

УДК 624.073:539.3

**ВЫНУЖДЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН**

Г.М. Куликов¹, Ю.В. Кулешов²

*Кафедры: «Прикладная математика и механика» (1);
«Теоретическая механика» (2), ТГТУ*

Ключевые слова и фразы: амплитудно-частотные характеристики; вынужденные нелинейные колебания; гипотеза Бергера; многослойная прямоугольная пластина; резонансные амплитуды и частоты.

Аннотация: Рассмотрены вынужденные нелинейные колебания многослойных пластин по цилиндрической поверхности на основе гипотезы Бергера. Учтено демпфирование колебаний по линейной гипотезе и на основе концепции комплексного внутреннего трения. Получены уравнения амплитудно-частотных и амплитудно-фазо-частотных характеристик. Построены резонансные номограммы. Дан анализ влияния параметров жесткости, сдвига, демпфирования и нагружения на резонансные амплитуды и частоты.

В монографии [1] получено уравнение изгиба длинной многослойной прямоугольной пластины по цилиндрической поверхности, базирующееся на гипотезе Бергера. В работе [2] исследованы нелинейные свободные колебания многослойных пластин на основе гипотезы Бергера и установлено, что линейная теория приводит к значительным погрешностям при определении фундаментальной частоты пластины при больших амплитудах. В работах [3], [4] динамический аналог уравнений Бергера для однородных изотропных пластин проинтегрирован методом Бубнова-Галеркина. Были построены амплитудно-периодные зависимости, отражающие нелинейный характер колебаний. В работах [5], [6] показано, что реальный диапазон приложения гипотезы Бергера можно расширить на практически важный класс слоистых трансверсально изотропных пластин несимметричной структуры. Здесь, на базе работ [1]-[6], исследуются вынужденные нелинейные колебания многослойных трансверсально изотропных пластин по цилиндрической поверхности. При этом учитывается демпфирование колебаний по линейной гипотезе и на основе концепции комплексного внутреннего трения [7], [8].

Рассмотрим изгибные колебания длинной многослойной прямоугольной пластины, составленной из N трансверсально изотропных слоев. В этом случае динамический аналог уравнения (3.97) монографии [1], на основании принципа Даламбера, принимает следующую форму:

$$\left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} - \alpha^2 \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \chi + 2\varepsilon \frac{\rho h}{D} \frac{\partial}{\partial t} \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \chi = \frac{q_0}{D} \sin \frac{\pi x}{\ell} \cos \omega t. \quad (1)$$

Здесь и далее используемые обозначения соответствуют [1], [2]. Последний член в левой части дифференциального уравнения (1) отражает демпфирование колебаний в

предположении, что сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости $\partial w / \partial t$; ε - коэффициент линейного демпфирования [7]. Следуя [2], примем одномерную аппроксимацию функции перемещений

$$\chi = \chi_0 f(x) T(t), \quad (2)$$

где $f(x)$ - фундаментальная мода линейной задачи о свободных колебаниях пластины [2]. Применяя метод Бубнова-Галеркина [9] и учитывая результаты [2] для константы интегрирования α^2 , получим уравнение Дуффинга [10] на временную составляющую:

$$\frac{d^2 T}{d\zeta^2} + 2\varepsilon_* \frac{dT}{d\zeta} + P^2 (T + MT^3) = R \cos \omega_* \zeta. \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon_* = \varepsilon \ell^2 \sqrt{\rho h / D}$ - безразмерный параметр демпфирования и

$$M = 6\lambda \frac{\chi_0^2}{h^2 P^2}, \quad R = \frac{Q_0 h}{\chi_0},$$

$$Q_0 = \frac{q_0 \ell^4 \int_0^\ell f \sin \frac{\pi x}{\ell} dx}{hD \left(\int_0^\ell f^2 dx - \frac{h^2}{\beta} \int_0^\ell f f'' dx \right)}.$$

Выбирая первое приближение решения уравнения (3) в форме

$$T = c_1 \cos(\omega_* \zeta - \psi) = a_1 \cos \omega_* \zeta + b_1 \sin \omega_* \zeta, \quad (4)$$

и усредняя (3) с учетом (4) по интервалу времени, равному длительности одного цикла, получаем уравнения амплитудно-частотной и амплитудно-фазо-частотной характеристик

$$\frac{3}{4} M c_1^3 = \left(\frac{\omega_*^2}{P^2} - 1 \right) c_1 + \frac{R}{P^2} \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_*^2 \omega_*^2 c_1^2}{R^2}}, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\varepsilon_* \omega_*}{P^2 \left(1 + \frac{3}{4} M c_1^2 \right) - \omega_*^2}. \quad (6)$$

При $\varepsilon_* = 0$ из (6) получаем $\psi = 0$ или $\psi = \pi$, $b_1 = 0$, $a_1 = \pm c_1$, а из (5) - уравнение амплитудно-частотной характеристики недемпфированных нелинейных вынужденных колебаний пластины

$$\frac{3}{4} M a_1^3 = \left(\frac{\omega_*^2}{P^2} - 1 \right) a_1 + \frac{R}{P^2}. \quad (7)$$

Если при этом дополнительно положить $R = 0$, то из (7) получим уравнение скелетной кривой

$$\frac{3}{4} M a_1^2 = \frac{\omega_*^2}{P^2} - 1. \quad (8)$$

Используя зависимость между прогибом и функцией перемещений

$$w = \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \chi, \quad (9)$$

уравнения (5)-(8) можно записать через безразмерную амплитуду w_0/h . Так, например, при $f(x) = \sin \frac{\pi x}{\ell}$ уравнение (7) принимает форму приведенного кубического уравнения

$$\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 + p \frac{w_0}{h} + q = 0, \quad (10)$$

$$p = \frac{4\eta_3(1+\theta\delta)}{9(1+\delta)} \left(1 - \frac{\omega_*^2}{P^2}\right), \quad q = -\frac{4\bar{q}_0\eta_3}{9}, \quad \bar{q}_0 = \frac{q_0\ell^4}{hD\pi^4}.$$

На рис. 1 приведены кривые АЧХ для многослойной пластины $\theta = 0,01$; $\delta = 0,5$; $\eta_3 = 1,25$; $\bar{q}_0 = 1,8$, построенные по уравнению (10), и соответствующая скелетная кривая ($q_0 = 0$).

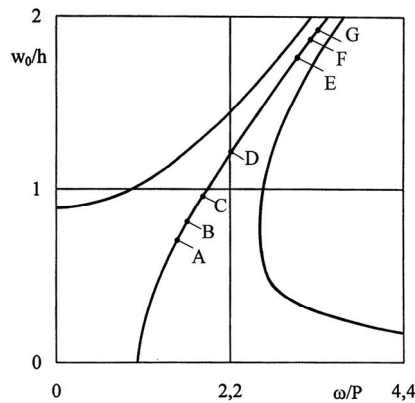


Рис. 1 АЧХ свободных и вынужденных колебаний и резонансные точки многослойной пластины

Известно [10], что приближенные значения резонансных амплитуд и резонансных частот можно определять как координаты точек пересечения амплитудно-частотной и скелетной кривых. Так, в рамках указанной выше аппроксимации, имеем:

$$\left(\frac{w_0}{h}\right)_{\text{рез}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\eta_3 \left(4\eta_3 \varepsilon_*^2 (1+\theta\delta)^2 + 9\bar{q}_0^2 \pi^4 (1+\delta)^2\right) - 2\eta_3 \varepsilon_* (1+\theta\delta)}{(1+\delta)\varepsilon_*}}, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\omega_*}{P}\right)_{\text{рез}} = \frac{\pi^2 \bar{q}_0}{2\varepsilon_* \left(\frac{w_0}{h}\right)_{\text{рез}}} \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\theta\delta}}. \quad (12)$$

На рис. 1 показаны резонансные точки A, B, C, D, E, F, G, определенные на основе зависимостей (11), (12) для следующих значений параметра демпфирования: $A(\varepsilon_* = 10)$, $B(\varepsilon_* = 8)$, $C(\varepsilon_* = 6)$, $D(\varepsilon_* = 4)$, $E(\varepsilon_* = 2)$, $F(\varepsilon_* = 1,8)$, $G(\varepsilon_* = 1,7)$. Из рис. 1 видно, что увеличение параметра демпфирования приводит к уменьшению резонансных амплитуд и резонансных частот пластины. На рис. 2 приведена номограмма зависимостей резонансных амплитуд и резонансных частот пластины от параметра демпфирования и жесткостного параметра η_3 при $\theta = 0,01$; $\delta = 0,5$; $\bar{q}_0 = 1,8$. Из рис. 2 видно, что при увеличении параметра η_3 резонансные амплитуды увеличиваются, а резонансные частоты уменьшаются. Увеличивая параметр демпфирования, можно

нейтрализовать эффект увеличения резонансных амплитуд при увеличении параметра η_3 . На рис. 3 приведена номограмма зависимостей резонансных амплитуд и резонансных частот многослойной пластины от параметра демпфирования и параметра сдвига δ при $\theta = 0,001$; $\eta_3 = 2,75$; $\bar{q}_0 = 1,8$. Из рис. 3 видно, что при увеличении параметра сдвига возрастают как резонансные амплитуды, так и резонансные частоты и это увеличение можно компенсировать увеличением диссипации пластины. На рис. 4 приведена номограмма зависимостей резонансных амплитуд и резонансных частот многослойной пластины от параметра η_3 и отношения $K = \bar{q}_0 / \varepsilon_*$ параметра нагрузки к параметру демпфирования при $\theta = 0,01$; $\delta = 0,5$. Из рис. 4 и выражения для K видно, что влияние увеличения параметра нагрузки на резонансные амплитуды можно компенсировать увеличением параметра демпфирования ε_* и уменьшением жесткого параметра η_3 .

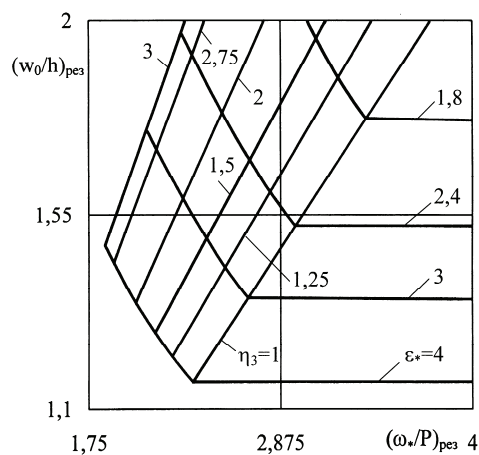


Рис. 2 Совместное влияние демпфирования и жесткости многослойной пластины на ее резонансные амплитуды и частоты

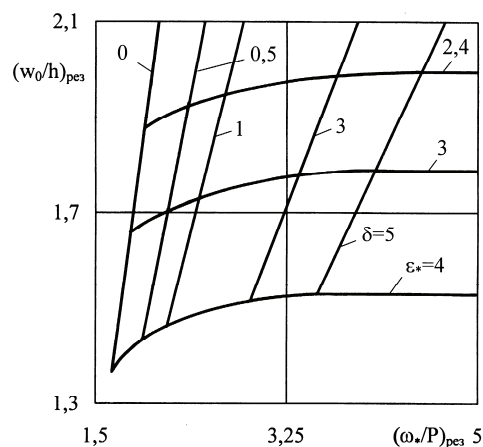


Рис. 3 Совместное влияние демпфирования и поперечного сдвига многослойной пластины на ее резонансные амплитуды и частоты

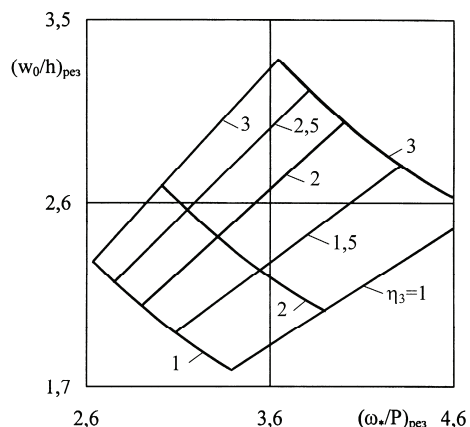


Рис. 4 Совместное влияние нагрузки, демпфирования и жесткости многослойной пластины на ее резонансные амплитуды и частоты: $K = 1$ (1); $K = 4/3$ (2); $K = 2$ (3)

Рассмотрим теперь случай колебаний пластины с учетом демпфирования на основе концепции комплексного внутреннего трения. При этом модули поперечного сдвига слоев пластины предполагаем комплексными

$$G_k \left(1 + i \frac{\delta_k}{\pi} \right). \quad (13)$$

Экспериментально определенные значения коэффициента затухания для некоторых материалов являются исключительно высокими и доходят до $\delta_k / \pi = 0,3$ [11]. Комплексным будет и параметр сдвига $\delta = a + ib$. Например, для трехслойной пластины

$$a = \frac{h^2 \pi^2}{\ell^2 \beta \left(1 + \frac{\delta_3^2}{\pi^2} \right)}, \quad b = - \frac{h^2 \pi \delta_3}{\ell^2 \beta \left(1 + \frac{\delta_3^2}{\pi^2} \right)}. \quad (14)$$

Уравнение типа (3) будет иметь комплексные коэффициенты и комплексную правую часть. Линеаризуя его характеристику, например методом прямой линеаризации [12], получаем

$$\frac{d^2 T}{d\zeta^2} + (U + iV)T = \frac{hQ_0}{\chi_0} \exp(i\omega_* \zeta), \quad (15)$$

где для принятой выше аппроксимации основной моды колебаний пластины

$$U = a_2 + \frac{15 \pi^4 w_0^2}{7 \eta_3 h^2}, \quad a_2 = \frac{\pi^4 \left((1 + \theta a)(1 + a) + \theta b^2 \right)}{(1 + a)^2 + b^2},$$

$$V = \frac{\pi^4 \left(-(1 + \theta a)b + \theta b(1 + a) \right)}{(1 + a)^2 + b^2}. \quad (16)$$

Решая линеаризованное уравнение (15) и используя (9), приходим к следующему амплитудно-частотному уравнению:

$$y^3 + p_1 y + q_1 = 0, \quad (17)$$

$$y = \left(\frac{w_0}{h} \right)^2 + \frac{r}{3}, \quad p_1 = \frac{3s - r^2}{3}, \quad q_1 = \frac{2}{27} r^3 - \frac{rs}{3} + t_1,$$

$$r = \frac{2(a_2 - \omega_*^2)}{a_3}, \quad s = \frac{(a_2 - \omega_*^2)^2 + V^2}{a_3^2}, \quad t_1 = -\frac{\pi^8 \bar{q}_0^{-2}}{a_3^2}, \quad a_3 = \frac{15\pi^4}{7\eta_3}.$$

Если предположить, что $\delta_3 = 0$, то из (17) получаем амплитудно-частотное уравнение (10) для случая недемпфированных колебаний пластины, причем с числовым коэффициентом $7/15$, входящим в формулы для p и q , вместо $4/9$, что является следствием применения метода прямой линеаризации. Резонансные амплитуды и резонансные частоты, определяемые как координаты точек пересечения амплитудно-частотных и скелетных кривых, могут быть теперь найдены по формулам:

$$\left(\frac{w_0}{h}\right)_{\text{рез}} = \frac{\pi^4 \bar{q}_0}{\sqrt{(a_2 - P^2)^2 + V^2}}, \quad (18)$$

$$\left(\frac{\omega_*}{P}\right)_{\text{рез}} = \sqrt{1 + \frac{a_3}{P^2} \left(\frac{w_0}{h}\right)_{\text{рез}}^2}. \quad (19)$$

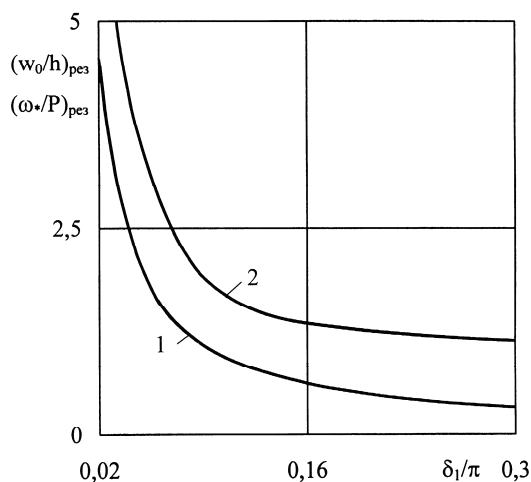


Рис. 5 Зависимости резонансных амплитуд и частот многослойной пластины от коэффициента затухания при учете внутреннего трения

На рис. 5 приведены графики зависимостей резонансных амплитуд и резонансных частот от коэффициента затухания при $\eta_3 = 1,25$; $\delta = 0,5$; $\theta = 0,01$; $\bar{q}_0 = 0,02$. Из рис. 5 видно, что при увеличении коэффициента затухания резонансные амплитуды и резонансные частоты уменьшаются многократно. Это может быть использовано для подавления изгибных колебаний пластин и отстройки их от резонанса варьированием величиной внутреннего трения в материале слоев пакета.

Список литературы

1. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. - М.: Машиностроение, 1988. - 288 с.
2. Куликов Г.М., Кулешов Ю.В. Нелинейные колебания многослойных трансверсально изотропных пластин // Вестник ТГТУ. - 2000. - Т. 6, № 2. - С. 258-263.

3. Wah T. Dynamic response of rectangular plates at large amplitudes // Proc. Seminar on Aeronaut. Sci. - 1961. - Vol. 1. - Pp. 37-50.
4. Wah T. Large amplitude flexural vibration of rectangular plates // Int. J. Mech. Sci. - 1963. - Vol. 5, No. 6. - Pp. 425-438.
5. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Приближенный анализ анизотропных трехслойных пластин конечного прогиба // Механика композитных материалов. - 1980. - № 1. - С. 42-48.
6. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Приближенный анализ нелинейных трансверсально изотропных трехслойных пластин // Механика композитных материалов. - 1980. - № 2. - С. 272-276.
7. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. - М.: Наука, 1972. - 432 с.
8. Кочнева Л.Ф. Внутреннее трение в твердых телах при колебаниях. - М.: Наука, 1979. - 96 с.
9. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. - М.: МГУ, 1969. - 695 с.
10. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. - М.: Машиностроение, 1985. - 472 с.
11. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. - М.: Наука, 1977. - 332 с.
12. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. - Л.: Машиностроение, 1976. - 320 с.

Forced Non-Linear Oscillations of Multilayered Plates

G.M. Kulikov¹, Yu.V. Kuleshov²

*Department of Applied Mathematics and Mechanics (1),
Department of Theoretical Mechanics (2), TSTU*

Key Words and Phrases: amplitude-frequency characteristics; forced non-linear oscillations; Berger's hypothesis; rectangular multilayered plate; resonance amplitudes and frequencies.

Abstract: Forced non-linear oscillations of multilayered plates on the basis of Berger's hypothesis are considered. The vibration damping on the basis of the linear hypothesis and the concept of complex internal friction is taken into account. Amplitude-frequency equations and resonance nomograms are obtained. An analysis of influence of parameters of the stiffness, shear, damping and loading on the resonance amplitudes and frequencies are investigated.

Erzwungene unlineare Schwingungen der vielschichtigen Platten

Zusammenfassung: Es sind die erzwungene unlineare Schwingungen der vielschichtigen Platten über die zylindrischen Oberfläche auf Grund der Berger-Hypothese betrachtet. Es ist die Dämpfung der Schwingungen durch die Linearhypothese und auf Grund der Konzeption der inneren Reibung berücksichtigt. Es sind die Gleichungen der amplitudenfrequenzlichen und amplitudephasefrequenzlichen Charakteristike erhalten. Es sind die Resonanzmonogramme geschaffen. Es ist die Analyse der Einwirkung der Parameter der Flüssigkeit, der Verschiebung, der Dämpfung und der Belastung auf die Resonanzamplituden und Frequenzen gegeben.

Oscillations forcées non-linéaires des plaquettes à plusieurs couches

Résumé: On a examiné les oscillations forcées non-linéaires des plaquettes à plusieurs couches à travers la surface cylindrique à la base de l'hypothèse de Berger. On a tenu compte de l'amortissement des oscillations par l'hypoténuse linéaire et à la base de la conception du frottement complexe intérieur. On a reçu les équations des caractéristiques amplitude-fréquence. On a construit les nanogrammes de la résonance. On a fait l'analyse de l'influence des paramètres de la rigidité, du déplacement, de l'amortissement et du chargement sur les amplitudes de la résonance et de la fréquence.
