

**ИНЖЕНЕРНЫЙ АНАЛИЗ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ**

Д.К. Агишева, В.М. Шаповалов

*Кафедра "Технологические машины и оборудование",
Волжский политехнический институт
Волгоградского государственного технического университета*

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: метод Бубнова-Галеркина; многослойная пластина; нестационарная теплопроводность; процесс вулканизации; теплофизические свойства.

Аннотация: Предложен способ приближенного решения задачи нестационарной теплопроводности многослойной пластины. Теплофизические свойства слоев постоянны и между слоями имеет место идеальный тепловой контакт. Сопоставление полученного решения с точным показало хорошее их соответствие.

Из соображений прочности стенка надувного резиноканевого амортизатора выполняется многослойной. Она состоит из двух слоев резины толщиной 3 и 6 мм. Между слоями резины находится намотка обрезиненного корда толщиной 15 мм. Намотка корда составляет значительную часть толщины стенки, поэтому тепловой эффект вулканизации не учитываем. Между слоями материала идеальный тепловой контакт.

Теплофизические свойства резины ($\lambda=0,163$ Вт/(м·К), $\rho c=1,66 \cdot 10^6$ Дж/(м³·К)) отличаются от свойств волокна корда ($\lambda=0,31$ Вт/(м·К), $\rho c=2,37 \cdot 10^6$ Дж/(м³·К)) [1, 2], где λ – коэффициент теплопроводности, ρc – объемная теплоемкость. Задача состоит в определении времени прогрева стенки в процессе вулканизации. Продолжительность тепловой обработки определяет энергозатраты процесса.

В процессе вулканизации пар конденсируется и отдает тепло непосредственно внешней и внутренней стенкам амортизатора. Ввиду низкого коэффициента теплопроводности резины и высокого коэффициента теплоотдачи при конденсации число Био велико, так что можно на свободных поверхностях принять граничное условие первого рода.

Имеются точные решения задач теплопроводности многослойной стенки [3, 4], а также приближенные соотношения для эффективной теплопроводности многослойных стенок и композиционных материалов [5, 6]. Однако для инженерной физики приближенные решения сохраняют свою актуальность.

В данной работе дается приближенное решение задачи нестационарной теплопроводности многослойной пластины, пригодное для инженерной оценки, в частности, при расчете продолжительности процесса вулканизации.

В общем случае имеем пластину, состоящую из n различающихся по теплофизическим свойствам слоев (рис. 1). Учитываем только поперечную теплопроводность. Толщина i -го слоя – δ_i , его теплофизические характеристики λ_i и ρc_i .

Общая толщина пластины $\sum_{i=1}^n \delta_i = \delta$.

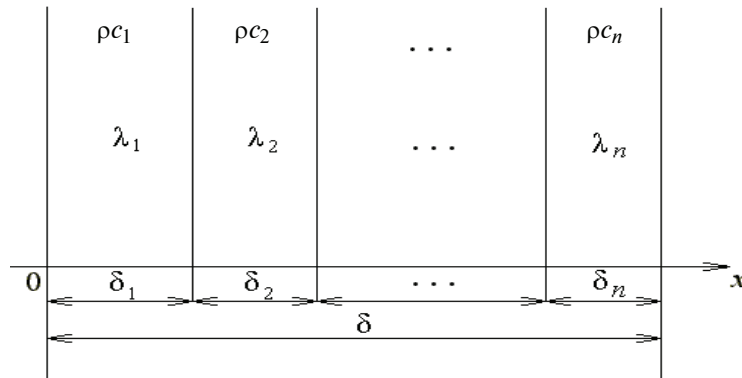


Рис. 1 Расчетная схема многослойной пластины

Вместо традиционной записи системы уравнений теплопроводности для каждого слоя и граничных условий четвертого рода (на границах соприкосновения слоев) используем одно уравнение теплопроводности, считая теплофизические свойства функциями поперечной координаты (уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами).

Задача описывается уравнением теплопроводности с начальным и граничными условиями

$$\rho c(x) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad (t > 0; \quad 0 < x < \delta); \quad (1)$$

$$t = 0, T = T_0;$$

$$x = 0, T = T_c;$$

$$x = \delta, T = T_c,$$

где

$$\{\lambda, \rho c\} = \begin{cases} \{\lambda_1, \rho c_1\}, & 0 < x < \delta_1, \\ \{\lambda_i, \rho c_i\}, & \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j < x < \sum_{j=1}^i \delta_j; \end{cases}$$

T_0 – начальная температура пластины (однородная по толщине); T_c – температура внешних поверхностей (равная температуре конденсации пара); t – время; T – температура; x – поперечная координата. Здесь $\rho c(x)$ и $\lambda(x)$ являются ступенчатыми функциями, сохраняющими постоянное значение в пределах отдельного слоя.

Примем в качестве масштабов теплопроводности, объемной теплоемкости, длины и температуры $\lambda_1, \rho c_1, \delta, T_0 - T_c$ соответственно. Введем безразмерные переменные и параметры

$$X = \frac{x}{\delta}, \quad \Lambda_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}, \quad C_i = \frac{\rho c_i}{\rho c_1}, \quad \Delta_i = \frac{\delta_i}{\delta}, \quad \Theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c}, \quad \text{Fo} = \frac{\lambda_1 t}{\rho c_1 \delta^2}. \quad (2)$$

С учетом (2) задача (1) примет вид

$$C(X) \frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial}{\partial X} \left[\Lambda(X) \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right], \quad (\text{Fo} > 0; \quad 0 < x < 1); \quad (3)$$

$$\text{Fo} = 0, \Theta = 1;$$

$$X = 0, \Theta = 0;$$

$$X = 1, \Theta = 0,$$

где

$$\{\Lambda, C\} = \begin{cases} \{1, 1\}, & 0 < X < \Delta_1, \\ \{\Lambda_i, C_i\}, & \sum_{j=1}^{i-1} \Delta_j < X < \sum_{j=1}^i \Delta_j. \end{cases}$$

Решение задачи (3) ведем ортогональным методом Бубнова-Галеркина. Приближенное решение, точно удовлетворяющее граничным условиям, находится в семействе функций

$$\Theta_n = \sum_{k=1}^n a_k(\text{Fo}) \cdot \psi_k(X), \quad (4)$$

где в качестве базиса взята система функций

$$\psi_k(X) = (1 - X)X^k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ограничимся первым приближением $k = 1$. Составив невязку для уравнения (3) при $\Theta = \Theta_1$, потребуем ее ортогональности к базисной функции, т.е.

$$\int_0^1 L(\Theta_1)(1 - X)XdX = 0, \quad (5)$$

где $L(\Theta_1) = C(X) \frac{\partial \Theta_1}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial}{\partial X} \left[\Lambda(X) \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} \right]$.

Подставив выражение (4) в уравнение (5), получим

$$\frac{da_1}{d\text{Fo}} \int_0^1 C(X)(1 - X)^2 X^2 dX - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial X} \left[\Lambda(X) \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} \right] (1 - X)XdX = 0.$$

Чтобы исключить операцию дифференцирования ступенчатой функции $\Lambda(X)$ во втором слагаемом, выполним интегрирование по частям. При этом получим уравнение

$$\frac{da_1}{d\text{Fo}} \int_0^1 C(X)(1 - X)^2 X^2 dX - X(1 - X)\Lambda(X) \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} \Big|_0^1 + \int_0^1 \Lambda(X) \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} (1 - 2X) dX = 0. \quad (6)$$

Поскольку Λ и C ступенчатые функции, необходимо интервал интегрирования $[0, 1]$ разбить на участки, соответствующие отдельным слоям пластины. Поэтому в развернутой форме уравнение (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{d\text{Fo}} \left\{ \int_0^{\Delta_1} (1 - X)^2 X^2 dX + \sum_{j=2}^m \left[\int_{X_{j-1}}^{X_j} C_j (1 - X)^2 X^2 dX \right] \right\} - a_1 (1 - X)X(1 - 2X) \Big|_0^{\Delta_1} - \\ - a_1 \sum_{j=2}^m \left[\Lambda_j (1 - X)X(1 - 2X) \Big|_{\Delta_{j-1}}^{\Delta_j} \right] + a_1 \left[\int_0^{\Delta_1} (1 - 2X)^2 dX + \sum_{j=2}^m \Lambda_j \int_{X_{j-1}}^{X_j} (1 - 2X)^2 dX \right] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь и ниже для краткости записи обозначим $X_j = \sum_{i=0}^j \Delta_i$.

Получили дифференциальное уравнение первого порядка для функции a_1 .
Решение уравнения (7) имеет вид

$$a_1 = a_0 \cdot \exp\left(-\frac{D_2}{D_1} \text{Fo}\right), \quad (8)$$

где

$$D_1 = \frac{\Delta_1^3}{3} (10 - 15\Delta_1 + 6\Delta_1^2) + \frac{1}{3} \sum_{j=2}^m C_j X^3 (10 - 15X + 6X^2) \Big|_{X_{j-1}}^{X_j},$$

$$D_2 = \frac{1}{6} - (1 - \Delta_1)\Delta_1(1 - 2\Delta_1) - \frac{1}{6}(1 - 2\Delta_1)^3 - \sum_{j=2}^m \Lambda_j \left[(1 - X)X(1 - 2X) + \frac{1}{6}(1 - 2X)^3 \right] \Big|_{X_{j-1}}^{X_j}.$$

Для определения постоянной a_0 потребуем выполнения начального условия в (3) среднеинтегрально, т.е.

$$\text{Fo} = 0, \quad \int_0^1 \Theta_1(a = a_0) dX = 1,$$

откуда находим $a_0 = 6$.

В частном случае трехслойной пластины (в расчетных формулах необходимо положить $m = 3$, $\Lambda_1 = \Lambda_3 = 1$, $C_1 = C_3 = 1$) решение (8) упрощается и принимает вид

$$a_1 = 6 \exp\left(-\frac{D_2}{D_1} \text{Fo}\right), \quad (9)$$

где

$$D_1 = \frac{1}{30} + \frac{1 - C_2}{30} \left\{ \Delta_1^3 (10 - 15\Delta_1 + 6\Delta_1^2) - (\Delta_1 + \Delta_2)^3 \left[10 - 15(\Delta_1 + \Delta_2) + 6(\Delta_1 + \Delta_2)^2 \right] \right\},$$

$$D_2 = \frac{1}{3} + \frac{\Lambda_2 - 1}{3} \left\{ (1 - 2\Delta_1)[1 + 2\Delta_1(1 - \Delta_1)] - (1 - 2\Delta_1 - 2\Delta_2)[1 + 2(\Delta_1 + \Delta_2)(1 - \Delta_1 - \Delta_2)] \right\}.$$

Таким образом, в результате решения удалось свести задачу нестационарной теплопроводности многослойной пластины к теплопроводности «эквивалентной» однослойной.

В случае однослойной пластины достаточно в (9) положить $\Lambda_2 = 1$, $C_2 = 1$. При этом показатель степени содержит множитель $\frac{D_2}{D_1} = 10$, что соответствует известному результату П.В. Цоя [7].

Найденное решение было сопоставлено с точным решением, полученным методом преобразования Лапласа для симметричной системы тел, состоящей из трех неограниченных пластин [8].

Численный анализ проводился для условий: $\lambda_1 = \lambda_3$, $\delta_1 = \delta_3 = 4$ мм, $\delta_2 = 15$ мм, $\text{Bi} = \infty$.

Учитывались первые 20 членов ряда Фурье. Результаты представлены на рис. 2.

Сплошной линией показано точное решение, соответствующее уравнению

$$\Theta_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n \Psi_n} \cos(\mu_n K_a^{-\frac{1}{2}} x / \ell_2) \exp(-\mu_n^2 K_e^2 K_a^{-1} \text{Fo}_1),$$

где $K_a = 1,33$; $K_\varepsilon = 1,65$; $K_e = 1,88$; $\text{Fo}_1 = 4\text{Fo}(2\delta_1/\delta_2 + 1)^2$; $x = 0,0075$ м (центр пластины),

$$\Psi_n = (1 + K_e K_e K_a^{-\frac{1}{2}}) \sin \mu_n \cos \mu_n K_e K_a^{-\frac{1}{2}} + K_\varepsilon (1 + K_\varepsilon^{-1} K_e K_a^{-\frac{1}{2}}) \cos \mu_n \sin \mu_n K_e K_a^{-\frac{1}{2}}.$$

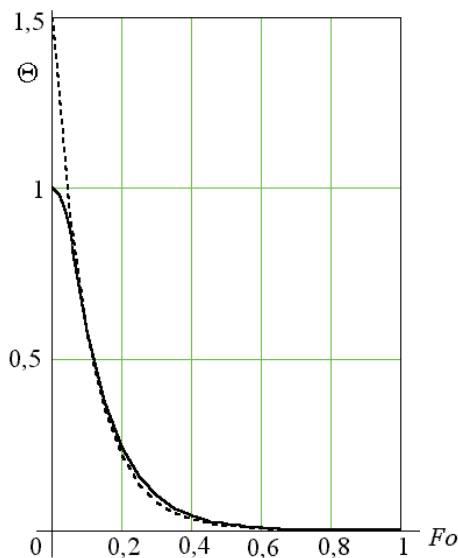


Рис. 2 Зависимость безразмерной температуры в центре трехслойной пластины от числа Фурье: сплошная линия – точное решение, пунктирная – приближенное

В заключение отметим, что решения задачи нестационарной теплопроводности для слоисто-однородных тел в настоящее время все больше используются для изучения теплофизических свойств композиционных материалов, которые наиболее эффективно применяются в металлургии, авиационной и космической технике.

Благодарность

Авторы признательны д.т.н., профессору ВПИ ВолгГТУ И.Я. Шиповскому за предоставленные материалы и внимание к работе.

Список литературы

1. Пивень А.Н., Гречаная Н.А., Чернобыльский И.И. Теплофизические свойства полимерных материалов: Справочник. – К.: Вища школа, 1976. – 180 с.
2. Пехович А.И., Жидких В.М. Расчеты теплового режима твердых тел. – Л.: Энергия, 1958. – 304 с.
3. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1978. – 328 с.
4. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: Учеб. пособие. – 2-е изд., доп. – М.: Высш. школа, 1985. – 480 с.
5. Лыков А.В. Теплообмен: Справочник. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
6. Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. – Л.: Энергия, 1974. – 264 с.
7. Цой П.В. Методы расчета задач тепломассопереноса. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 412 с.
8. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

Собственные числа μ_n определялись из уравнения

$$K_e \operatorname{tg} \mu \cdot \operatorname{tg}(\mu K_e K_a^{-1/2}) = 1$$

методом простой итерации в универсальной математической системе Mathcad 2000.

Как видно из рисунка, хорошая сходимость приближенного и точного решений начинается с $Fo_1 = 0,1$, т.е. в регулярном режиме теплообмена. Кинетика вулканизации внутренних слоев резинового изделия определяется регулярной фазой теплообмена.

Применимость математической модели определяется величиной $\Lambda_i, C_i (i > 1)$. Точность расчетов возрастает при стремлении Λ_i, C_i к единице. Повысить точность решения можно, если взять второе приближение в (4). Однако при этом резко возрастает громоздкость расчетных формул.

Engineering Analysis of Non-Steady-State Heat Conduction of Multi-Layer Plate

D.K. Agisheva, V.M. Shapovalov

*Department " Technological Machines and Equipment",
Volzhski Polytechnic Institute,
Volgograd State Technical University*

Key words and phrases: non-dimensional variables and parameters; Bubnov-Galerkin method; multi-layer plate; initial and final conditions; Non-Steady-State heat conduction; vulcanization process; thermophysical properties; Fourier number.

Abstract: The way of approximate solution of the problem of non-stationary heat conduction of multi-layer plate is offered. Thermophysical properties of layers are constant and there is ideal thermal contact between layers. Comparison of the obtained solution with the exact one showed their good correspondence.

Ingenieurische Analyse der unstationären Wärmeleitfähigkeit der vielschichtigen Platte

Zusammenfassung: Es ist die Methode der annähernden Lösung der Aufgabe der unstationären Wärmeleitfähigkeit der vielschichtigen Platte vorgeschlagen. Die wärme-physikalischen Eigenschaften von den Schichten sind ständig; zwischen den Schichten gibt es den idealen Wärmekontakt. Die Vergleichung der bekommenen Lösung mit der exakten Lösung hat ihre gute Entsprechung gezeigt.

Analyse d'ingénieur de la conductibilité calorifique non-stationnaire de la plaquette multicouche

Résumé: On a proposé le moyen de la résolution approximative du problème de la conductibilité calorifique non-stationnaire de la plaquette multicouche. Les propriétés thermophysiques des couches sont constantes et le contact calorifique idéal a lieu entre ces couches. La comparaison de la résolution reçue avec la résolution exacte a montré leur conformité parfaite.