

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПЛАСТИНЫ В СЫПУЧЕМ МАТЕРИАЛЕ

В.Ф. Першин, А.А. Пасько, О.В. Демин

Кафедра прикладной механики и сопротивления материалов, ТГТУ

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: застойная зона; поток сыпучего материала; угол поворота пластины; функция тока.

Аннотация: По результатам проведенных экспериментов делается вывод о том, что при движении пластины в сыпучем материале перед ней образуется застойная зона, размеры которой зависят от скорости движения пластины и угла ее поворота. Отмечается, что при повороте пластины на угол, больший угла трения сыпучего материала, имеет место сложное движение материала: скольжение по пластине внутри застойной зоны и обтекание тела треугольной формы.

В некоторых технологических процессах переработки сыпучих материалов используют машины и аппараты, в которых основными рабочими органами являются вращающиеся лопасти, выполненные в виде плоских пластин. Для моделирования реализуемых в них процессов и последующего расчета режимных и геометрических параметров машины необходимо знать характер взаимодействия рабочих органов с сыпучим материалом. В частности, движение пластины в слое сыпучего материала или обтекание пластины потоком сыпучего материала.

Часто при исследовании условий обтекания тел потоком сыпучего материала используют метод последовательных приближений, т.е. сначала рассматривают обтекание изучаемого тела идеальной жидкостью, а затем вводят различные поправки [1].

Хорошее приближение реальной картины течения часто можно получить, решая уравнения неразрывности для «потенциального течения», т.е. в предположении, что жидкость идеальная ($\rho = \text{const}$; $\mu = 0$) и частицы ее не совершают вращения. Эти допущения в достаточной мере справедливы для потоков жидкости с малой вязкостью, за исключением области течения вблизи стенок трубопроводов или вблизи поверхностей, погруженных в поток предметов. Около таких поверхностей влияние вязкости имеет большое значение, и в некоторой области потока вблизи них может быть применена другая система приближений, которая приводит к уравнению пограничного слоя [2].

Рассмотрим случай стационарного течения идеальной жидкости.

Для вихревого двухмерного течения утверждение, что $\text{rot } v = 0$, дает

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 \quad (\text{отсутствие вращения}). \quad (1)$$

Уравнения неразрывности и движения в этом случае имеют вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{уравнение неразрывности}) \quad (2)$$

и
$$\frac{1}{2}\rho(v_x^2 + v_y^2) + P = \text{const} \quad (\text{уравнение движения}). \quad (3)$$

Уравнения (1)-(3) используют для нахождения v_x , v_y и P как функции x и y .

Практика показывает, что легче иметь дело с *функцией тока* $\psi(x, y)$ и *потенциалом скорости* $\phi(x, y)$, а не с составляющими скорости v_x , v_y . Если ψ и ϕ определить как

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad (4)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (5)$$

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad (6)$$

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (7)$$

то уравнения (1) и (2) выполняются автоматически. Из соотношений (4)-(7) получается:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (9)$$

Условия (8) и (9) известны как *уравнения Коши-Римана*, которым должны удовлетворять действительная и мнимая части любой аналитической функции $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$. Величину $w(z)$ называют *комплексным потенциалом*.

Дифференцирование уравнения (8) по x и уравнения (9) по y и последующее сложение полученных выражений дает

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (10)$$

Аналогичным образом можно получить

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (11)$$

В уравнениях (10) и (11) функции ϕ и ψ удовлетворяют двумерной форме уравнения Лапласа. Кривые $\phi(x, y) = \text{const}$ и $\psi(x, y) = \text{const}$ являются *линиями равного потенциала* и *линиями тока* для рассматриваемого течения.

Таким образом, задача кинематики потенциального потока несжимаемой жидкости с математической точки зрения сводится к решению уравнения (10) или (11). Однако эти уравнения есть дифференциальные уравнения в частных производных и имеют бесчисленное множество решений. Поэтому должны быть дополнительные условия для определения функций ϕ и ψ в каждом конкретном случае. Дополнительные условия, которым должны удовлетворять функции ϕ и ψ , относятся к значениям этих функций на границах потока жидкости и поэтому называются *граничными условиями*. В общем случае, т.е. для тела любой формы, помещенного в поток, эта задача не решена точно до настоящего времени.

Для случая прямолинейного движения тела в жидкости всегда можно выбрать такую систему координат, чтобы одна из проекций скорости была равна нулю (рис. 1). Для решения уравнения (11) в этом случае можно сформулировать следующие граничные условия:

– поверхности тела функция тока равна нулю

$$[\psi]_S = 0; \quad (12)$$

– на весьма далеком расстоянии от тела, где возмущающее влияние тела на поток отсутствует (условно говоря, на бесконечности), поток должен иметь функцию тока

$$\psi = v_y \cdot x. \quad (13)$$

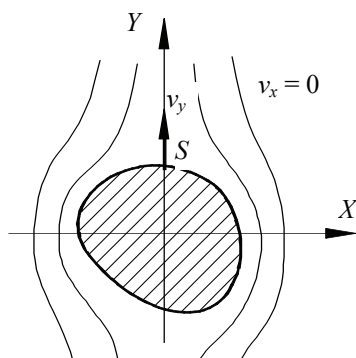


Рис. 1 Движение тела

Как уже отмечалось ранее, пластина, движущаяся в потоке сыпучего материала, является рабочим органом многих технологических машин. Для изучения этого процесса была изготовлена экспериментальная установка (рис. 2).

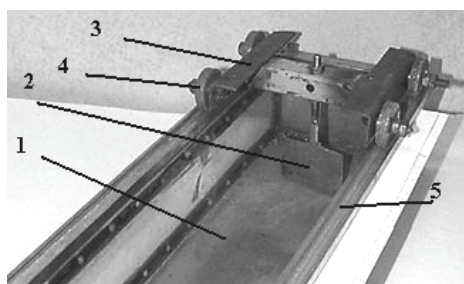


Рис. 2 Фотография экспериментальной установки

Установка состоит из емкости 1 прямоугольной формы, лопатки 2, выполненной в виде плоской пластины и имеющей возможность поворота относительно вертикальной оси, платформы 3 на роликовых колесах 4, перемещаемой в горизонтальной плоскости по направляющим 5. Размеры емкости: длина $A = 480$ мм, ширина $B = 150$ мм, высота $H = 100$ мм. Максимальная ширина пластины $L = 72$ мм, высота $h = 48$ мм. Диапазон скоростей при проведении экспериментов составил от 0,1 до 0,25 м/с [3].

Было замечено, что при движении пластины в слое сыпучего материала перед пластиной образуется застойная область, форму которой в первом приближении можно определить как треугольную. Аналогичная застойная область, образующаяся при струйном обтекании пластины идеальной жидкостью, теоретически была исследована С. А. Чаплыгиным [4].

В ходе предварительных экспериментов было установлено, что размер застойной треугольной зоны, образующейся при движении пластины в слое сыпучего материала, зависит от скорости движения пластины и угла поворота пластины. С увеличением скорости движения пластины угол α (см. рис. 3) уменьшается. Функциональная зависимость была найдена в виде

$$\alpha = \alpha_0 e^{-kv}, \quad (14)$$

где α_0 – угол трения покоя материала; v – скорость движения пластины; k – экспериментальный коэффициент.

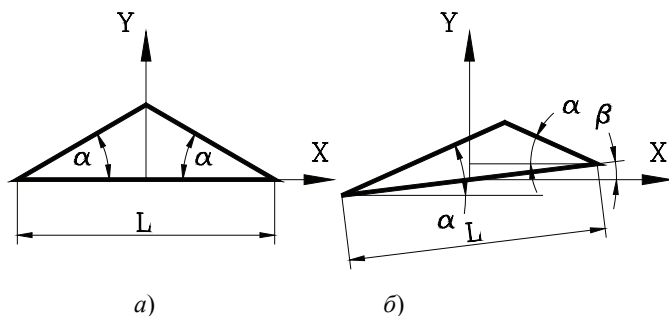


Рис. 3 К расчету размеров застойной зоны

Из зависимости (14) вытекает, что при $v = 0$ угол $\alpha = \alpha_0$, а при $v \rightarrow \infty$ угол $\alpha = 0$, и это соответствует действительности. При отсутствии поворота пластины относительно оси X , т.е. когда ее плоскость перпендикулярна направлению движения, застойная зона образует равнобедренный треугольник с основанием L (рис. 3, а), а в случае поворота пластины на угол β к оси X – треугольник общего вида (рис. 3, б). Как в первом, так и во втором случае, размеры застойной зоны однозначно определяются из геометрических соображений.

Для расчета кинематики потока считалось, что пластина и застойная зона впереди нее образуют единое тело. Для определения функции тока необходимо решить уравнение (11) с учетом граничных условий (12) и (13) для треугольной области. Задача решалась численно – методом конечных разностей. В результате получены значения функции тока $\psi(x, y)$.

Полная скорость потока в каждой точке может быть определена как $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, а с учетом (4) и (5) получим

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}. \quad (15)$$

Выражение (15) позволяет рассчитать значения скорости потока в каждой точке, при этом следует учесть, что скорость потока на бесконечности равна нулю, т.е. $v_\infty = 0$.

Результаты исследования с помощью фотосъемки показали, что при повороте лопатки на угол, равный и больший угла трения сыпучего материала о пластину, наблюдается скольжение материала относительно лопатки. Примечательно то, что треугольная зона, несмотря на движение сыпучего материала относительно пластины, сохраняется за счет перехода в нее материала из области, расположенной на границе этой зоны. Таким образом, мы имеем сложное движение потоков сыпучего материала при обтекании пластины: обтекание потока 1 тела треугольной формы в двух направлениях 2 и 3 и движение потока 4 по пластине 5 за счет скольжения с постоянным проникновением частиц потока 1 в треугольную зону и тем самым обновление ее (рис. 4).

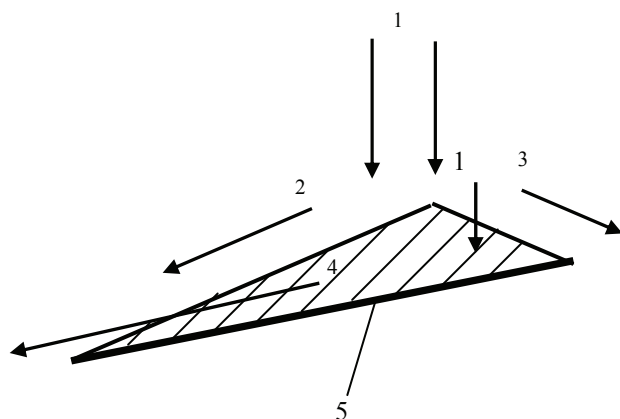


Рис. 4 Схема движения сыпучего материала при обтекании пластины

Полученные математические зависимости позволяют рассчитать скорость потока сыпучего материала при обтекании пластины. Обнаруженный эффект движения сыпучего материала относительно пластины при углах ее поворота больших, чем угол трения сыпучего материала о пластину, позволяет учесть два основных механизма переноса частиц относительно пластины, что необходимо при моделировании процесса смешения сыпучих материалов в лопастных смесителях.

Список литературы

1. Романков П.Г., Курочкина М.И. Гидромеханические процессы химической технологии. – Л.: Химия, 1982. – 288 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 711 с.
3. Демин О.В. Изучение механизма движения частиц при смешении сыпучих материалов в лопастном смесителе: Информ. листок № 70-038-01 / Тамб. центр науч.-техн. информации. – Тамбов, 2001. – 4 с.
4. Чаплыгин С.А. К вопросу о струях в несжимаемой жидкости // Труды отдел. физич. наук Общ. любителей естеств. наук. - 1899. - Т. 10. - Вып. 1.

Modeling of Plate Movement in the Granular Material

V.F. Pershin, A.A. Pasko, O.V. Demin

Department of Applied Mathematics and Strength of Materials

Key words and phrases: granular material flow; plate turn angle; stagnation zone; stream function.

Abstract: According to the results of conducted experiments it is concluded, that when the plate moves in the granular material, stagnation zone is formed in front of it, the size of which depends on the plate movement velocity and its turn angle. It is stated, that when the plate turns the angle which is bigger than the granular material friction angle, complex material movement takes place – sliding along the plate inside the stagnation zone and triangle shape body flow.

Modellierung der Plattenbewegung im Schüttstoff

Zusammenfassung: Nach den Resultaten der Untersuchungen wird es die Schlußfolgerung gezogen, daß bei der Bewegung der Platte im Schüttstoff vor ihr die Stagnationszone gebildet wird, deren Größen von der Geschwindigkeit der Bewegung der Platte und dem Winkel ihrer Drehung abhängig sind. Es wird betont, daß bei der Drehung der Platte auf den Winkel, der größer als der Winkel der Reibung des Schüttstoffes ist, gibt es die komplizierte Bewegung des Stoffes: Gleiten nach der Platte innen der Stagnationszone und Umfließen des Körpers der dreieckigen Form.

Modélage du mouvement de la plaquette dans la matière pulvérulente

Résumé: D'après les résultats des études des expériences effectués on fait la conclusion suivante: pendant le mouvement de la plaquette dans la matière pulvérulente la zone de stagnation est formée devant cette plaquette. Les dimensions de la zone de stagnation dépendent de la vitesse du mouvement de la plaquette et de l'angle de son détour. On note que pendant le détour de la plaquette dans l'angle qui est plus grand que celui du frottement de la matière pulvérulente il y a le mouvement complexe: glissement à travers la plaquette à l'intérieur de la zone de stagnation et écoulement du corps de la forme triangulaire.
