

УДК 536.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ  
АППАРАТАХ С КАНАЛАМИ ОХЛАЖДЕНИЯ В СТЕНКАХ

Е.Н. Туголуков<sup>1</sup>, В.А. Богущ<sup>2</sup>, А.Г. Ткачев<sup>3</sup>

Кафедра «Гибкие автоматизированные производственные системы», ТГТУ (1);

ОАО «Тамбовский завод «Комсомолец» им. Н.С. Артемова» (2);

Кафедра «Конструирование машин и аппаратов», ТГТУ (3)

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

**Ключевые слова и фразы:** аналитическое решение; задача теплопроводности; брус; граничные условия 3-го рода.

**Аннотация:** Получено аналитическое решение задачи теплопроводности в брус при неодинаковых граничных условиях 3-го рода на всех 4-х поверхностях. Решение предложено использовать для расчета охлаждения или нагрева в биметаллических аппаратах с каналами в стенках.

В качестве объекта для теплового расчета принимали биметаллический аппарат (реактор, теплообменник) (рис. 1), в котором осуществляется технологический процесс, требующий подвода тепла, или наоборот – принудительного охлаждения через стенку корпуса.

Для этого в основном металле стенки корпуса 1 выполнены каналы охлаждения (нагрева) 2, расположенные вдоль образующей непосредственно под плакирующим слоем 3. Подача теплоносителя в эти каналы осуществляется через кольцевые коллекторы 4 входа и выхода, расположенные в нижней и верхней частях корпуса.

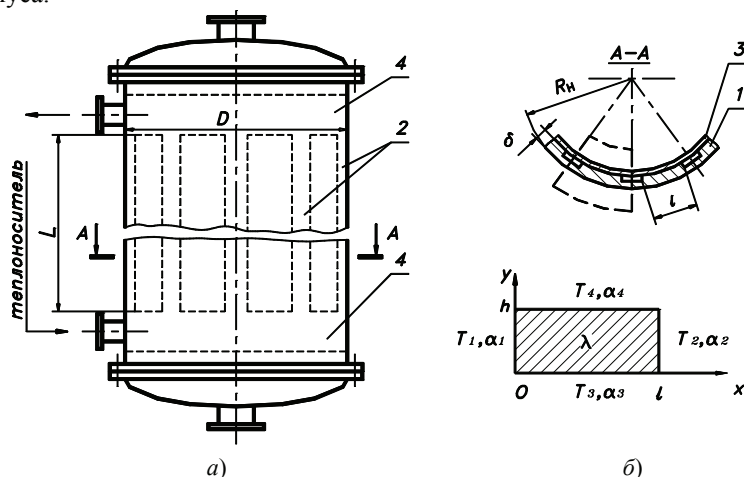


Рис. 1 Схема аппарата (а) и модельная схема для теплового расчета (б)

Вводим следующие допущения:

- учитывая, что радиус кривизны  $R_H$  в диаметральной сечении и высота аппарата значительно больше толщины стенки его корпуса, представляем элемент (модуль) корпуса, ограниченный по обеим сторонам (по образующим) каналов охлаждения, в виде бесконечного бруса. Этот элемент на рис. 1 выделен рамкой;
- моделируем теплопроводность только в этом бруске размерами  $l \times h$ ;
- теплопередача от теплоносителя в канале шириной  $b$  непосредственно через лакирующий слой и наружу будет рассчитываться отдельно;
- продольная теплопроводность по окружности лакирующего слоя будет учитываться в дальнейшем;
- температуры теплоносителя и среды в пределах рассматриваемого элемента корпуса принимаем постоянными и равными средним по высоте канала;
- для случая использования биметалла сталь - медь термическим сопротивлением лакирующего слоя (медь), имеющего высокий ( $\lambda_{Cu} = 350$  Вт/(м·К)) по сравнению со сталями ( $\lambda_{сталь} = 17 \div 45$  Вт/(м·К)) коэффициент теплопроводности, пренебрегаем.

Обозначаем:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  – средние коэффициенты теплоотдачи от стенок бруса;  $T_1, T_2, T_3, T_4$  – средние температуры теплоносителя, окружающей среды и внутри аппарата, °С;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности основного металла корпуса, Вт/(м·К);  $l, h$  – длина и ширина сечения бруса, м.

Нестационарное температурное поле в неограниченном бруске прямоугольного поперечного сечения при произвольном начальном распределении и неодинаковых по поверхностям бруса граничных условиях 3-го рода описывается следующей системой:

$$\frac{\partial t(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left( \frac{\partial^2 t(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, \tau)}{\partial y^2} \right), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq h, \quad \tau > 0; \quad (1)$$

$$t(x, y, 0) = f(x, y); \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial t(0, y, \tau)}{\partial x} + \alpha_1 (t(0, y, \tau) - t_{c1}) = 0, \quad \alpha_1 < 0; \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial t(l, y, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 (t(l, y, \tau) - t_{c2}) = 0; \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, 0, \tau)}{\partial y} + \alpha_3 (t(x, 0, \tau) - t_{c3}) = 0, \quad \alpha_3 < 0; \quad (5)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, h, \tau)}{\partial y} + \alpha_4 (t(x, h, \tau) - t_{c4}) = 0. \quad (6)$$

При такой записи граничных условий коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  имеют отрицательные значения для учета направления тепловых потоков.

Здесь  $t(x, y, \tau)$  – искомое температурное поле как функция поперечных координат бруса и времени;  $a^2$  – коэффициент температуропроводности материала бруса.

Решение задачи может быть представлено в виде суммы

$$t(x, y, \tau) = P(x, y, \tau) + S(x, y) + t_{c1}, \quad (7)$$

где  $P(x, y, \tau)$  – решение нестационарной задачи с однородными граничными условиями, а  $S(x, y)$  – решение стационарной задачи с неоднородными граничными условиями. Решение ищется относительно температуры окружающей среды со стороны одной из граней бруса.

Стационарная составляющая  $S(x, y)$  является решением задачи:

$$\frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial y^2} = 0; \quad (8)$$

$$\lambda \frac{\partial S(0, y)}{\partial x} + \alpha_1 S(0, y) = 0, \quad \alpha_1 < 0; \quad (9)$$

$$\lambda \frac{\partial S(l, y)}{\partial x} + \alpha_2 (S(l, y) - T_{c2}) = 0; \quad (10)$$

$$\lambda \frac{\partial S(x, 0)}{\partial y} + \alpha_3 (S(x, 0) - T_{c3}) = 0, \quad \alpha_3 < 0; \quad (11)$$

$$\lambda \frac{\partial S(x, h)}{\partial y} + \alpha_4 (S(x, h) - T_{c4}) = 0; \quad (12)$$

где

$$T_{ci} = t_{ci} - t_{c1}. \quad (13)$$

Для ее решения используем метод конечных интегральных преобразований.

Для исключения координаты « $x$ » используем интегральное преобразование вида

$$U(y) = \int_0^l S(x, y) \rho(x) W(x) dx, \quad (14)$$

причем весовая функция  $\rho(x) = 1$ , а ядро интегрального преобразования  $W(x)$  является решением задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями:

$$\frac{d^2 W(x)}{dx^2} + \mu^2 W(x) = 0; \quad (15)$$

$$\lambda \frac{dW(0)}{dx} + \alpha_1 W(0) = 0, \quad \alpha_1 < 0; \quad (16)$$

$$\lambda \frac{dW(l)}{dx} + \alpha_2 W(l) = 0. \quad (17)$$

Решение ищется с точностью до постоянного множителя в виде

$$W(x) = \sin(\mu x + \varphi), \quad (18)$$

причем числа  $\mu$  и  $\varphi$  определяются из граничных условий (16), (17):

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda \mu}{\alpha_1} \right); \quad (19)$$

числа  $\mu$  – последовательные положительные корни уравнения

$$\alpha_2 \sin(\mu l + \varphi) + \lambda \mu \cos(\mu l + \varphi) = 0. \quad (20)$$

Обратный переход выполняется по формуле

$$S(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(y)W(x)}{N}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} N &= \int_0^l \rho(x)W^2(x)dx = \int_0^l \sin^2(\mu x + \varphi)dx = \\ &= \frac{1}{2\mu}(\mu l + \sin(\varphi)\cos(\varphi) - \sin(\mu l + \varphi)\cos(\mu l + \varphi)). \end{aligned} \quad (22)$$

Суммирование в (21) ведется по значениям  $\mu_n$ .  
Переходим к изображениям задачи (8) – (12).

$$\int_0^l \frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial y^2} W(x)dx = \frac{d^2 U(y)}{dy^2}; \quad (23)$$

$$\int_0^l \frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial x^2} W(x)dx = -\mu^2 U(y) + Q; \quad (24)$$

тогда

$$\frac{d^2 U(y)}{dy^2} - \mu^2 U(y) + Q = 0, \quad (25)$$

$$\lambda \frac{\partial U(0)}{\partial y} + \alpha_3 U(0) = Q_1, \quad (26)$$

$$\lambda \frac{\partial U(h)}{\partial y} + \alpha_4 U(h) = Q_2, \quad (27)$$

где

$$Q = \frac{\alpha_2}{\lambda} T_{c2} W(l) = \frac{\alpha_2}{\lambda} T_{c2} \sin(\mu l + \varphi), \quad (28)$$

$$Q_1 = \int_0^l \alpha_3 T_{c3} W(x)dx = \frac{\alpha_3 T_{c3}}{\mu} (\cos(\varphi) - \cos(\mu l + \varphi)), \quad (29)$$

$$Q_2 = \int_0^l \alpha_4 T_{c4} W(x)dx = \frac{\alpha_4 T_{c4}}{\mu} (\cos(\varphi) - \cos(\mu l + \varphi)). \quad (30)$$

Решением задачи (25) – (27) является функция

$$U(y) = A \operatorname{Ch}(\mu y) + B \operatorname{Sh}(\mu y) + \frac{Q}{\mu^2}. \quad (31)$$

$A$  и  $B$  определяются из граничных условий (26) и (27)

$$B = \frac{Q_2 - \frac{Q}{\mu^2} \alpha_4 - \left( \frac{Q_1}{\alpha_3} - \frac{Q}{\mu^2} \right) (\lambda \mu \operatorname{Sh}(\mu h) + \alpha_4 \operatorname{Ch}(\mu h))}{\lambda \mu \left( 1 - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \right) \operatorname{Ch}(\mu h) + \left( \alpha_4 - \frac{\lambda^2 \mu^2}{\alpha_3} \right) \operatorname{Sh}(\mu h)}, \quad (32)$$

$$A = \frac{Q_1}{\alpha_3} - \frac{Q}{\mu^2} - \frac{\lambda \mu}{\alpha_3} B. \quad (33)$$

Нестационарная составляющая  $P(x, y, \tau)$  задачи (7) записывается в виде:

$$\frac{\partial P(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left( \frac{\partial^2 P(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, y, \tau)}{\partial y^2} \right), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq h, \quad \tau > 0; \quad (34)$$

$$P(x, y, 0) = f(x, y) - S(x, y) - t_{c1}; \quad (35)$$

$$\lambda \frac{\partial P(0, y, \tau)}{\partial x} + \alpha_1 P(0, y, \tau) = 0, \quad \alpha_1 < 0; \quad (36)$$

$$\lambda \frac{\partial P(l, y, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 P(l, y, \tau) = 0; \quad (37)$$

$$\lambda \frac{\partial P(x, 0, \tau)}{\partial y} + \alpha_3 P(x, 0, \tau) = 0, \quad \alpha_3 < 0; \quad (38)$$

$$\lambda \frac{\partial P(x, h, \tau)}{\partial y} + \alpha_4 P(x, h, \tau) = 0. \quad (39)$$

Решение ее может быть выполнено методом конечных интегральных преобразований по двум пространственным координатам как одновременно, так и последовательно.

В данном случае последний вариант предпочтительнее, так как для исключения координаты « $x$ » может быть применено преобразование, уже использованное при решении стационарной задачи (8) – (12)

$$R(y, \tau) = \int_0^l t(x, y, \tau) \rho(x) W(x) dx. \quad (40)$$

Обратный переход выполняется по формуле

$$t(x, y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(y, \tau) W(x)}{N}, \quad (41)$$

где значение  $N$  определяется формулой (22).

Ядро интегрального преобразования  $W(x)$  является решением задачи (15) – (17).

Переходим к изображению задачи (34) – (39):

$$\frac{\partial R(y, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left( \frac{\partial^2 R(y, \tau)}{\partial y^2} - \mu^2 R(y, \tau) \right), \quad (42)$$

$$R(y, 0) = F(y) = \int_0^l (f(x, y) - S(x, y) - t_{c1}) W(x) dx; \quad (43)$$

$$\lambda \frac{\partial R(0, \tau)}{\partial y} + \alpha_3 R(0, \tau) = 0, \quad \alpha_3 < 0; \quad (44)$$

$$\lambda \frac{\partial R(h, \tau)}{\partial y} + \alpha_4 R(h, \tau) = 0. \quad (45)$$

В свою очередь, задача (42) – (45) может быть решена с использованием конечного интегрального преобразования по координате «y»

$$V(\tau) = \int_0^h R(y, \tau) v(y) Z(y) dy \quad (46)$$

с весовой функцией  $v(y) = 1$  и формулой обратного перехода

$$R(y, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V(\tau) Z(y)}{M}, \quad (47)$$

где

$$M = \int_0^h v(y) Z^2(y) dy. \quad (48)$$

Функция  $Z(y)$  является решением вспомогательной задачи

$$\frac{d^2 Z(y)}{dy^2} - \mu^2 Z(y) + \gamma^2 Z(y) = 0; \quad (49)$$

$$\lambda \frac{dZ(0)}{dy} + \alpha_3 Z(0) = 0, \quad \alpha_3 < 0; \quad (50)$$

$$\lambda \frac{dZ(h)}{dy} + \alpha_4 Z(h) = 0. \quad (51)$$

Решение этой задачи с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$Z(y) = \sin(\eta y + \phi), \quad (52)$$

где числа  $\eta^2 = \gamma^2 - \mu^2$  и  $\phi$  определяются из граничных условий (50) и (51):

$$\phi = -\text{atg} \left( \frac{\lambda \eta}{\alpha_3} \right), \quad (53)$$

а  $\eta$  – последовательные положительные корни уравнения

$$\lambda \eta \cos(\eta h + \phi) + \alpha_4 \sin(\eta h + \phi) = 0. \quad (54)$$

Тогда

$$M = \int_0^h v(y)Z^2(y)dy = \int_0^h \sin^2(\eta y + \phi)dx =$$

$$= \frac{1}{2\eta}(\eta h + \sin(\phi)\cos(\phi) - \sin(\eta h + \phi)\cos(\eta h + \phi)). \quad (55)$$

Переходим к изображению задачи (42) – (45).

$$\frac{dV(\tau)}{d\tau} + a^2\gamma^2V(\tau) = 0, \quad (56)$$

$$V(0) = \int_0^h F(y)Z(y)dy = \int_0^h \int_0^l (f(x,y) - S(x,y) - t_{c1})W(x)F(y)Z(y)dydx. \quad (57)$$

Решение задачи (56) – (57) имеет вид

$$V(\tau) = V(0)\text{Exp}(-a^2\gamma^2\tau) = V(0)\text{Exp}(-a^2(\mu^2 + \eta^2)\tau). \quad (58)$$

Таким образом, решение задачи (1) – (6) в окончательном виде

$$t(x,y,\tau) = t_{c1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(y)W(x)}{N} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W(x)Z(y)V(\tau)}{NM}. \quad (59)$$

Полученное решение является удобным для компьютерной реализации и при указанных выше допущениях позволяет проводить тепловые расчеты систем охлаждения или нагрева в биметаллических аппаратах с каналами как в стационарных режимах эксплуатации, так и при выходе аппаратов на рабочий режим.

### Modeling of Heat Transfer in Bimetal Apparatuses with Canals of Cooling in Walls

E.N. Tugolukov<sup>1</sup>, V.A. Bogush<sup>2</sup>, A.G. Tkachyov<sup>3</sup>

*Department «Flexible Automated Production Systems», TSTU (1);*

*ОАО «Tambov Zavod «Komsomolets» after N.S. Artiomov», (2);*

*Department «Design of Machines and Apparatuses», TSTU (3)*

**Key words and phrases:** analytical decision; bar; margin conditions of the 3<sup>rd</sup> kind; heat transfer problem.

**Abstract:** Analytical decision of heat transfer task in the bar under non-similar conditions of the 3<sup>rd</sup> type on all four surfaces is obtained. The task is suggested to be used to calculate cooling and heating in bimetal apparatuses with canals in the walls.

### Modellierung der Wärmeübertragung in den bimetalischen Apparaten mit den Kanälen der Abkühlung in den Wänden

**Zusammenfassung:** Es ist die analytische Lösung der Aufgabe der Wärmeleitfähigkeit im Balken bei den unähnlichen Randbedingungen der 3. Art auf allen 4 Oberflächen bekommen. Es ist vorgeschlagen, die Lösung für die Berechnung der Abkühlung oder der Erwärmung in den bimetalischen Apparaten mit den Kanälen in den Wänden zu verwenden.

## **Modélage du transfert de chaleur dans les appareils biométalliques avec les canaux de refroidissement dans les parois**

**Résumé:** Est reçue la solution analytique du problème du transfert de chaleur dans une barre aux conditions limitées inégales du 3-ème ordre sur toutes les quatre surfaces. La solution pourrait être utilisée pour le calcul du refroidissement ou bien du chauffage dans les appareils biométalliques avec les canaux de refroidissement dans les parois.

---