриваются вопросы имитационного моделирования процесса измерения коэффициента диффузии влаги в пористых материалах. Анализ погрешности измерений проводится на ЭВМ. Показан ход приведения модели к безразмерному виду, снижающему погрешность вычислений при ограниченной разрядной сетке в машинном представлении вещественных чисел. Проведено сравнение методик определения момента времени, соответствующего экстремуму влагосодержания и показано, что минимальная погрешность соответствует регистрации времени совпадения значения влагосодержания с начальным ее значением на последнем этапе измерений. Предложена формула, по которой можно определить значение момента времени, соответствующего экстремуму влагосодержания, а затем, решив нелинейное уравнение, – искомый коэффициент диффузии.

Обозначения

a – коэффициент диффузии, м²/с;
[a_{\min} , a_{\max}] – диапазон измерения коэффициента диффузии;
 C – коэффициент, определяющий значения τ_{2L} и τ_{2R} ;
 $F(y_1, y_2; a_{\min}, a_{\max}, \tau_{1k})$ – целевая функция;
 $Fo = \frac{a\tau}{x^2}$ – критерий Фурье;
 $Fo_x = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}$ – безразмерный комплекс;
 $h_p = (p_2 - p_1)/n_p$ – шаг разбиения;
 n_p – число разбиений диапазона [p_1 , p_2];
 P – относительная погрешность измерений, %;
 p_1 , p_2 – диапазон порядков, соответствующий диапазону [a_{\min} , a_{\max}], целые отрицательные числа;
 u – переменная интегрирования;

U_0 – начальное влагосодержание образцов № 2, 3;
 U_1 – начальное влагосодержание образца № 1;
 $U_I(x, \tau_1)$ – влагосодержание образца на первом этапе измерения;
 $U_I(x + 2u\sqrt{a\tau_2}, \tau_{1k})$ – подынтегральная функция, представляющая собой (при $\tau_2 = 0$) распределение влагосодержания в конце первого (в начале второго) этапа;
 $U_c = \frac{U_0 + U_1}{2}$ – среднее значение начального влагосодержания;
 x – пространственная координата, м;
 y_1, y_2 – варьируемые переменные при решении задачи оптимизации; y_1^*, y_2^* – их оптимальные значения;
 δ – относительная погрешность определения коэффициента диффузии после решения задачи оптимизации;

ε – точность вычислений;	$\tau_{2\max}$ – момент времени, соответствующий экстремальному значению влагосодержания, с;
η_j – абсолютная погрешность аппроксимации;	$[\tau_{2L}, \tau_{2R}]$ – интервал времени, содержащий значение $\tau_{2\max}$;
$\theta(F_{O_2})$ – безразмерная влажность на втором этапе измерений;	$\omega = \frac{\tau_{2\max} - \tau_{2L}}{\tau_{2R} - \tau_{2L}}$ – отношение интервалов времени;
$\bar{\theta}$ – значение $\theta(F_{O_2})$ на концах интервала $[\tau_{2L}, \tau_{2R}]$;	$\xi(\mu, \sigma)$ – датчик нормально распределенных случайных чисел с математическим ожиданием μ и среднеквадратическим отклонением σ ;
$\tilde{\theta}(F_{O_2}(\tau_2))$ – случайная помеха;	Ω_i – скорректированное отношение интервалов времени, $i = 0, \dots, n_P$;
θ_{\max} – экстремальное значение безразмерной концентрации влаги в образце;	$\bar{\Omega}$ – среднее значение массива Ω .
$\sigma^2[a]$ – дисперсия коэффициента диффузии;	
τ_1 – текущее время первого этапа, с;	
τ_{1k} – продолжительность первого этапа, с;	
τ_2 – текущее время второго этапа, с;	

Введение

Ранее была опубликована математическая модель процесса измерения коэффициента диффузии пористых материалов [1]. В данной работе мы продолжаем имитационное исследование и рассматриваем два варианта нахождения экстремума влагосодержания на экспериментальной кривой: непосредственное и косвенное. При сравнении вариантов мы оцениваем погрешность измерения коэффициента диффузии.

Важным аспектом имитационного моделирования диффузионных процессов в измерительном устройстве является повышение точности вычислений. В расчетах на ЭВМ по нашей математической модели участвуют константы, основные и вспомогательные переменные с различными порядками ($10^{-10} \dots 10^6$). При фиксированном размере мантиисы (16 знаков) это обстоятельство способствует повышению вычислительной погрешности при суммировании рядов, решении уравнений, вычислении интегралов. В ходе имитационных исследований, проводимых на ПЭВМ типа IBM PC с использованием компилятора Visual C++ 6.0, было выявлено, что при расширении диапазонов изменения параметров математической модели [1] увеличение вычислительной погрешности приводит к потере устойчивости вычислений, способствует получению нестабильных результатов. Избавиться от этих проблем можно сужением диапазона порядков нормализованного представления основных переменных математической модели за счет перехода к безразмерному виду.

1 Математическая модель процесса измерения

Физическая модель измерительного устройства представляет собой систему, состоящую из двух образцов исследуемого пористого материала, приведенных в контакт, и специального датчика влажности, вмонтированного в образец. Размеры образцов должны быть достаточно большими: такими, чтобы с позиций матема-

тического моделирования их можно было бы считать плоскими полубесконечными телами. Для целей измерения подготавливаются три образца. Образец №1 выдерживается длительное время в эксикаторе для достижения равномерного влагосодержания U_1 , а образцы № 2, 3 – в другом эксикаторе до достижения влагосодержания $U_0 \neq U_1$. Во второй образец на расстоянии x от поверхности соприкосновения монтируется датчик, реагирующий на присутствие влаги в исследуемом веществе.

Эксперимент по определению коэффициента диффузии проходит в два этапа: на первом этапе приводятся в плотное соприкосновение два прямоугольных образца: образец № 1 (концентрация U_1) и образец № 2 (начальная концентрация U_0). На втором этапе, по истечении времени τ_{1k} , образцы № 1 и № 2 разъединяют и образец № 2 приводят в контакт с образцом № 3 (концентрация U_0).

Распределение влажности на 1-м этапе измерения [2]

$$U_I(x, \tau_1) = U_c + (U_0 - U_c) \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau_1}}\right), \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

где $U_c = \frac{U_0 + U_1}{2}$ – среднее значение влагосодержания; $U_I(x, \tau_1)$ – влагосодержание образца; a – искомый коэффициент диффузии влаги в пористом материале; τ_1 – текущее время первого этапа, отсчитываемое с момента соединения образцов № 1 и № 2; x – пространственная координата (расстояние от датчика до поверхности соприкосновения образцов).

Введем обозначение

$$\operatorname{Fo}_x^{(1)} = \frac{x}{2\sqrt{a\tau_1}}. \quad (2)$$

Перепишем (1) с учетом (2)

$$U_I(x, \tau_1) = U_c + (U_0 - U_c) \cdot \operatorname{erf}\left(\operatorname{Fo}_x^{(1)}\right), \quad -\infty < \operatorname{Fo}_x^{(1)} < \infty. \quad (3)$$

На втором (основном) этапе измерения распределение влагосодержания имеет вид [1, 2]:

$$U_{II}(x, \tau_2) = \frac{U_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau_2}}\right) \right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{U_I(x + 2u\sqrt{a\tau_2}, \tau_{1k}) e^{-u^2}}{2\sqrt{a\tau_2}} du, \quad (4)$$

где τ_2 – текущее время второго этапа, отсчитываемое с момента соединения образцов № 2 и № 3; τ_{1k} – продолжительность первого этапа; $U_I(x + 2u\sqrt{a\tau_2}, \tau_{1k})$ – подынтегральная функция, представляющая собой (при $\tau_2 = 0$) распределение влагосодержания в начале второго этапа, которая, с учетом формулы (1), может быть представлена в виде:

$$U_I(x + 2u\sqrt{a\tau_2}, \tau_{1k}) = U_c + (U_0 - U_c) \operatorname{erf}\left(\frac{x + 2u\sqrt{a\tau_2}}{2\sqrt{a\tau_{1k}}}\right). \quad (5)$$

2 Приведение математической модели к безразмерному виду

Для приведения математической модели измерения коэффициента диффузии к безразмерному виду в рассмотрение введем следующие комплексы:

$$Fo_x^{(1k)} = \frac{x}{2\sqrt{a\tau_{1k}}}, \quad Fo_x^{(2)} = \frac{x}{2\sqrt{a\tau_2}}. \quad (6)$$

Преобразуем аргумент функции erf в выражении (5) так, чтобы избавиться от a , τ и x . Для этого поделим числитель и знаменатель на x и, принимая во внимание (6), получим

$$\frac{x + 2u\sqrt{a\tau_2}}{2\sqrt{a\tau_{1k}}} = \frac{1 + \frac{2u\sqrt{a\tau_2}}{x}}{\frac{2\sqrt{a\tau_{1k}}}{x}} = \frac{1 + \frac{u}{Fo_x^{(2)}}}{\frac{1}{Fo_x^{(1k)}}} = Fo_x^{(1k)} \left(1 + \frac{u}{Fo_x^{(2)}} \right). \quad (7)$$

В выражении (4) поменяем аргументы x, τ_2 на комплекс $Fo_x^{(2)}$

$$U(Fo_x^{(2)}) = \frac{U_0}{2} [1 - \operatorname{erf}(Fo_x^{(2)})] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-Fo_x^{(2)}}^{\infty} \left\{ U_c + (U_0 - U_c) \operatorname{erf} \left[Fo_x^{(1k)} \left(1 + \frac{u}{Fo_x^{(2)}} \right) \right] \right\} e^{-u^2} du. \quad (8)$$

В правой части выражения (8) второе слагаемое обозначим буквой T и представим, в свою очередь, тоже как сумму $T = T_1 + T_2$:

$$T = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-Fo_x^{(2)}}^{\infty} U_c e^{-u^2} du + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-Fo_x^{(2)}}^{\infty} (U_0 - U_c) \operatorname{erf} \left[Fo_x^{(1k)} \left(1 + \frac{u}{Fo_x^{(2)}} \right) \right] e^{-u^2} du = T_1 + T_2, \quad (9)$$

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-Fo_x^{(2)}}^{\infty} U_c e^{-u^2} du = \frac{U_c}{2} [1 + \operatorname{erf}(Fo_x^{(2)})], \quad (10)$$

$$T_2 = \frac{U_0 - U_c}{\sqrt{\pi}} \int_{-Fo_x^{(2)}}^{\infty} \operatorname{erf} \left[Fo_x^{(1k)} \left(1 + \frac{u}{Fo_x^{(2)}} \right) \right] e^{-u^2} du. \quad (11)$$

Интеграл в выражении (11) аналитически вычислить невозможно. Перепишем (8)

$$U(Fo_x^{(2)}) = \frac{U_0}{2} [1 - \operatorname{erf}(Fo_x^{(2)})] + \frac{U_c}{2} [1 + \operatorname{erf}(Fo_x^{(2)})] + T_2. \quad (12)$$

Введем обозначение

$$s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-Fo_x^{(2)}}^{\infty} \operatorname{erf} \left[Fo_x^{(1k)} \left(1 + \frac{u}{Fo_x^{(2)}} \right) \right] e^{-u^2} du. \quad (13)$$

Таким образом, выражение (12) приобретает вид

$$U(\text{Fo}_x^{(2)}) = \frac{U_0}{2} \left[1 - \text{erf}(\text{Fo}_x^{(2)}) \right] + \frac{U_c}{2} \left[1 + \text{erf}(\text{Fo}_x^{(2)}) \right] + (U_0 - U_c)s. \quad (14)$$

Вводим понятие «безразмерное влагосодержание»

$$\theta(\text{Fo}_x^{(2)}) = \frac{U(\text{Fo}_x^{(2)}) - U_0}{U_c - U_0}. \quad (15)$$

Найдем числитель выражения (15)

$$\begin{aligned} U(\text{Fo}_x^{(2)}) - U_0 &= \frac{U_0}{2} - \frac{U_0}{2} \text{erf}(\text{Fo}_x^{(2)}) + \frac{U_c}{2} + \frac{U_c}{2} \text{erf}(\text{Fo}_x^{(2)}) + U_0s - U_c s - U_0 = \\ &= -\frac{U_0}{2} - \frac{U_0}{2} \text{erf}(\text{Fo}_x^{(2)}) + \frac{U_c}{2} + \frac{U_c}{2} \text{erf}(\text{Fo}_x^{(2)}) + U_0s - U_c s = \\ &= \frac{1}{2}(U_c - U_0) + \frac{1}{2}(U_c - U_0) \text{erf}(\text{Fo}_x^{(2)}) - (U_c - U_0)s. \end{aligned} \quad (16)$$

Поделив выражение (16) на $U_c - U_0$, с учетом (13) получим

$$\begin{aligned} \theta(\text{Fo}_x^{(2)}) &= \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf}(\text{Fo}_x^{(2)}) \right] - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\text{Fo}_x^{(2)}}^{\infty} \text{erf} \left[\text{Fo}_x^{(1k)} \left(1 + \frac{u}{\text{Fo}_x^{(2)}} \right) \right] e^{-u^2} du. \end{aligned} \quad (17)$$

Для удобства графического представления последующих результатов в выражении (17) меняем $\text{Fo}_x^{(1k)}$, $\text{Fo}_x^{(2)}$ на соответствующие критерии Фурье:

$$\text{Fo}_{1k} = \frac{a\tau_{1k}}{x^2}, \quad \text{Fo}_2 = \frac{a\tau_2}{x^2}. \quad (18)$$

В дальнейшем будем рассматривать функцию (17), принимая во внимание, что $\text{Fo}_x^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{\text{Fo}_2}}$, $\text{Fo}_x^{(1k)} = \frac{1}{2\sqrt{\text{Fo}_{1k}}}$:

$$\begin{aligned} \theta(\text{Fo}_2) &= \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{\text{Fo}_2}} \right) \right] - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{2\sqrt{\text{Fo}_2}}}^{\infty} \text{erf} \left[\frac{1}{2\sqrt{\text{Fo}_{1k}}} (1 + 2u\sqrt{\text{Fo}_2}) \right] e^{-u^2} du. \end{aligned} \quad (19)$$

Методика нахождения коэффициента диффузии, обсуждаемая здесь, базируется на определении момента времени $\tau_{2\max}$, соответствующего экстремальному значению влагосодержания на втором этапе эксперимента. По найденному значению $\tau_{2\max}$ определяем коэффициент диффузии a [1]. Для нахождения Fo_2 , соответствующего экстремальному значению θ , решаем уравнение $\frac{\partial \theta(\text{Fo}_2)}{\partial \text{Fo}_2} = 0$:

$$\frac{\partial \theta(\text{Fo}_2)}{\partial \text{Fo}_2} = \frac{\partial}{\partial \text{Fo}_2} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{\text{Fo}_2}} \right) \right] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} \operatorname{erf} \left[\frac{1}{2\sqrt{\text{Fo}_{1k}}} (1 + u \cdot 2\sqrt{\text{Fo}_2}) \right] e^{-u^2} \right\} du = 0. \quad (20)$$

Находим производную $\frac{\partial \theta(\text{Fo}_2)}{\partial \text{Fo}_2}$, разбив дифференцируемое выражение на слагаемые. Сначала возьмем производную первого слагаемого

$$\frac{\partial}{\partial \text{Fo}_2} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{\text{Fo}_2}} \right) \right] \right\} = -\frac{\exp \left[-\frac{1}{4\text{Fo}_2} \right]}{4\sqrt{\pi}\text{Fo}_2^{3/2}}. \quad (21)$$

Согласно [3] $\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_a^b f(x, \lambda) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) dx$. С учетом этого найдем производную подынтегрального выражения второго слагаемого уравнения (20)

$$\frac{\partial}{\partial \text{Fo}_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf} \left[\frac{1}{2\sqrt{\text{Fo}_{1k}}} (1 + u \cdot 2\sqrt{\text{Fo}_2}) \right] e^{-u^2} \right\} = \frac{\exp \left[-\frac{(1 + 2u\sqrt{\text{Fo}_2})^2}{4\text{Fo}_{1k}} \right] u e^{-u^2}}{\pi\sqrt{\text{Fo}_{1k}\text{Fo}_2}} = Y. \quad (22)$$

После интегрирования (22) получим

$$\int_1^{\infty} Y du = -\frac{1}{4(\text{Fo}_2 + \text{Fo}_{1k})^{3/2} \pi^{3/2} \sqrt{\text{Fo}_2}} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{4(\text{Fo}_2 + \text{Fo}_{1k})} \right] \pi\sqrt{\text{Fo}_2} - 2\sqrt{\pi(\text{Fo}_2 + \text{Fo}_{1k})} \exp \left[-\frac{1}{4\text{Fo}_2} \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{\sqrt{\text{Fo}_{1k}}}{2\sqrt{\text{Fo}_2(\text{Fo}_2 + \text{Fo}_{1k})}} \right] \pi\sqrt{\text{Fo}_2} \exp \left[-\frac{1}{4(\text{Fo}_2 + \text{Fo}_{1k})} \right] \right\}. \quad (23)$$

Искомое уравнение (20) относительно Fo_2 примет вид

$$\frac{\partial \theta(\text{Fo}_2)}{\partial \text{Fo}_2} = -\frac{\exp \left(-\frac{1}{4\text{Fo}_2} \right)}{4\sqrt{\pi}\text{Fo}_2^{3/2}} + \frac{1}{4(\text{Fo}_2 + \text{Fo}_{1k})^{3/2} \pi^{3/2} \sqrt{\text{Fo}_2}} \times \left\{ \exp \left[-\frac{1}{4(\text{Fo}_2 + \text{Fo}_{1k})} \right] \pi\sqrt{\text{Fo}_2} - 2\sqrt{\pi(\text{Fo}_2 + \text{Fo}_{1k})} \exp \left(-\frac{1}{4\text{Fo}_2} \right) + \operatorname{erf} \left[\frac{\sqrt{\text{Fo}_{1k}}}{2\sqrt{\text{Fo}_2(\text{Fo}_2 + \text{Fo}_{1k})}} \right] \pi\sqrt{\text{Fo}_2} \exp \left[-\frac{1}{4(\text{Fo}_2 + \text{Fo}_{1k})} \right] \right\} = 0. \quad (24)$$

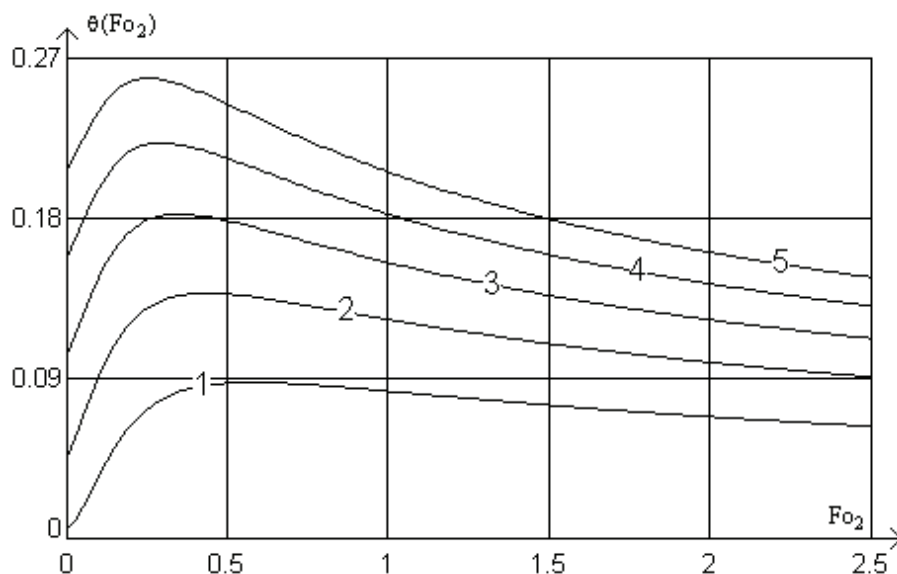


Рис. 1 Графики зависимости $\theta(Fo_2)$:

- 1 – $Fo_{2max} = 0,5875$, ($Fo_{1k} = 0,0625$, $\tau_{1k} = 200$ с);
 - 2 – $Fo_{2max} = 0,4375$, ($Fo_{1k} = 0,125$, $\tau_{1k} = 400$ с);
 - 3 – $Fo_{2max} = 0,3530$, ($Fo_{1k} = 0,1875$, $\tau_{1k} = 600$ с);
 - 4 – $Fo_{2max} = 0,3200$, ($Fo_{1k} = 0,25$, $\tau_{1k} = 800$ с);
 - 5 – $Fo_{2max} = 0,25803$, ($Fo_{1k} = 0,3125$, $\tau_{1k} = 1000$ с);
- значения τ_{1k} рассчитаны для $a = 1,25 \cdot 10^{-9}$ м²/с, $x = 0,002$ м

Исходя из того, что $\frac{\partial \theta}{\partial \tau_2} = \frac{\partial \theta}{\partial Fo_2} \cdot \frac{\partial Fo_2}{\partial \tau}$, а $Fo_2 = \frac{a\tau_2}{x^2}$ – линейная функция τ_2 :

- 1) решаем уравнение (24) относительно Fo_2 методом половинного деления [4];
- 2) по найденному Fo_2 из выражения (18) находим значение τ_2 , соответствующее экстремуму функции $U(x, \tau_2)$ с учетом заданных значений x и a .

На рис. 1 показаны графики $\theta(Fo_2)$ при различных значениях времени τ_{1k} первого этапа эксперимента. Из полученных графиков видно, что при увеличении τ_{1k} экстремум становится более ярко выраженным.

3 Влияние случайной помехи на непосредственное определение времени, соответствующего экстремальному значению влагосодержания

Цель дальнейших исследований – сравнительный анализ способов нахождения моментов времени, соответствующих экстремуму влагосодержания, по экспериментальным данным. Необходимо как можно более точно фиксировать момент времени, соответствующий экстремуму влагосодержания в образце: чем это значение точнее, тем меньше погрешность измерения коэффициента диффузии в условиях реального эксперимента.

Для имитационного моделирования процесса измерений нам потребуется «эталонное» значение коэффициента диффузии. По этому значению находим «эталонное» значение момента времени, соответствующего экстремальному вла-

госодержанию. Назовем эту процедуру прямой задачей. В противоположность ей, задачу нахождения коэффициента диффузии по известному моменту времени, соответствующему экстремальному влагосодержанию, назовем обратной задачей.

Результатом решения прямой задачи является точное значение момента времени $\tau_{2\max}^{\text{ист.}}$, соответствующее экстремальному влагосодержанию, полученное из уравнения (24) при заданном Fo_{1k} . Уравнение (24) решалось методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$ (абсолютная величина левой части уравнения не превосходит этого значения).

Для решения прямой задачи использовалось $Fo_{1k} = 0,3125$, полученное при заданных значениях $a_{\text{ист.}} = 1,25 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$, $x = 0,002 \text{ м}$, $\tau_{1k} = 1000 \text{ с}$. В результате было найдено $Fo_{2\max} = 0,2580322$. По нему определили значение момента времени $\tau_{2\max}^{\text{ист.}} = 825,703 \text{ с}$, соответствующее экстремальному значению концентрации влаги в образце, которое используется в дальнейшем для сравнения как истинное (эталонное).

Имитируя на ЭВМ реальный эксперимент, на безразмерную концентрацию накладываем случайную помету

$$\tilde{\theta}(Fo_2(\tau_2)) = \zeta \theta(Fo_2(\tau_2)), \quad (25)$$

где $\theta(Fo_2(\tau_2))$ – точное значение, соответствующее математическому описанию процесса измерений; ζ – случайная помету. Как известно, относительная погрешность большинства методов измерений – случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения [4]. Исходя из этого, помету ζ вычисляем по формуле $\zeta = 1 + \xi(0, P/100)$, где $\xi(\mu, \sigma)$ – датчик нормально распределенных случайных чисел с математическим ожиданием μ и среднеквадратическим отклонением σ ; P – относительная погрешность измерений, в %. На рис. 2 показан график $\tilde{\theta}(Fo_2(\tau_2))$ при $P = 1\%$; $a_{\text{ист.}} = 1,25 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$; $x = 0,002 \text{ м}$; $\tau_{1k} = 1000 \text{ с}$. Интервал дискретизации времени был задан равным 50 с.

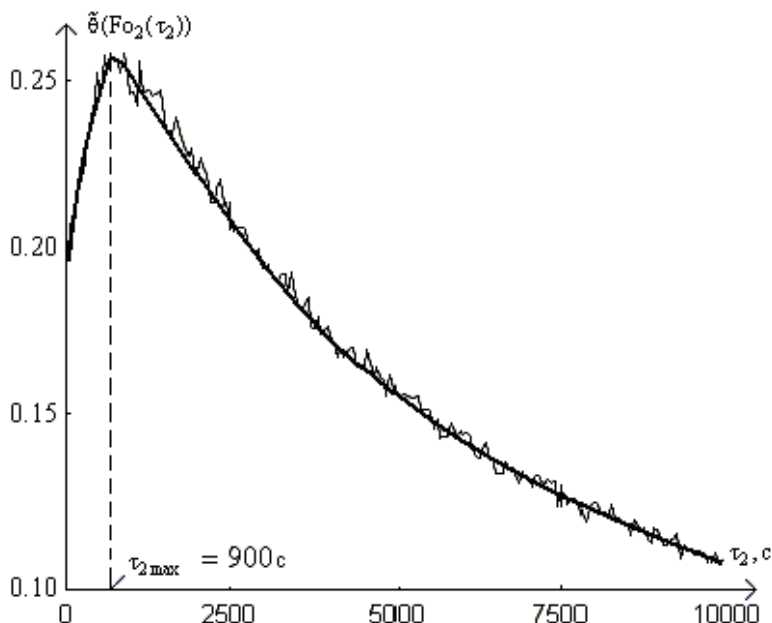


Рис. 2 Непосредственное нахождение точки экстремума

Из таблицы значений $[\tau_2, \tilde{\theta}(Fo_2(\tau_2))]$, по которой был построен график на рис. 2, путем перебора было определено $\tau_{2\max} = 900$ с. По найденному значению $\tau_{2\max}$ находим из уравнения (24) коэффициент диффузии a . Поясним ход решения этого уравнения относительно коэффициента диффузии a при заданном времени $\tau_{2\max}$. Если раскрыть выражения для критериев Фурье, в уравнении (24) появятся две неизвестных величины – коэффициент диффузии a и время τ_2 , причем ни одну из них нельзя представить в явном виде. Применяем следующий алгоритм:

- 1) задаем начальное приближение коэффициенту диффузии $a = a^0$;
- 2) решаем (24) методом половинного деления относительно τ_2 ; находим корень $\tau_{2\max}^0$;

- 3) коэффициент диффузии a считается найденным с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$, если модуль разности найденного времени $\tau_{2\max}^0$ и экспериментального $\tau_{2\max}$ – пренебрежимо мал: $|\tau_{2\max} - \tau_{2\max}^0| \leq \varepsilon$. Если это неравенство не выполняется, корректируем a по методу половинного деления с последующим возвратом к пункту 2.

По значению $\tau_{2\max} = 900$ с было получено $a = 1,186209 \cdot 10^{-9}$ м²/с. Относительная ошибка составила 5,1 % (по отношению к ранее заданному $a_{\text{ист.}} = 1,25 \cdot 10^{-9}$ м²/с). По отношению к ранее найденному $\tau_{2\max}^{\text{ист.}} = 825,7$ с ошибка нахождения $\tau_{2\max} = 900$ с почти в два раза больше и составляет примерно 9 %.

4 Влияние конечного диапазона измерительного цифрового прибора, используемого при измерении влагосодержания, на погрешность определения коэффициента диффузии

Важно знать, каков вклад точности представления показаний вторичного прибора в погрешность измерения коэффициента диффузии. Будем полагать, что измерения потенциала датчика проводятся на приборе с тремя значащими цифрами. По формуле (19) получаем точные значения $\theta(Fo_2(\tau_2))$ и округляем их до трех значащих цифр. Округление производим по формуле $[\theta(Fo_2(\tau_2)) \cdot 10^3 + 0,5] / 10^3$, где [...] – оператор выделения целой части числа. Результаты округления приведены в табл. 1. На рис. 3 видно, что на интервале $750 \leq \tau_2 \leq 950$ значения функции $\theta(Fo_2(\tau_2))$ не меняются – это интервал неопределенности, и чем он шире, тем меньше точность определения коэффициента диффузии.

Погрешность определения коэффициента диффузии рассчитывалась по формуле

$$P = \frac{\max\{|a(\tau_{2\max,R}) - a|, |a - a(\tau_{2\max,L})|\}}{a} 100\% ,$$

где $a(\tau_{2\max,R})$, $a(\tau_{2\max,L})$ – значения коэффициента диффузии соответственно временам экстремума $\tau_{2\max,R}$, $\tau_{2\max,L}$; a – теоретическое значение коэффициента диффузии, заданное в разделе 3.

В данном случае погрешность определения a составила 6,3 %.

Таблица 1

Точки $[\tau_2, \theta(\text{Fo}_2(\tau_2))]$
с округлением до
третьего знака

τ_2	$\theta(\text{Fo}_2(\tau_2))$
0	0,206
50	0,212
...	...
650	0,257
700	0,257
750	0,258
800	0,258
850	0,258
900	0,258
950	0,258
1000	0,257
1050	0,256
...	...
1950	0,235
2000	0,234

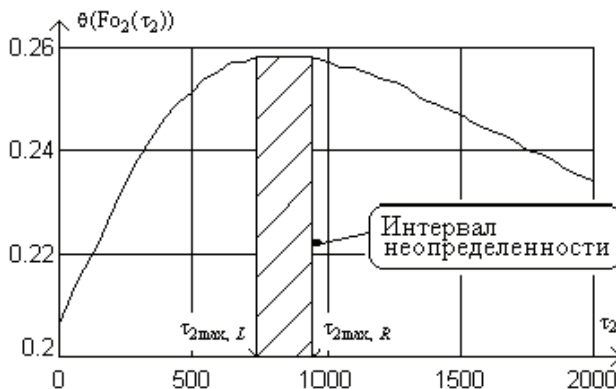


Рис. 3 Интервал неопределенности

интервал
неопределенности

5 Косвенное определение времени, соответствующего экстремуму на кривой влагосодержания

Рассмотрим предлагаемый способ определения момента времени, соответствующего экстремуму влагосодержания. Для повышения эффективности обработки экспериментальных данных, в рассмотрение вводится величина C , геометрический смысл которой иллюстрируется на рис. 4 (на качественном уровне).

При $C = 0$ и $C = 1$ из точек $\{0, \theta(\text{Fo}_2(0))\}$ и $\{\tau_{2\max}, \theta(\text{Fo}_2(\tau_{2\max}))\}$ проводятся прямые, параллельные оси τ_2 . При $C = 1$ эта прямая касается кривой в точке экстремума ($\tau_{2L} = \tau_{2R} = \tau_{2\max}$). Из точки $(0, \bar{\theta})$ параллельно оси τ_2 проводим прямую линию до пересечения с кривой $\theta(\text{Fo}_2(\tau_2))$. Величина $\bar{\theta}$ вычисляется по формуле:

$$\bar{\theta} = \theta(\text{Fo}_2(0)) + C[\theta(\text{Fo}_2(\tau_{2\max})) - \theta(\text{Fo}_2(0))].$$

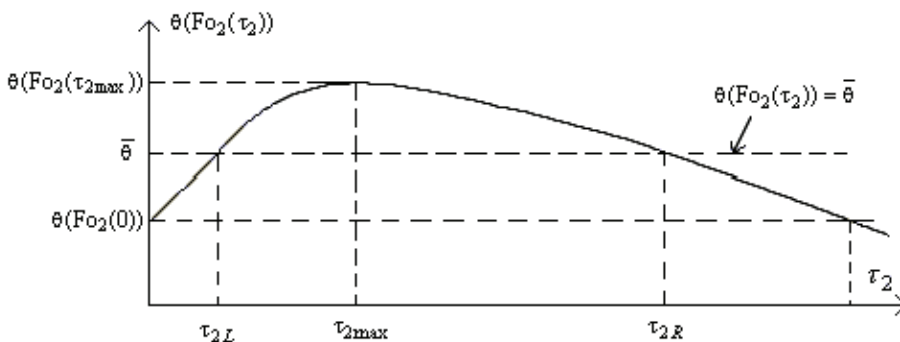


Рис. 4 Использование коэффициента C

При $C = 0$ величина $\tau_{2L} = 0$, а при $0 < C < 1$ $\tau_{2L} < \tau_{2\max} < \tau_{2R}$. Таким образом, вместо прямого определения $\tau_{2\max}$, которому свойственно наличие неопределенности, мы предлагаем находить τ_{2L} и τ_{2R} , и по этим точкам осуществляем все последующие расчеты.

Вводится в рассмотрение отношение интервалов времени

$$\omega = \frac{\tau_{2\max} - \tau_{2L}}{\tau_{2R} - \tau_{2L}}.$$

Из табл. 2 видно, что отношение ω , при изменении коэффициента диффузии a , не остается постоянным. Считая ω функцией a , выясним, можно ли подобрать мультипликативный корректор, компенсирующий непостоянство величины $\omega(a)$. Необходимо найти функцию $R(\tau_{2\max})$ такую, чтобы в заданном диапазоне измерений $a \in [a_{\min}, a_{\max}]$ выполнялось равенство $\omega(a)R(\tau_{2\max}) = \text{idem}$. Следует заметить, что экстремальное значение $\tau_{2\max}$ – зависимая величина: $\tau_{2\max} = \tau_{2\max}(y_1, y_2; a_{\min}, a_{\max}, \tau_{1k})$.

В рассмотрение вводится корректирующая функция

$$R(y_1, y_2; a_{\min}, a_{\max}, \tau_{1k}) = 1 + \arctg\left\{y_1(a_{\min}, a_{\max}, \tau_{1k})[10^{-3}\tau_{2\max} + y_2(a_{\min}, a_{\max}, \tau_{1k})]\right\},$$

где y_1 и y_2 – искомые аргументы, зависящие от a_{\min}, a_{\max} – минимального и максимального значения коэффициента диффузии ($[a_{\min}, a_{\max}]$ – диапазон измерений).

Таблица 2

Значения $\omega, \tau_{2L}, \tau_{2R}$ при $a = \text{var}$

$a \cdot 10^9$	$\tau_{2\max}$	$C = 0, \tau_{2L} = 0$		$C = 0,9$		
		ω	τ_{2R}	ω	τ_{2L}	τ_{2R}
1,00	1190,9	0,192086	6200,3	0,396066	742,1	1875,3
1,03	1143,8	0,199256	5740,6	0,398444	715,7	1790,1
1,05	1099,5	0,206295	5330,1	0,400756	690,8	1710,7
1,08	1057,9	0,213200	4962,3	0,403006	667,3	1636,6
1,10	1018,8	0,219971	4631,5	0,405194	645,1	1567,4
1,13	981,8	0,226607	4333,0	0,407322	624,1	1502,5
1,15	947,1	0,233107	4062,7	0,409393	604,1	1441,8
1,18	914,1	0,239472	3817,4	0,411408	585,1	1384,8
1,20	883,1	0,245703	3593,9	0,413368	567,2	1331,2
1,23	853,6	0,251801	3390,0	0,415276	550,1	1280,8
1,25	825,7	0,257767	3203,2	0,417134	533,9	1233,4
1,28	799,2	0,263604	3031,9	0,418942	518,4	1188,6
1,30	774,1	0,269313	2874,4	0,420703	503,7	1146,4
1,33	750,2	0,274896	2729,2	0,422417	489,6	1106,5
1,35	727,5	0,280356	2595,0	0,424088	476,2	1068,7
1,38	705,9	0,285694	2470,9	0,425716	463,4	1033,1
1,40	685,3	0,290915	2355,8	0,427302	451,1	999,2
1,43	665,7	0,296019	2248,9	0,428848	439,4	967,1
1,45	647,0	0,301009	2149,4	0,430355	428,2	936,5
1,48	629,1	0,305889	2056,7	0,431825	417,5	907,5
1,50	612,1	0,310660	1970,1	0,433258	407,1	880,0

Для заданных параметров находим такие значения y_1 и y_2 , при которых целевая функция $F(y_1, y_2; a_{\min}, a_{\max}, \tau_{1k})$ принимает минимальное значение

$$F(y_1, y_2; a_{\min}, a_{\max}, \tau_{1k}) = \sum_{i=0}^n [\Omega_i(y_1, y_2; a_{\min}, a_{\max}, \tau_{1k}) - \bar{\Omega}]^2 \xrightarrow{y_1, y_2} \min. \quad (26)$$

Здесь $\Omega_i(y_1, y_2; a_{\min}, a_{\max}, \tau_{1k})$ – скорректированное отношение интервалов времени ω

$$\Omega_i(y_1, y_2; a_{\min}, a_{\max}, \tau_{1k}) = \omega_i R(y_1, y_2; a_{\min}, a_{\max}, \tau_{1k}). \quad (27)$$

Индекс i меняет свои значения соответственно делению диапазона $[a_{\min}, a_{\max}]$ на n равных частей; для каждого значения коэффициента диффузии $a_i = a + i(a_{\max} - a_{\min})/n$, $i = 0, \dots, n$ вычисляем скорректированное отношение по формуле (27). Зная Ω_i , находим величину $\bar{\Omega}$ – среднее значение массива Ω_i

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \Omega_i.$$

Значение $\tau_{2\max}$ находим методом половинного деления из уравнения относительно $\tau_{2\max}$

$$\bar{\Omega} - \left(1 - \operatorname{arctg} \left\{ \left(y_1^*(a_{\min}, a_{\max}, \tau_{1k}) [10^{-3} \tau_{2\max} + y_2^*(a_{\min}, a_{\max}, \tau_{1k})] \right) \right\} \right) \frac{\tau_{2\max} - \tau_{2L}}{\tau_{2R} - \tau_{2L}} = 0. \quad (28)$$

Здесь y_1^* и y_2^* – решение задачи (26).

Было проведено имитационное исследование влияния погрешности измерения a при наложении 5%-ного шума, распределенного по нормальному закону, на величины τ_{2L} , τ_{2R} (при $C = 0$ шум на $\tau_{2L} = 0$ не накладывается).

Выяснилось, что при уменьшении значения C дисперсия $\sigma^2[a]$, как случайной величины, уменьшается, а при $C = 0$ – она минимальная:

$$\begin{aligned} C = 0 &\Rightarrow \sigma^2[a] = 1,8 \cdot 10^{-9}; \\ C = 0,25 &\Rightarrow \sigma^2[a] = 2,3 \cdot 10^{-9}; \\ C = 0,5 &\Rightarrow \sigma^2[a] = 3,5 \cdot 10^{-9}; \\ C = 0,75 &\Rightarrow \sigma^2[a] = 5,2 \cdot 10^{-9}; \\ C = 0,9 &\Rightarrow \sigma^2[a] = 8,3 \cdot 10^{-9}. \end{aligned}$$

Таким образом, значение $C = 0$ наиболее выгодное по точности.

Найдем коэффициент диффузии при $C = 0$. Используя сплайн, находим интервал времени τ_2 , в котором зашумленная кривая пересекает уровень $\theta = \theta(0)$ (значение $\theta(0)$ берем также из зашумленной кривой). Методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$ найдено пересечение сплайна на этом интервале: $\tau_{2R} = 3377,1$ с (рис. 5).

Диапазон измерений коэффициента диффузии запишем в виде $a \in [10^{p_1}, 10^{p_2}]$ м²/с, где p_1, p_2 – целые отрицательные числа. Для применения обсуждаемой здесь методики необходимо по экспериментальному значению τ_{2R} решить задачу (26), взяв в качестве a_{\min} значение 10^{p_1} , а в качестве a_{\max} значение 10^{p_2} . Далее надо решить уравнение (28) и найти a . Принятый в таком виде

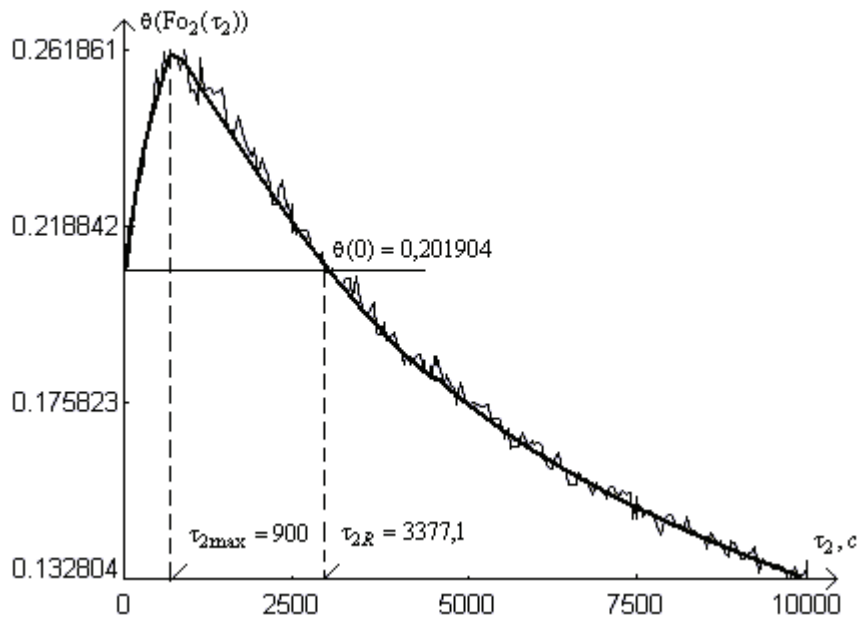


Рис. 5 Определение τ_{2R}

диапазон измерений может оказаться слишком широким, чтобы после решения задач (26) в нем наблюдалось бы постоянство функции $\Omega = idem$. Степень непостоянства Ω оценивается близостью функции F к минимуму – чем эта функция (26) меньше, тем постоянство Ω больше, а решение уравнения (28) при этом дает более достоверное значение искомого коэффициента диффузии.

Разбиение диапазона измерений проводим так: отрезок $[p_1, p_2]$ делим на n_p равных частей, причем брать надо такое n_p , чтобы среди границ интервалов $[a_{min,j}, a_{max,j}]$, ($j = \overline{0, n_p - 1}$) решения задачи (26) оказались все значения вида $1 \cdot 10^p$, $p_1 < p < p_2$, где p – целые числа. В качестве n_p можно брать число, кратное разности $(p_2 - p_1)$.

Был проведен следующий имитационный эксперимент. Рассматривался диапазон измерений $a \in [10^{-9}; 10^{-8}]$ м²/с. Соответствующий диапазон порядков $[-9; -8]$ был поделен на $n_p = 20$ равных частей. Порядок $p \in [p_1, p_2]$ варьировался с шагом $h_p = (p_2 - p_1)/n_p$ (следует заметить, что j -му интервалу значений p соответствуют $a_{min,j} = 10^{p_1 + jh_p}$, $a_{max,j} = 10^{p_1 + (j+1)h_p}$). Для каждого j решаем задачу (26) и находим соответствующие оптимальные значения $y_{1,j}^*$, $y_{2,j}^*$ и a_j из уравнения (28). Каждому j -му диапазону $[a_{min,j}, a_{max,j}]$ присущи показатели точности:

– относительная погрешность определения коэффициента диффузии $\delta_j = \left| \frac{a_j - a_0}{a_0} \right| 100\%$, где a_0 – теоретическое значение коэффициента диффузии, заданное в разд. 3 (в данном случае $a_0 = 1,25 \cdot 10^{-9}$ м²/с);

$$- \eta_j = \sum_{l=1}^m [\tilde{\theta}_l - \theta(\text{Fo}(\tau_{2l}); a_j)]^2 - \text{сумма абсолютных погрешностей аппроксимации «экспериментальной» кривой теоретической зависимостью (19);}$$

«экспериментальной» кривой здесь и ниже понимается зависимость (25) влагосодержания $\tilde{\theta}(\text{Fo}_2)$ от времени, полученная в результате наложения случайной помехи на точные значения $\theta(\text{Fo}_2)$; m – число «экспериментальных точек»; $\tilde{\theta}_l$ – полученное из «экспериментальной» кривой безразмерная концентрация влаги в момент времени τ_{2l} ; $\theta(\text{Fo}(\tau_{2l}); a_j)$ – значение влажности образца, полученное из выражения (19).

Из табл. 3 видно, что минимальное значение $\eta_j = 3,925 \cdot 10^{-4}$ соответствует коэффициенту диффузии $a_2 = 1,227 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$, а относительная погрешность δ_2 составила 1,87 %. Для сравнения напомним, что при использовании методики непосредственного нахождения момента времени, соответствующего экстремальному влагосодержанию (см. разд. 3), относительная погрешность составила 5,1 %.

Таким образом, имитационное исследование показало, что использование предложенной методики косвенного нахождения экстремума (см. разд. 5) по сравнению с непосредственным его определением (см. раздел 3) позволяет уменьшить относительную погрешность измерений на 3,23 % или приблизительно в 2,7 раза.

Таблица 3

Результаты вычислений коэффициента диффузии по зашумленной «экспериментальной» кривой (25)

$a_{\min,j} \cdot 10^9$	$a_{\max,j} \cdot 10^9$	$y_{1,j}^*$	$y_{2,j}^*$	$a_j \cdot 10^9$	δ_j	$\eta_j \cdot 10^4$
1,00	1,12	0,4200	-3,0000	1,225	1,992	5,585
1,12	1,26	0,4400	-2,7200	1,227	1,867	3,925
1,26	1,41	0,5200	-2,0000	1,227	1,876	7,019
1,41	1,58	0,6200	-1,3800	1,226	1,916	8,340
1,58	1,78	0,3802	-3,2800	1,225	2,025	9,585
1,78	2,00	0,3400	-3,8000	1,223	2,128	10,780
2,00	2,24	0,3597	-3,5400	1,225	2,007	12,000
2,24	2,51	0,3401	-3,8200	1,226	1,919	13,190
2,51	2,82	-0,4803	3,7200	1,185	5,195	13,420
2,82	3,16	-0,8400	2,2800	1,168	6,573	14,090
3,16	3,55	-0,9801	2,0001	1,161	7,112	14,910
3,55	3,98	-1,2401	1,6400	1,151	7,944	15,600
3,98	4,47	-3,4400	0,7201	1,081	13,541	15,130
4,47	5,01	-3,4400	0,7203	1,081	13,554	15,830
5,01	5,62	-0,5397	3,3000	1,208	3,328	19,910
5,62	6,31	-0,5399	3,2800	1,220	2,405	21,150
6,31	7,08	-0,5399	3,2600	1,233	1,331	22,450
7,08	7,94	-0,4401	3,9000	1,257	0,531	24,060
7,94	8,91	-0,4399	3,8800	1,274	1,911	25,460
8,91	10,00	-0,4801	3,5600	1,289	3,149	26,770

Список литературы

1. Толстых С.Г. Математическая модель метода измерения коэффициента диффузии // Труды ТГТУ: Сборник научных статей молодых ученых и студентов. Вып.8. Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2001. – С. 3-11.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа. 1967. – 600 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука. – 832 с.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
5. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Мир, 1975. – 400 с.
6. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. Т.1. – М.: Мир, 1986. – 350 с.

To the Question of Measurement Error of Diffusion Coefficient of Porosity Materials

S.V. Mishchenko¹, S.V. Ponomarev¹, S.G. Tolstych¹, S.S. Tolstych²

*Departments: "Automated Systems and Devices" (1),
"Information Processes and Management" (2), TSTU*

Key words and phrases: imitation modeling; diffusion coefficient of moisture; measurement error.

Abstract: Questions of imitation modeling of the measuring process of moisture diffusion coefficient in porosity materials are considered. The course of model reduction to dimensionless form lowering the measurement error under limited units digit in machine presentation of digits is shown. The comparison of ways of determining the moment of time conforming the moisture content extremum is made, and it is shown that minimum error corresponds time registration of coincidence of moisture content value with its primary value at the final stage of measurements. Methodology of determining diffusion coefficient is suggested.

Zur Frage über die Messungsfehler des Koeffizienten der Diffusion der porösen Stoffe

Zusammenfassung: Es werden die Fragen der Imitationsmodellierung des Prozesses der Messung des Koeffizienten der Diffusion der Feuchtigkeit in den porösen Stoffen betrachtet. Es ist der Lauf der Anführung des Modells zur dimensionslosen Art, die den Fehler der Berechnungen bei dem beschränkten Entladungsnetz in der mechanischen Darstellung der materiellen Zähler verringert, aufgezeigt. Es ist der Vergleich der Weisen der Bestimmung des Momentes der Zeit, die dem Extremum des Feuchtgehaltes entspricht, durchgeführt. Es ist aufgezeigt, daß der minimale Fehler der Registrierung der Zeit des Zusammenfallens der Bedeutung des Feuchtgehaltes mit ihrer Anfangsbedeutung in der letzten Etappe der Messungen entspricht. Es ist die Methodik der Bestimmung des Koeffizienten der Diffusion angeboten.

Sur le problème des erreurs de la mesure du coefficient de la diffusion des matériaux poreux

Résumé: Sont examinés les problèmes du modélage avec l'imitation du processus de la mesure du coefficient de l'humidité dans les matériaux poreux. On a montré le processus de l'aboutissement du modèle à l'aspect adimensionnel qui réduit les erreurs des calculs avec le réseau d'ordre limité dans la représentation des nombres réels par la machine. On a fait la comparaison des moyens de la définition du moment du temps correspondant à l'extrémum du contenu de l'humidité et l'on a montré que l'erreur minimum correspond à l'enregistrement du temps de la coïncidence de la valeur de la teneur de l'humidité avec sa valeur initiale à la dernière étape des mesures. On a proposé la méthode de la définition du coefficient de la diffusion.
