УДК 517.928.4

О МАЛОМ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕМ ВОЗМУЩЕНИИ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ ОПЕРАТОРОМ И ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ КОЭФФИЦИЕНТОМ ОБЩЕГО ВИДА

В.И. Фомин

Кафедра прикладной математики и механики, ТГТУ

Представлена членом редколлегии профессором Г.М. Куликовым

Ключевые слова и фразы: банахово пространство; вырождающийся коэффициент; малый параметр; полугруппа; производящий оператор; сингулярное уравнение; стабилизирующее возмущение.

Аннотация: Методом малых стабилизирующих возмущений изучается сингулярное дифференциальное уравнение с вырождающимся коэффициентом общего вида.

Данная работа является продолжением исследований автором малых стабилизирующих возмущений вырождающихся линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве ([1] – [30]).

В банаховом пространстве E изучается сингулярное дифференциальное уравнение

$$\varphi(t)x'(t) = Ax(t) + f(t),\ 0 < t < \infty \ , \tag{1}$$

с постоянным неограниченным оператором $A : D(A) \subset E \to E$, $\overline{D(A)} = E$; $f(t) \in C([0,\infty);\ E)$; $\varphi(t) \in C\big((0,\infty);(0,\infty)\big)$; $\varphi(+0) = 0$.

Рассмотрим стабилизирующее, то есть, устраняющее вырожденность, возмущение уравнения (1) малым параметром $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \text{const}$, $\varepsilon_0 > 0$:

$$\begin{cases} \varphi(t+\varepsilon)x_\varepsilon'(t) = Ax_\varepsilon(t) + f(t),\ 0 \le t < \infty, & (2) \\ x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0},\ x_{\varepsilon,0} \in D(A). & (3) \end{cases}$$

Пусть

1) A – производящий оператор полугруппы $U(t)$ класса C_0, то есть полугруппы, сильно непрерывной при $t > 0$ и удовлетворяющей условию

$$\lim_{t \to +0} U(t)x = x,\ x \in E \tag{4}$$

(в силу (4) можно считать, что $U(0) = I$);

2) $f(t) \in D(A),\ 0 \le t < \infty;\ Af(t) \in C\big([0,\infty);E\big)$;

3) $\varphi(t)$ при $t \to +0$ является бесконечно малой величиной порядка α, где $\alpha \in R,\ \alpha \ge 1$:

$$\varphi(t) \sim Kt^{\alpha}, \tag{5}$$

где $K = \text{const},\ K > 0$.

Из условия 1) следует замкнутость оператора A ([31, с. 61]) а также соотношения

$$U'(t)x = AU(t)x,\ x \in D(A); \tag{6}$$

$$AU(t)x = U(t)Ax,\ x \in D(A) \tag{7}$$

([31, с. 41]).

Из условия 3) следует, что при любом фиксированном $t \in (0,\infty)$

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} = \infty . \tag{8}$$

Пусть ω – тип полугруппы $U(t)$. Из соотношения

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln\|U(t)\|}{t} = \omega$$

([31, с. 43]) следует оценка

$$\|U(t)\| \le M \exp(\omega_\delta\, t),\ 0 \le t < \infty, \tag{9}$$

где $M > 0,\ \omega_\delta = \omega + \delta$, где δ – произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Замечание 1. Будем считать в дальнейшем, что в оценке (9) в случае $\omega < 0$

$$\omega_\delta < 0; \tag{10}$$

в случае $\omega < -c$, где $c > 0$,

$$\omega_\delta < -c . \tag{11}$$

Лемма 1. При выполнении условий 1 – 3 задача (2), (3) при любом фиксированном $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$ имеет решение

$$J_\varepsilon(t) = U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right) x_{\varepsilon,0} + \int_0^t U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right) \frac{f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)}\, ds . \tag{12}$$

Если $\omega < 0$ и $f(t)$ ограничена на $[0,\ \infty)$, то $J_\varepsilon(t)$ ограничено на $[0,\ \infty)$.

Доказательство. Заметим, что $J_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}$, то есть $J_\varepsilon(t)$ удовлетворяет начальному условию (3). Применяя правило дифференцирования сложной функции, формулу для производной от интеграла с переменными верхним пределом ([32, с. 116]) и соотношение (6), получаем:

$$\left[U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right) x_{\varepsilon,0}\right]' = \frac{1}{\varphi(t+\varepsilon)} AU\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right) x_{\varepsilon,0} . \tag{13}$$

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$g_\varepsilon(s,\ t) = U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right)\frac{f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)}. \qquad (14)$$

В силу непрерывности функции $\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}$ по переменным s и t как интеграла с переменным пределом ([32, с. 115]), сильной непрерывности полугруппы $U(.)$ и непрерывности функции $\frac{f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)}$ функция $g_\varepsilon(s,t)$ непрерывна по переменным s и t как композиция операторной и векторной функций ([31, с. 21]). Используя (6), получаем:

$$\left[g_\varepsilon(s,\ t)\right]'_t = \frac{1}{\varphi(t+\varepsilon)} AU\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right)\frac{f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)}, \qquad (15)$$

или в силу (7)

$$\left[g_\varepsilon(s,\ t)\right]'_t = \frac{1}{\varphi(t+\varepsilon)} U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right)\frac{Af(s)}{\varphi(s+\varepsilon)}. \qquad (16)$$

В силу сильной непрерывности $U(\cdot)$ и непрерывности $Af(s)$ из (16) следует, что $\left[g_\varepsilon(s,\ t)\right]'_t$ непрерывна по s и t. Используя формулу дифференцирования интеграла по параметру, соотношение (15) и замкнутость оператора A, получаем:

$$\left[\int_0^t g_\varepsilon(s,\ t)ds\right]' = \frac{1}{\varphi(t+\varepsilon)}\left[A\int_0^t U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right)\frac{f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)}ds + f(t)\right]. \qquad (17)$$

В силу (13), (17)

$$J'_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varphi(t+\varepsilon)}\left[AJ_\varepsilon(t) + f(t)\right].$$

Тогда

$$\varphi(t+\varepsilon)J'_\varepsilon(t) = AJ_\varepsilon(t) + f(t),$$

то есть, $J_\varepsilon(t)$ является решением уравнения (2).

Итак, $J_\varepsilon(t)$ является решением задачи (2), (3).

Покажем, что если $\omega < 0$ и $f(t)$ ограничена на $[0,\ \infty)$, то решение $J_\varepsilon(t)$ ограничено на $[0,\ \infty)$. Получаем:

$$\left\|J_\varepsilon(t)\right\| \le \left\|U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right)\right\| \cdot \left\|x_{\varepsilon,0}\right\| + \int_0^t \left\|g_\varepsilon(s,t)\right\| ds. \qquad (18)$$

В силу (9)

$$\left\|U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right)\right\| \le M\exp\left(\omega_\delta \int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right). \qquad (19)$$

Пусть $\omega < 0$. Тогда из (19) следует в силу (10) оценка

$$\left\| U\left(\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)} \right) \right\| < M \ . \tag{20}$$

Положим

$$N(t) = \max_{0 \le s \le t} \| f(s) \| \, .$$

Тогда в силу (9)

$$\int\limits_0^t \| g_\varepsilon(s,t) \| \, ds \le \int\limits_0^t M \exp\left(\omega_\delta \int\limits_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)} \right) \frac{\| f(s) \|}{\varphi(s+\varepsilon)} \, ds \le$$

$$\le M \, N(t) \int\limits_0^t \exp\left(\omega_\delta \int\limits_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)} \right) \frac{ds}{\varphi(s+\varepsilon)} = \frac{M}{-\omega_\delta} N(t) \exp\left(\omega_\delta \int\limits_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)} \right) \Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{M}{-\omega_\delta} N(t) \left[1 - \exp\left(\omega_\delta \int\limits_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)} \right) \right] < \frac{M}{-\omega_\delta} N(t).$$

Получена оценка

$$\int\limits_0^t \| g_\varepsilon(s,t) \| \, ds < \frac{M}{-\omega_\delta} N(t) \, . \tag{21}$$

В силу (18), (20), (21)

$$\| J_\varepsilon(t) \| < M \, \| x_{\varepsilon,0} \| + \frac{M}{-\omega_\delta} N(t) \, . \tag{22}$$

Из (22) следует, что если $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то решение $J_\varepsilon(t)$ ограничено на $[0, \infty)$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1) – 3) и $\omega < 0$. Тогда определена функция вида

$$J_0(t) = \int\limits_0^t U\left(\int\limits_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \frac{f(s)}{\varphi(s)} \, ds, \ t \in (0, \infty) \, . \tag{23}$$

Эта функция ограничена при $t \to +0$. Если $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $J_0(t)$ ограничена на $(0, \infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. В силу непрерывности $U(\cdot)$ и непрерывности $f(s)$, $\varphi(s)$ подынтегральная функция

$$g(s, \ t) = U\left(\int\limits_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \frac{f(s)}{\varphi(s)} \tag{24}$$

непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом промежутке $[\Delta, \ t]$, где Δ – произвольное сколь угодно малое положительное число. Тогда несобственный интеграл

$$J_0(t) = \int\limits_0^t g(s,t) \, ds \tag{25}$$

сходится, если сходится несобственный интеграл

$$\int_0^t \|g(s,t)\| ds . \tag{26}$$

Покажем сходимость интеграла (26). В силу (9)

$$\int_0^t \|g(s,t)\| ds \le \int_0^t M \exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right) \frac{\|f(s)\|}{\varphi(s)} ds \le$$

$$\le M\, N(t) \int_0^t \exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right) \frac{ds}{\varphi(s)} = \frac{M}{-\omega_\delta} N(t) \exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{M}{-\omega_\delta} N(t) \left[1 - \lim_{s\to+0} \exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\right] = \frac{M}{-\omega_\delta} N(t),$$

так как в силу (8), (10)

$$\lim_{s\to+0} \exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right) = 0 . \tag{27}$$

Получена оценка

$$\int_0^t \|g(s,t)\| ds \le \frac{M}{-\omega_\delta} N(t) ,$$

из которой следует сходимость интеграла (26) и, тем самым, сходимость интеграла (25) а также оценка

$$\|J_0(t)\| \le \frac{M}{-\omega_\delta} N(t),\ t \in (0,\ \infty) , \tag{28}$$

из которой следует ограниченность $J_0(t)$ при $t \to +0$. Если $f(t)$ ограничена на $[0,\ \infty)$, то из (28) следует, что $J_0(t)$ ограничена на $(0,\ \infty)$.

Лемма 2 доказана.

Замечание 2. Из условия 3) следует, что для любого фиксированного $t > 0$ в случае $\alpha > 1$

$$\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \sim \frac{1}{K(\alpha-1)} \frac{1}{s^{\alpha-1}} , \tag{29}$$

в случае $\alpha = 1$

$$\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \sim \frac{1}{K} \ln\frac{1}{s} \tag{30}$$

при $s \to +0$.

Лемма 3. Если $\omega < 0$ в случае $\alpha > 1$ и $\omega < -K$ в случае $\alpha = 1$ (здесь K – константа из условия 3)), то подынтегральная функция (24) удовлетворяет условию

$$\lim_{s\to+0} g(s,\ t) = 0,\ \ t \in (0,\ \infty) . \tag{31}$$

Доказательство. При любом фиксированном $t > 0$ и любом $s \in (0,\ t]$ получаем в силу (9)

$$\| g(s,\ t) \| \le M\ N(t) \frac{1}{\varphi(s)} \exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right). \tag{32}$$

В силу (32) для справедливости (31) достаточно показать, что

$$\lim_{s \to +0} \left[\frac{1}{\varphi(s)} \exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \right] = 0 . \tag{33}$$

В силу (5), (10)

$$\lim_{s \to +0} \left[\frac{1}{\varphi(s)} \exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \right] = \frac{1}{K} \lim_{s \to +0} \left[\frac{1}{s^\alpha} \exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \right]. \tag{34}$$

В силу (34) для справедливости (33) достаточно показать, что

$$\lim_{s \to +0} \left[\frac{1}{s^\alpha} \exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \right] = 0 . \tag{35}$$

Для справедливости (35) достаточно показать, что

$$\lim_{s \to +0} \ln \kappa(s,\ t) = -\infty , \tag{36}$$

где

$$\kappa(s,\ t) = \frac{1}{s^\alpha} \exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right).$$

Имеем:

$$\ln \kappa(s,\ t) = \left(\alpha + \omega_\delta \frac{\int_s^t d\tau \big/ \varphi(\tau)}{\ln 1 \big/ s} \right) \ln \frac{1}{s} .$$

Тогда

$$\lim_{s \to +0} \ln \kappa(s,\ t) = \lim_{s \to +0} \left[\left(\alpha + \omega_\delta \frac{\int_s^t d\tau \big/ \varphi(\tau)}{\ln 1 \big/ s} \right) \ln \frac{1}{s} \right]. \tag{37}$$

Заметим, что

$$\lim_{s \to +0} \ln \frac{1}{s} = \infty . \tag{38}$$

При $\alpha > 1$ в силу (29) и правила Лопиталя:

$$\lim_{s\to+0}\frac{\int_s^t d\tau/\varphi(\tau)}{\ln 1/s}=\frac{1}{K(\alpha-1)}\lim_{s\to+0}\frac{1/s^{\alpha-1}}{\ln 1/s}=\left|\begin{matrix}\gamma=\frac{1}{s}\\ s\to+0\\ \gamma\to\infty\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{K(\alpha-1)}\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\gamma^{\alpha-1}}{\ln\gamma}=\frac{1}{K}\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\gamma^{\alpha-2}}{1/\gamma}=\frac{1}{K}\lim_{\gamma\to\infty}\gamma^{\alpha-1}=\infty.$$

Получили при $\alpha>1$:

$$\lim_{s\to+0}\frac{\int_s^t d\tau/\varphi(\tau)}{\ln 1/s}=\infty. \tag{39}$$

Из (10), (37) – (39) следует (36) в случае $\alpha>1$.

При $\alpha=1$ в силу (30)

$$\lim_{s\to+0}\frac{\int_s^t d\tau/\varphi(\tau)}{\ln 1/s}=\frac{1}{K}\lim_{s\to+0}\frac{\ln 1/s}{\ln 1/s}=\frac{1}{K}. \tag{40}$$

В силу (40)

$$\lim_{s\to+0}\left(1+\omega_\delta\frac{\int_s^t d\tau/\varphi(\tau)}{\ln 1/s}\right)=1+\frac{\omega_\delta}{K}. \tag{41}$$

В силу (11) из условия $\omega<-K$ следует, что $\omega_\delta<-K$, следовательно,

$$1+\frac{\omega_\delta}{K}<0. \tag{42}$$

Из (37), (38), (41), (42) следует (36) в случае $\alpha=1$.

Лемма 3 доказана.

В силу (31) доопределим $g(s,\ t)$ по непрерывности в нуле:

$$g(0,\ t)=\lim_{s\to+0}g(s,\ t)=0,\ t\in(0,\ \infty). \tag{43}$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия 1) – 3) и условия вида 4) $\omega<0$ в случае $\alpha>1$, $\omega<-K$ в случае $\alpha=1$; 5) при $\varepsilon\to0$ либо $\|x_{\varepsilon,0}\|$ ограничена, то есть, существует такая постоянная $Q>0$, что

$$\|x_{\varepsilon,0}\|\le Q,\ \varepsilon\in(0,\ \varepsilon_*]\subset(0,\ \varepsilon_0], \tag{44}$$

где ε_* – произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число; либо $\|x_{\varepsilon,0}\|$ является бесконечно большой величиной порядка β, причем $\beta\le\alpha$:

$$\|x_{\varepsilon,0}\|\sim L\frac{1}{\varepsilon^\beta}, \tag{45}$$

где $L = \text{const}$, $L > 0$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(t) = J_0(t),\ t \in (0,\ \infty)\ . \tag{46}$$

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. Покажем вначале, что

$$U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right) x_{\varepsilon,\ 0} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\ . \tag{47}$$

В силу (9)

$$\left\| U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right) x_{\varepsilon,\ 0} \right\| \le M \exp\left(\omega_\delta \int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right) \left\| x_{\varepsilon,\ 0} \right\|. \tag{48}$$

Заметим, что

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)} = \int_\varepsilon^t \frac{dz}{\varphi(z)} + \int_t^{t+\varepsilon} \frac{dz}{\varphi(z)}\ . \tag{49}$$

В силу (48), (49)

$$\begin{aligned} \left\| U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right) x_{\varepsilon,\ 0} \right\| &\le M \exp\left(\omega_\delta \int_t^{t+\varepsilon} \frac{dz}{\varphi(z)}\right) \times \\ &\times \left[\left\| x_{\varepsilon,\ 0} \right\| \exp\left(\omega_\delta \int_\varepsilon^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right) \right]. \end{aligned} \tag{50}$$

Заметим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \exp\left(\omega_\delta \int_t^{t+\varepsilon} \frac{dz}{\varphi(z)}\right) = 1\ , \tag{51}$$

и в силу (10)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \exp\left(\omega_\delta \int_\varepsilon^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right) = 0\ . \tag{52}$$

Если начальные значения $x_{\varepsilon,0}$ удовлетворяют условию (44), то (47) следует из (50) – (52). Пусть начальные значения $x_{\varepsilon,0}$ удовлетворяют условию (45). Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \exp\left(\omega_\delta \int_\varepsilon^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right) \right] = L \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{\exp\left(\omega_\delta \int_\varepsilon^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right)}{\varepsilon^\alpha} \varepsilon^{\alpha-\beta} \right] = 0\ . \tag{53}$$

в силу (35) и того, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\alpha-\beta} = \begin{cases} 0 \ \text{при}\ \beta < \alpha \\ 1 \ \text{при}\ \beta = \alpha \end{cases}.$$

Соотношение (47) следует из (50), (51), (53).

В силу (47) для доказательства (46) осталось показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t g_\varepsilon(s,t)\,ds = \int_0^t g(s,\,t)\,ds\,, \tag{54}$$

где $g_\varepsilon(s,\,t)$ и $g(s,\,t)$ выражаются формулами (14) и (24).
Для справедливости (54) достаточно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \left\|g_\varepsilon(s,t) - g(s,t)\right\| ds = 0 \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \left\|g_\varepsilon(s,t) - g(s,t)\right\| ds = 0 \tag{55}$$

В силу теоремы о предельном переходе под знаком интеграла ([32, с. 748]) для справедливости (55) достаточно показать, что подынтегральная функция

$$\psi_\varepsilon(s,\,t) = \left\|g_\varepsilon(s,t) - g(s,t)\right\|,\ s\in[0,\,t]\,,$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\psi_\varepsilon(s,\,t) = 0,\ \ s\in[0,\,t]\,, \tag{56}$$

$$\psi_\varepsilon(s,\,t) \le C(t,\,\varepsilon_0),\ \ s\in[0,\,t],\ \varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0]\,. \tag{57}$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(s,\,t) = g(s,\,t),\ \ s\in[0,\,t]\,, \tag{58}$$

что будет означать справедливость (56). При $s\in(0,\,t]$ (58) выполняется в силу сильной непрерывности $U(\cdot)$ и непрерывности $f(s)$. Покажем справедливость (58) при $s=0$. В силу (9), (49)

$$\begin{aligned}\left\|g_\varepsilon(0,t)\right\| &= \left\|U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right)\frac{f(0)}{\varphi(\varepsilon)}\right\| \le M\exp\left(\omega_\delta\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right)\frac{\left\|f(0)\right\|}{\varphi(\varepsilon)} = \\ &= M\left\|f(0)\right\|\exp\left(\omega_\delta\int_t^{t+\varepsilon}\frac{dz}{\varphi(z)}\right)\left[\frac{1}{\varphi(\varepsilon)}\exp\left(\omega_\delta\int_\varepsilon^t\frac{dz}{\varphi(z)}\right)\right].\end{aligned} \tag{59}$$

В силу (33), (51) правая часть (59) сходится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(0,\,t) = 0\,. \tag{60}$$

В силу (43), (60)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(0,\,t) = g(0,\,t)\,.$$

Справедливость (58) при $s=0$ показана.

Покажем, что справедлива оценка вида (57). Имеем:

$$\psi_\varepsilon(s,\,t) \le \left\|g_\varepsilon(s,\,t)\right\| + \left\|g(s,\,t)\right\|. \tag{61}$$

В силу (9) для любых $s\in[0,\,t],\ \varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0\,]$

$$\left\|g_\varepsilon(s,\,t)\right\| \le M\,N(t)\,\frac{1}{\varphi(s+\varepsilon)}\exp\left(\omega_\delta\int_s^t\frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right). \tag{62}$$

Пусть

$$\kappa_\varepsilon(s,\ t) = \frac{1}{\varphi(s+\varepsilon)} \exp\left(\omega_{\varepsilon\delta} \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)} \right).$$

Положим $s + \varepsilon = \xi$. Тогда $\xi \to +0$ при $s \to +0,\ \varepsilon \to 0$.
Из этой замены $\varepsilon = \xi - s$. Тогда

$$\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)} = \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\xi-s)} = \left| \begin{matrix} z = \tau+\xi-s \\ \tau = s,\ z = \xi \\ \tau = t,\ z = t+\varepsilon \end{matrix} \right| = \int_\xi^{t+\varepsilon} \frac{dz}{\varphi(z)}$$

и функция $\kappa_\varepsilon(s,\ t)$ принимает вид

$$\kappa_\varepsilon(s,\ t) = \frac{1}{\varphi(\xi)} \exp\left(\omega_\delta \int_\xi^{t+\varepsilon} \frac{dz}{\varphi(z)} \right).$$

При достаточно малых s и ε выполняется неравенство $\xi < t$. Тогда

$$\kappa_\varepsilon(s,\ t) = \left[\frac{1}{\varphi(\xi)} \exp\left(\omega_\delta \int_\xi^t \frac{dz}{\varphi(z)} \right) \right] \exp\left(\omega_\delta \int_t^{t+\varepsilon} \frac{dz}{\varphi(z)} \right)$$

и в силу (33), (51)

$$\lim_{\substack{s\to+0 \\ \varepsilon\to 0}} \kappa_\varepsilon(s,\ t) = \left[\frac{1}{\varphi(\xi)} \exp\left(\omega_\delta \int_\xi^t \frac{dz}{\varphi(z)} \right) \exp\left(\omega_\delta \int_t^{t+\varepsilon} \frac{dz}{\varphi(z)} \right) \right] = 0 .$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{s\in[0,\ t] \\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}} \kappa_\varepsilon(s,\ t) = K(t,\ \varepsilon_0) < \infty. \qquad (63)$$

В силу (62), (63)

$$\|g_\varepsilon(s,\ t)\| \le M\, N(t) K(t,\varepsilon_0);\ s \in [0,\ t],\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]. \qquad (64)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (61). При любом $s \in (0,\ t]$ для $\|g(s,\ t)\|$ справедлива оценка (32).

Пусть

$$\kappa(s,\ t) = \frac{1}{\varphi(s)} \exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right).$$

В силу (33)

$$\lim_{s\to+0} \kappa_\varepsilon(s,\ t) = 0 .$$

Следовательно,

$$\sup_{s\in(0,t]} \kappa_\varepsilon(s,\ t) = K(t) < \infty . \qquad (65)$$

В силу (32), (65)

$$\|g(s,t)\| \le M\, N(t)\, K(t),\ s \in (0,\ t] . \qquad (66)$$

В силу (43) $g(0,t)=0$. Тогда $\|g(0,\ t)\|=\|0\|=0$ и вместо (66) можно записать оценку вида

$$\|g(s,\ t)\|\le M\ N(t)K(t),\ \ s\in[0,\ t]. \tag{67}$$

Из (61), (64), (67) следует оценка

$$\psi_\varepsilon(s,\ t)\le M\ N(t)\,K(t,\ \varepsilon_0)+M\ N(t)\,K(t);\ s\in[0,\ t],\ \varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$$

Получена оценка вида (57).

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть выполнены условия 1) – 5) тогда функция $J_0(t)$ является решением уравнения (1).

Доказательство. Покажем, что $J_0(t)$ непрерывно дифференцируема. Возьмем произвольное фиксированное $t>0$. Придадим ему приращение $\Delta t>0$. Тогда

$$J_0(t+\Delta t)-J_0(t)=\int_0^{t+\Delta t}U\left(\int_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{f(s)}{\varphi(s)}\,ds-\int_0^{t}U\left(\int_s^{t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{f(s)}{\varphi(s)}ds=$$

$$=\int_0^{t}U\left(\int_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{f(s)}{\varphi(s)}ds+\int_t^{t+\Delta t}U\left(\int_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{f(s)}{\varphi(s)}ds-\int_0^{t}U\left(\int_s^{t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{f(s)}{\varphi(s)}ds=$$

$$=\int_t^{t+\Delta t}U\left(\int_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\left[\frac{f(s)}{\varphi(s)}-\frac{f(t)}{\varphi(t)}\right]ds+\int_t^{t+\Delta t}U\left(\int_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{f(t)}{\varphi(t)}ds+$$

$$+U\left(\int_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\int_0^{t}U\left(\int_s^{t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{f(s)}{\varphi(s)}ds-\int_0^{t}U\left(\int_s^{t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{f(s)}{\varphi(s)}ds=$$

$$=\int_t^{t+\Delta t}U\left(\int_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\left[\frac{f(s)}{\varphi(s)}-\frac{f(t)}{\varphi(t)}\right]ds+\left[U\left(\int_t^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)-I\right]J_0(t)+\int_t^{t+\Delta t}U\left(\int_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{f(t)}{\varphi(t)}ds.$$

При проведении указанных преобразований использовано полугрупповое свойство

$$U(t_1+t_2)=U(t_1)U(t_2),\ 0<t_1,\ t_2<\infty,$$

в силу которого

$$U\left(\int_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)=U\left(\int_t^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}+\int_s^{t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)=U\left(\int_t^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)U\left(\int_s^{t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right).$$

Получаем:

$$\begin{aligned}\frac{J_0(t+\Delta t)-J_0(t)}{\Delta t}&=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}U\left(\int_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\left[\frac{f(s)}{\varphi(s)}-\frac{f(t)}{\varphi(t)}\right]ds+\\&+\frac{U\left(\int_t^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)-I}{\Delta t}J_0(t)+\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}U\left(\int_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{f(t)}{\varphi(t)}ds.\end{aligned} \tag{68}$$

В силу (9), (10)

$$\left\| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} U\left(\int_s^{t+\Delta t} \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \left[\frac{f(s)}{\varphi(s)} - \frac{f(t)}{\varphi(t)} \right] ds \right\| \le \frac{M}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \exp\left(\omega_\delta \int_s^{t+\Delta t} \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \left\| \frac{f(s)}{\varphi(s)} - \frac{f(t)}{\varphi(t)} \right\| ds \le$$

$$\le \frac{M}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left\| \frac{f(s)}{\varphi(s)} - \frac{f(t)}{\varphi(t)} \right\| ds \le \frac{M}{\Delta t} \left[\max_{t \le s \le t+\Delta t} \left\| \frac{f(s)}{\varphi(s)} - \frac{f(t)}{\varphi(t)} \right\| \right] \int_t^{t+\Delta t} ds = \tag{69}$$

$$= M \max_{t \le s \le t+\Delta t} \left\| \frac{f(s)}{\varphi(s)} - \frac{f(t)}{\varphi(t)} \right\| \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$$

в силу непрерывности функции $\dfrac{f(s)}{\varphi(s)}$. Из (69) следует, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} U\left(\int_s^{t+\Delta t} \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \left[\frac{f(s)}{\varphi(s)} - \frac{f(t)}{\varphi(t)} \right] ds \right] = 0 . \tag{70}$$

Выясним поведение второго слагаемого в правой части (68) при $\Delta t \to 0$. Заметим, что

$$J_0(t) \in D(A) . \tag{71}$$

Действительно, (71) будет выполняться, если существует интеграл вида

$$V(t) = \int_0^t U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \frac{Af(s)}{\varphi(s)} ds , \tag{72}$$

ибо в силу (7) и замкнутости оператора A

$$V(t) = \int_0^t U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \frac{Af(s)}{\varphi(s)} ds = A \int_0^t U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \frac{f(s)}{\varphi(s)} ds = AJ_0(t).$$

Существование интеграла (72)следует из сходимости интеграла

$$W(t) = \int_0^t \left\| U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \frac{Af(s)}{\varphi(s)} \right\| ds . \tag{73}$$

Покажем сходимость интеграла (73). Положим

$$C(t) = \max_{0 \le s \le t} \| Af(s) \| .$$

Тогда в силу (9)

$$W(t) \le M\, C(t) \int_0^t \exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \frac{ds}{\varphi(s)} =$$

$$= \frac{M}{-\omega_\delta} C(t) \exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \Bigg|_0^t = \frac{M}{-\omega_\delta} C(t),$$

откуда следует сходимость интеграла (73).

Справедливость (71) показана.

Положим

$$h(\Delta t)=\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{\varphi(s)}.$$

Используя (4), (6), (71), получаем:

$$\frac{U\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)-I}{\Delta t}J_0(t)=\frac{U\left(h(\Delta t)\right)-U\left(h(0)\right)}{h(\Delta t)}\frac{h(\Delta t)}{\Delta t}J_0(t)\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}$$

$$\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}U'\left(h(0)\right)\frac{1}{\varphi(t)}J_0(t)=U'(0)\frac{1}{\varphi(t)}J_0(t)=$$

$$=\frac{1}{\varphi(t)}AU(0)J_0(t)=\frac{1}{\varphi(t)}AJ_0(t).$$

Показано, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{U\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)-I}{\Delta t}J_0(t)=\frac{1}{\varphi(t)}AJ_0(t). \tag{74}$$

Покажем, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}U\left(\int\limits_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{f(t)}{\varphi(t)}ds\right]=\frac{f(t)}{\varphi(t)}. \tag{75}$$

В силу равенства

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)}=\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{f(t)}{\varphi(t)}ds$$

для справедливости (75) достаточно показать, что

$$\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\left[U\left(\int\limits_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)-I\right]\frac{f(t)}{\varphi(t)}ds\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}0. \tag{75}$$

Используя теорему о среднем, получаем:

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\left[U\left(\int\limits_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)-I\right]\frac{f(t)}{\varphi(t)}ds\right\|\le\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\left\|\left[U\left(\int\limits_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)-I\right]\frac{f(t)}{\varphi(t)}\right\|ds=\\&=\left\|\left[U\left(\int\limits_{s_*}^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)-I\right]\frac{f(t)}{\varphi(t)}\right\|\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}0\end{aligned} \tag{77}$$

в силу (4) и сильной непрерывности $U(.)$.

Из (77) следует (76). Справедливость (75) показана. В силу (70), (74), (75) функция $J_0(t)$ дифференцируема в точке t справа и для правой производной $\overset{+}{J}{}'_0(t)$ справедлива формула

$$\overset{+}{J}{}'_0(t) = \frac{1}{\varphi(t)} AJ_0(t) + \frac{f(t)}{\varphi(t)}. \tag{78}$$

Функция

$$AJ_0(t) = V(t) = \int_0^t U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right) \frac{Af(s)}{\varphi(s)} ds$$

непрерывна в силу сильной непрерывности $U(\cdot)$, непрерывности $Af(s)$, $\varphi(s)$ и соотношения

$$\lim_{s\to+0}\left[U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{Af(s)}{\varphi(s)}\right] = 0,\ t \in (0,\ \infty). \tag{79}$$

(79) следует из того, что в силу (9), (33)

$$\left\| U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{Af(s)}{\varphi(s)} \right\| \le M\,C(t)\frac{1}{\varphi(s)}\exp\left(\omega_\delta \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right) \xrightarrow[s\to+0]{} 0\,.$$

В силу (78) и непрерывности $AJ_0(t)$ правая производная $\overset{+}{J}{}'_0(t)$ непрерывна. Следовательно ([31, с. 167]), функция $J_0(t)$ непрерывно дифференцируема и справедлива формула

$$J_0'(t) = \frac{1}{\varphi(t)}\left[AJ_0(t) + f(t)\right].$$

Тогда

$$\varphi(t)J_0'(t) = A\,J_0(t) + f(t)\,,$$

то есть $J_0(t)$ является решением уравнения (1).

Лемма 5 доказана.

В силу лемм 1 – 5 справедливо следующее утверждение.

Теорема. При выполнении условий 1) –3) задача (2), (3) при любом фиксированном $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0\,]$ имеет решение $J_\varepsilon(t)$ вида (12); если $\omega < 0$ и $f(t)$ ограничена на $[0,\ \infty)$, то $J_\varepsilon(t)$ ограничено на $[0,\ \infty)$. При выполнении дополнительных условий 4), 5) справедлив предельный переход (46) и предельная функция $J_0(t)$ является решением уравнения (1); это решение ограничено при $t \to +0$; если $f(t)$ ограничена на $[0,\ \infty)$, то $J_0(t)$ ограничено на $(0,\ \infty)$.

Замечание 3. При $f(t) \equiv f$, $0 \le t \le \infty$, решение задачи (2), (3) можно записать в виде

$$J_\varepsilon(t) = -A^{-1}f + U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right)\left(x_{\varepsilon,0} + A^{-1}f\right) \tag{80}$$

и $\lim\limits_{\varepsilon\to0} J_\varepsilon(t) = J_0(t),\ 0 < t < \infty$, где $J_0(t) = -A^{-1}f$ – стационарное решение уравнения

$$\varphi(t)x'(t) = Ax(t) + f,\ 0 < t < \infty\,.$$

Замечание 4. Если $A \in L(E)$, то в формулах (12), (23), (80) выражение $U(|\cdot)$ нужно заменить на операторную экспоненту $e^{A\cdot}$.

Доказанные выше утверждения анонсированы в [25]; они обобщают результаты работы [24], в которой малые стабилизирующие возмущения уравнения (1) исследованы в случае $\varphi(t) = t^{\alpha}, \alpha \in R, \alpha \geq 1$.

Список литературы

1. Фомин В.И. Операторное уравнение Эйлера первого порядка в банаховом пространстве // Тез. докл. XII Всесоюзной школы по теории операторов в функциональных пространствах, часть II, 14-20 сент. 1987 г. - Тамбов: ТГПИ, 1987. - С. 105.

2. Фомин В. И. Поведение решений вырождающегося дифференциального уравнения с малым параметром в случае переменного ограниченного операторного коэффициента // Тез. докл. III Уральской региональной конференции "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения", 1-5 февраля 1988 г. - Пермь: ППИ, 1988. - С. 88.

3. Фомин В.И. Сингулярное дифференциальное уравнение с малым параметром в случае переменного ограниченного операторного коэффициента // Дифференц. уравнения. - 1989. - Т. 25, № 8. - С. 1350-1354.

4. Фомин В. И. О сингулярном дифференциальном уравнении с малым параметром в банаховом пространстве // Тез. докл. XIV школы по теории операторов в функциональных пространствах, часть III, 6-14 сентября 1989 г. - Новгород: НГПИ, 1989, - С. 75.

5. Фомин В. И. Малые возмущения сингулярного дифференциального уравнения с постоянным неограниченным операторным коэффициентом // Дифференц. уравнения. - 1989. - Т. 25, № 9. - С. 1629-1630.

6. Фомин В. И. Сингулярное дифференциальное уравнение с малым параметром в случае переменного неограниченного операторного коэффициента // В кн.: Краевые задачи. Пермь: ППИ, 1989. - С. 106-109.

7. Фомин В.И. Малые возмущения сингулярных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Воронеж: Изд-во ВГУ, 1989. - 15 с.

8. Крейн С. Г., Фомин В.И. Малые возмущения сингулярных дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // ДАН СССР. - 1990. - Т. 314, № 1. - С. 77-79.

9. Фомин В.И. Поведение решений вырождающегося дифференциального уравнения с малым параметром в банаховом пространстве // В сб.: "Применение новых методов анализа в теории краевых задач". - Воронеж: ВГУ, 1990. - С. 113-120.

10. Фомин В.И. Об одной краевой задаче с малым параметром // Тез. докл. Воронежск. весенней математ. школы "Современные методы в теории краевых задач", 4-8 мая 1992 г. - Воронеж: ВГУ, 1992. - С. 115.

11. Фомин В.И. О повышении гладкости решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка с переменным неограниченным операторным коэффициентом // Тез. докл. Воронеж, весенней математ. школы "Понтрягинские чтения - VII", 17-23 апреля 1996 г. - Воронеж: ВГУ, 1996. -С. 180.

12. Фомин В.И. Об одной краевой задаче с малым параметром // Вестник ТГТУ. - 1996. - Т. 2, №3. - С. 286-301.

13. Фомин В.И. Малые возмущения сингулярного дифференциального уравнения с постоянным неограниченным операторным коэффициентом // Тез. докл. Воронеж, зимней математ. школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы", 28 января - 4 февраля 1997 г. - Воронеж: ВГУ, 1997. - С. 163.

14. Фомин В.И. Малые возмущения векторного уравнения Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами // Тез. докл. Воронеж. весенней математ. школы "Понтрягинские чтения - VIII", 4-9 мая 1997 г. - Воронеж: ВГУ, 1997. - С.156.

15. Фомин В.И. Малые возмущения сингулярного дифференциального уравнения с переменным неограниченным операторным коэффициентом // Вестник ТГТУ. - 1997. - Т. 3, № 3. - С. 275-290.

16. Фомин В.И. Малые возмущения сингулярного дифференциального уравнения с постоянным неограниченным операторным коэффициентом и переменной правой частью // Вестник ТГТУ. -1997, -Т. 3, № 4.- С.435-454.

17. Фомин В.И. Метод малых регулярных возмущений исследования вырождающихся линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Тез. докл. Воронеж, весенней математ. школы "Понтрягинские чтения - IX", 3-9 мая 1998 г. - Воронеж: ВГУ, 1998. - С. 204.

18. Фомин В.И. Об одной схеме исследования вырождающихся линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Тез. докл. Воронеж, зимней математ. школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы", 27 января - 4 февраля 1999 г. - Воронеж: ВГУ, 1999. - С. 197.

19. Фомин Â.И. Малые стабилизирующие возмущения векторного уравнения Эйлера второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами и нулевым операторным дискриминантом // Вестник Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и технич. науки. - 1999. - Т. 4, вып. 1. - С. 67-69.

20. Фомин В.И. Малые стабилизирующие возмущения вырождающихся линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Краткие тез. докл. IV научн. конф. ТГТУ, 21-22 апреля 1999. - Тамбов: ТГТУ, 1999. - С. 160.

21. Фомин В.И. Малые стабилизирующие возмущения вырождающегося линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянным неограниченным операторным коэффициентом и постоянным свободным членом // Тез. докл. Воронеж. весенней математ. школы "Понтрягинские чтения - X", 3-9 мая 1999г. - Воронеж: ВГУ, 1999. - С. 255.

22. Фомин В.И. Малые стабилизирующие возмущения вырождающегося линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянным ограниченным операторным коэффициентом и постоянным свободным членом // Вестник Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и технич. науки. - 1999. - Т. 4, вып. 3. - С. 347-352.

23. Фомин В.И. Малые регулярные возмущения векторного уравнения Эйлера второго порядка, с ограниченными операторными коэффициентами и нулевым операторным дискриминантом // Вестник ТГТУ. - 1999. - Т.5, № 4. - С. 603-612.

24. Фомин В.И. Метод малых регулярных возмущений при исследовании сингулярных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. - 1999. - Т. 35, № 12. -С. 1712.

25. Фомин В.И. О малом стабилизирующем возмущении сингулярного дифференциального уравнения первого порядка с постоянным оператором и вырождающимся коэффициентом общего вида // Тез. докл. Воронеж. зимнего симпозиума "Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках", 20-27 января 2000г. - Воронеж: ВГУ, 2000. - С. 220.

26. Фомин В.И., Малые стабилизирующие возмущения векторного уравнения Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами и позитивным операторным дискриминантом // Вестник ТГТУ. - 2000. - Т. 6, № 1. - С. 114-118.

27. Фомин В.И. Малые стабилизирующие возмущения вырождающегося линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянным ограниченным операторным коэффициентом и переменным свободным членом // Вестник Тамб. гос. ун-та. Сер. Естеств. и технич. науки. - 2000. - Т. 5, вып. 1. - С. 80-82.

28. Фомин В.И. О решении возмущенного векторного уравнения Эйлера второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами и позитивным операторным дискриминантом // Краткие тез. докл. V науч. конф. ТГТУ. - Тамбов: ТГТУ, 2000. - С. 29-30.

29. Фомин В.И. Малые стабилизирующие возмущения вырождающегося линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянным неограниченным операторным коэффициентом и постоянным свободным членом (на англ. языке) // Вестник ТГТУ. - 2000. - Т. 6, № 3. С. - 456-458.

30. Фомин В.И. Малые стабилизирующие возмущения векторного уравнения Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами // Дифференц. уравнения. - 2000. - Т. 36, № 11. - С. 1568-1569.

31. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1967. - 464 с.

32. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. -М.: Наука, 1979. - 800 с.

On a Small Stabilazation Perturbation of Singular Differential Equation with Constant Operator and Degenerate Coefficient of the General Form

V.I. Fomin

Department "Applied Mathematics and Mechanics", TSTU

Key words and phrases: Banach space, degenerate coefficient; small parameter; semi-group; performing operator; singular equation; stabilazation perturbation.

Abstract: Applying method of small stabilization perturbation the singular differential equation with degenerate coefficient of the general form is analyzed.

Über kleinen stabilisierenden Störung der singularischen Differentialgleichung mit dem ständigen Operator und degenerierenden Koeffizienten der Gesamtform

Zusammenfassung: Entsprechend der Methode der kleinen stabilisierenden Störungen wird die singularische Differentialgleichung mit dem degenerierenden Koeffizienten der Gesamtform erlernt.

Sur la petite perturbation stabilisante de l'équation singulaire différentielle avec un opérateur constatant et avec un coefficient dégénérant de la forme générale

Résumé: Par la méthode de petites perturbations stabilisantes est étudiée l'équation singulaire différentielle avec un coefficient dégénérant de la forme générale.
