УДК 517.917

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.И. Фомин

Кафедра прикладной математики и механики, ТГТУ

Представлена членом редколлегии профессором Г.М. Куликовым

Ключевые слова и фразы: банахово пространство; линейный оператор; ограниченный оператор; неограниченный оператор; полугруппа; задача Коши; операторный дискриминант.

Аннотация: В банаховом пространстве изучается задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами.

Пусть E – банахово пространство; $L(E)$ – пространство ограниченных линейных операторов, действующих из E в E; $N(E)$ – множество замкнутых неограниченных линейных операторов, действующих из E в E, с плотными в E областями определения; $GN(E) = \left\{ Q \in N(E) \middle| \exists\, Q^{-1} \in L(E) \right\}$; $G^2N(E) = \left\{ A = Q^2 \,\middle|\, Q \in GN(E) \right\}$.

Изучается задача Коши

$$u''(t) + Bu'(t) + \mathrm{C}u(t) = f(t),\ 0 \le t < \infty, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_0', \tag{2}$$

где $B, \mathrm{C} \in N(E)$; $f(t) \in C\left([0, \infty); E\right)$.

Исследования, проведенные в случае $B, \mathrm{C} \in L(E)$ ([1], [2]), показали, что вид решения задачи (1), (2) определяется видом операторного дискриминанта $D = B^2 - 4\mathrm{C}$.

Пусть

1) $D \in G^2N(E)$, то есть $D = F^2$, где F – некоторый оператор из $GN(E)$;

2) $BF^{-1}x = F^{-1}Bx,\ x \in D(\Lambda)$, где $D(\Lambda) = D(B) \bigcap D(F)$;

3) $\Lambda_1 = \frac{1}{2}(-B - F)$ и $\Lambda_2 = \frac{1}{2}(-B + F)$ являются производящими операторами полугрупп $U_1(t)$ и $U_1(t)$ класса C_0;

4) $f(t) \in D\left(\Lambda^2\right),\ t \in [0, \infty)$, где $D\left(\Lambda^2\right) = D\left(B^2\right) \bigcap D(C) \bigcap D(BF) \bigcap D(FB)$; $B^2 f(t),\ Cf(t),\ FBf(t) \in C\left([0, \infty);\ E\right)$;

5) $u_0 \in D\left(\Lambda^2\right),\ u_0' \in D(\Lambda)$.

Рассмотрим для (1) соответствующее однородное уравнение

$$u''(t) + Bu'(t) + Cu(t) = 0,\ \ 0 \le t < \infty. \qquad (3)$$

Лемма 1. При выполнении условий 1) – 3) уравнение (3) имеет семейство решений вида

$$u(t) = U_1(t)x + U_2(t)y,$$

где $x,\ y$ – произвольные элементы из $D\left(\Lambda^2\right)$.

Лемма 2. При выполнении условий 1) – 4) уравнение (1) имеет частное решение вида

$$u_*(t) = F^{-1}\int_0^t \left[U_2(t-s) - U_1(t-s)\right] f(s)\,ds.$$

Лемма 3. При выполнении условий 1) – 4) уравнение (1) имеет семейство решений вида

$$u(t) = U_1(t)x + U_2(t)y + F^{-1}\int_0^t \left[U_2(t-s) - U_1(t-s)\right] f(s)\,ds,$$

где $x,\ y$ – произвольные элементы из $D\left(\Lambda^2\right)$.

Теорема 1. При выполнении условий 1) – 5) задача (1), (2) имеет решение

$$u(t) = U_2(t)F^{-1}\left(u_0' - \Lambda_1 u_0\right) - U_1(t)F^{-1}\left(u_0' - \Lambda_2 u_0\right) +$$
$$+ F^{-1}\int_0^t \left[U_2(t-s) - U_1(t-s)\right] f(s)\,ds.$$

Пусть

6) $D = 0$, то есть $C = \frac{1}{4}B^2$;

7) оператор $\Lambda_0 = -\frac{1}{2}B$ является производящим оператором полугруппы $U(t)$ класса C_0;

8) $f(t) \in D\left(B^2\right),\ t \in [0, \infty);\ Bf(t),\ B^2 f(t) \in C\left([0, \infty);\ E\right)$;

9) $u_0 \in D\left(B^3\right),\ u_0' \in D\left(B^2\right)$.

Лемма 4. При выполнении условий 6), 7) уравнение (3) имеет семейство решений вида

$$u(t) = U(t)(x + ty),$$

где x, y – произвольные элементы из $D\left(B^2\right)$.

Лемма 5. При выполнении условий 6) – 8) уравнение (1) имеет частное решение вида

$$u_*(t) = \int_0^t U(t-s)(t-s)f(s)ds.$$

Лемма 6. При выполнении условий 6) – 8) уравнение (1) имеет семейство решений вида

$$u(t) = U(t)(x + ty) + \int_0^t U(t-s)(t-s)f(s)ds,$$

где x, y – произвольные элементы из $D\left(B^2\right)$.

Теорема 2. При выполнении условий 6) – 9) задача (1), (2) имеет решение

$$u(t) = U(t)\left[u_0 + \left(u_0' + \frac{1}{2}Bu_0\right)t\right] + \int_0^t U(t-s)(t-s)f(s)ds.$$

Результаты настоящей работы анонсированы в [3].

Список литературы

1. Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве (на англ. языке) // Вестник ТГТУ. – 2000. – Т. 6, № 4. – С. 643 – 646.

2. Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 8 – С. 1140 – 1141.

3. Фомин В.И. О задаче Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве // Сборник материалов шк. «Понтрягинские чтения – XIII», 3–9 мая 2002 г. – Воронеж: ВГУ, 2002. – С. 155 – 156.

On a Solution of the Cauchy problem for Linear Differential Equation of the Second Order with the Constant Unbounded Operator Coefficients in Banach Space

V.I. Fomin

Department of Applied Mathematics and Mechanics, TSTU

Key words and phrases: Banach space; Cauchy problem; linear operator; unbounded operator; bounded operator; operator discriminant; semi-group.

Abstract: The Cauchy problem for linear differential equation of the second order with the unbounded operator coefficients in Banach space is analyzed.

Über Lösung der Koschy-Aufgabe für die linearen Differentialgleichung des zweiten Grads mit den beständigen unbegrenzten Operatorkoeffizienten im Banachischen Raum

Zusammenfassung: Es wird die Koschy-Aufgabe für die linearen Differentialgleichung des zweiten Grads mit den unbegrenzten Operatorkoeffizienten im Banschischen Raum untersucht.

Sur la solution du problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire du second ordre avec les coefficients opérateurs illimités dans l'espace de Banach

Résumé: Le problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire du second ordre avec les coefficients opérateurs illimités est étudié dans l'espace de Banach.
