

УДК 53.08.001.57

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПЕРЕНОСА  
ОТ ИМПУЛЬСНОГО ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА  
ПРИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Н.П. Жуков<sup>1</sup>, Ю.Л. Муромцев<sup>2</sup>, Н.Ф. Майникова<sup>3</sup>, И.В. Рогов<sup>1</sup>

*Кафедры: “Гидравлика и теплотехника” (1),*

*“Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем” (2),*

*“Теория механизмов машин и детали машин” (3), ТГТУ*

**Ключевые слова и фразы:** автоматизированные системы исследований; импульсное тепловое воздействие; неразрушающий контроль теплофизических свойств; линейный источник тепла; математическое моделирование; теплопроводность; температуропроводность.

**Аннотация:** Рассмотрены теоретические основы метода неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов. Предложена модель процесса нестационарного теплопереноса от линейного импульсного источника тепла, учитывающая различные состояния функционирования измерительной системы.

**Обозначения и аббревиатуры**

|  |   |
|--|---|
| $a$ – температуропроводность, м <sup>2</sup> /с;       | $\lambda$ – теплопроводность, Вт/(м·К); |
| $c_p$ – объемная теплоемкость, Дж/(м <sup>3</sup> ·К); | $\rho$ – плотность, кг/м <sup>3</sup> ; |
| $T$ – температура, К;                                  | $\tau$ – время, с;                      |
| $u$ – параметр интегрирования;                         | ТФС – теплофизические свойства.         |

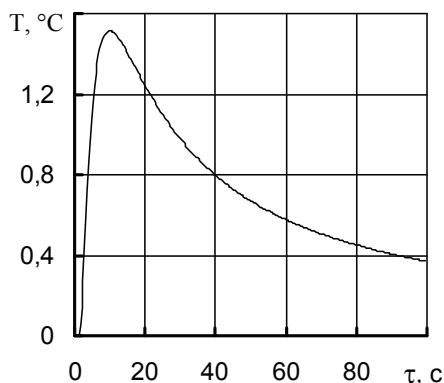
Для определения теплофизических свойств (ТФС) материалов существует множество методов [1-3]. Однако исследования в этой области остаются на сегодняшний день актуальными. Это определяется тем, что ТФС материала находят на основании косвенных экспериментов и рассчитывают по определенным математическим моделям. В результате точность и надежность определения ТФС во многом обуславливается тем, насколько верно математическая модель описывает тепловые процессы, происходящие при измерении. В данной работе рассматриваются теоретические основы метода [4] неразрушающего контроля ТФС материалов, использующего модель процесса нестационарного теплопереноса от линейного импульсного источника тепла. Модель учитывает различные состояния функционирования измерительной системы. В эксперименте фиксируется температура на заданном расстоянии от нагревателя.

Рассмотрим модель нестационарного теплопереноса от линейного импульсного источника тепла, действующего на теплоизолированной поверхности полуграниченного тела.

Температурное поле в исследуемом материале от одного импульса (при выполнении условия полуграниченности тела) описывается уравнением [5, 6] (рис. 1) вида:

$$T(r, \tau) = \frac{Q}{2\pi\lambda\tau} \exp\left[-\frac{r^2}{4a\tau}\right], \quad (1)$$

где  $Q$  – количество тепла, выделившееся на единицу длины нагревателя;  $r$  – расстояние от нагревателя;  $\tau$  – время;  $\lambda$  – теплопроводность;  $a$  – температуропроводность.



**Рис. 1 Вид зависимости  $T(\tau)$  при единичном импульсном тепловом воздействии**

Если подается последовательность  $n+1$  тепловых импульсов с периодом  $\Delta\tau$ , то температурное поле в образце будет определяться выражением

$$T_{\text{им}}(r, \tau) = \frac{Q}{2\pi\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{4a(\tau - (i-1)\Delta\tau)}\right]}{\tau - (i-1)\Delta\tau}, \quad ((n-1)\Delta\tau \leq \tau < n\Delta\tau), \quad (2)$$

которое мало подходит для вычисления ТФС образца.

Если нагрев осуществляется с постоянной мощностью  $q$ , то температурное поле в полуограниченной среде будет определяться формулой [5]

$$T_c(r, \tau) = \frac{q}{2\pi\lambda} \int_{\frac{r^2}{4a\tau}}^{\infty} \frac{\exp[-u]}{u} du = \frac{q}{2\pi\lambda} \int_0^{\frac{4a\tau}{r^2}} \frac{\exp[-\frac{1}{u}]}{u} du, \quad (3)$$

где  $q$  – мощность, выделяющаяся на единицу длины нагревателя.

Можно показать, что при выполнении условия

$$q = \frac{Q}{\Delta\tau} \quad (4)$$

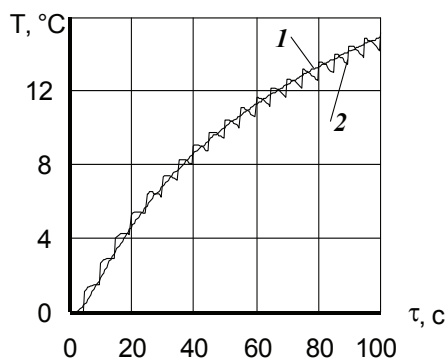
многоимпульсный источник тепла можно рассматривать (при больших  $\tau$ ) как источник тепла постоянной мощности с  $q = \frac{Q}{\Delta\tau}$  (рис. 2).

Нужно отметить, что на практике действие источника тепла не является мгновенным, а имеет определенную длительность  $\tau_0$  (с мощностью на единицу длины нагревателя –  $q_0$ ). Мощность на нагревателе является периодической функцией времени (рис. 3), т.е.

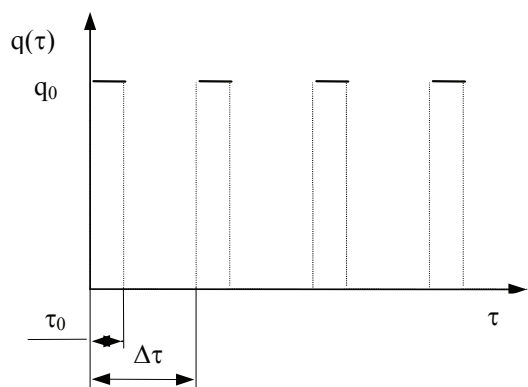
$$q(\tau) = \begin{cases} q_0, & 0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ 0, & \tau_0 < \tau < \Delta\tau \end{cases}, \quad q(\tau + n\Delta\tau) = q(\tau). \quad (5)$$

Условие (4) в этом случае выглядит следующим образом

$$q = \frac{q_0\tau_0}{\Delta\tau}. \quad (6)$$



**Рис. 2** Вид зависимостей  $T(\tau)$  при выполнении условия (4) в случае действия источника тепла постоянной мощности (кривая 1) и импульсного источника тепла (кривая 2)



**Рис. 3** Мощность на нагревателе при многоимпульсном источнике тепла

Воспользовавшись методом источников [5, 6] запишем формулу, определяющую температурное поле в полупространстве от линейного источника тепла с произвольным законом подачи мощности на нагревателе, в виде:

$$T(r, \tau) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^{\tau} \frac{q(u) \exp\left[-\frac{r^2}{4a(\tau-u)}\right]}{(\tau-u)} du. \quad (7)$$

Зависимость  $q(\tau)$ , определяемая из (5), является периодической функцией с периодом  $\Delta\tau$  и ее можно разложить в ряд Фурье, т.е.

$$q(\tau) = \frac{q_0\tau_0}{\Delta\tau} + \frac{q_0\tau_0}{\Delta\tau\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \sin\left[\frac{2k\pi\tau_0}{\Delta\tau}\right] \cos\left[\frac{2k\pi\tau}{\Delta\tau}\right] + \left(1 - \cos\left[\frac{2k\pi\tau_0}{\Delta\tau}\right]\right) \sin\left[\frac{2k\pi\tau}{\Delta\tau}\right] \right\}. \quad (8)$$

Подставив выражение (8) в формулу (7), получим следующее выражение

$$T_{\text{н}}(r, \tau) = \frac{q_0\tau_0}{2\pi\lambda\Delta\tau} \int_0^{\frac{4a\tau}{r^2}} \frac{\exp\left[-\frac{1}{u}\right]}{u} du +$$

$$+ \frac{q_0}{2\pi^2\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \int_0^{\tau} \frac{\left( \sin\left[\frac{2k\pi}{\Delta\tau}(\tau_0 - u)\right] + \sin\left[\frac{2k\pi u}{\Delta\tau}\right] \right) \exp\left[-\frac{r^2}{4a(\tau - u)}\right]}{(\tau - u)} du \right\}. \quad (9)$$

Заметим, что из формулы (9) также можно получить выражение для температурного поля от мгновенного многоимпульсного источника тепла, тождественное выражению (2).

Если уменьшать промежуток подачи импульса  $\tau_0$  и одновременно увеличивать мощность  $q_0$  так, чтобы  $q_0\tau_0 = Q$ , то перейдя к пределу и учитывая, что

$$\lim_{\tau_0 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin\left[\frac{2k\pi\tau_0}{\Delta\tau}\right]}{\tau_0} \right\} \rightarrow \frac{2k\pi}{\Delta\tau}, \quad \lim_{\tau_0 \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - \cos\left[\frac{2k\pi\tau_0}{\Delta\tau}\right]}{\tau_0} \right\} \rightarrow 0,$$

можем записать

$$T_{\text{им}}(r, \tau) = \frac{Q}{2\pi\lambda\Delta\tau} \int_0^{\frac{4a\tau}{r^2}} \frac{\exp\left[-\frac{1}{u}\right]}{u} du + \frac{Q}{\pi\lambda\Delta\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \frac{\cos\left[\frac{2k\pi u}{\Delta\tau}\right] \exp\left[-\frac{r^2}{4a(\tau - u)}\right]}{(\tau - u)} du. \quad (10)$$

Суммы, стоящие в правой части выражений (9) и (10), представляют собой ограниченные и периодические функции  $\tau$  [7]. При больших  $\tau$  ( $\int_0^{\frac{4a\tau}{r^2}} \frac{\exp\left[-\frac{1}{u}\right]}{u} du$  – есть мо-

нотонно возрастающая функция и при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $\int_0^{\frac{4a\tau}{r^2}} \frac{\exp\left[-\frac{1}{u}\right]}{u} du \rightarrow \infty$ ) этими суммами

можно пренебречь, т.е. при больших  $\tau$  с учетом условий  $q = \frac{q_0\tau_0}{\Delta\tau}$  и  $q = \frac{Q}{\Delta\tau}$  можно считать, что

$$T_{\text{им}}(r, \tau) \approx T_{\text{и}}(r, \tau) \approx T_{\text{с}}(r, \tau) = \frac{q}{2\pi\lambda} \int_{\frac{4a\tau}{r^2}}^{\infty} \frac{\exp[-u]}{u} du.$$

Теперь обратимся к анализу уравнения (3). Известно, что [5]

$$-\int_x^{\infty} \frac{\exp[-u]}{u} du = \ln[x] + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k \cdot k!},$$

где  $\gamma \approx 0,5772$  – число Эйлера.

С учетом этого выражения можем записать

$$T_c(r, \tau) = \frac{q}{2\pi\lambda} \left( \ln\left[\frac{4a\tau}{r^2}\right] - \gamma - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{r^2}{4a\tau}\right)^k}{k \cdot k!} \right) \quad (11)$$

и при больших  $\tau$  (рис. 4)

$$T_c(r, \tau) \approx \frac{q}{2\pi\lambda} \left( \ln\left[\frac{4a\tau}{r^2}\right] - \gamma \right) = \frac{q}{2\pi\lambda} \left( \ln[\tau] + \ln[a] - \ln\left[\frac{r^2}{4}\right] - \gamma \right). \quad (12)$$

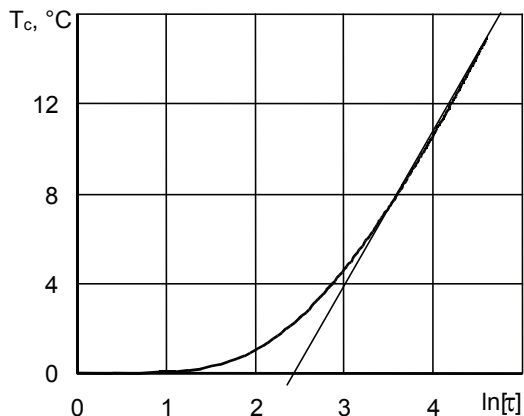


Рис. 4 График  $T_c = f(\ln[\tau])$

Динамика теплового процесса будет характеризоваться входным воздействием (законом подачи мощности на нагреватель), выходной переменной ( $T(\tau)$ ), переменной состояния системы (в качестве которой можно выбрать тепловой поток, проходящий через точку измерения). В общем случае на термограммах можно выделить три участка (рис. 5).

Первый (I) участок термограммы характеризуется тем, что тепловой поток, проходящий через точку измерения, является переменным во времени и соответствует начальной стадии теплового процесса.

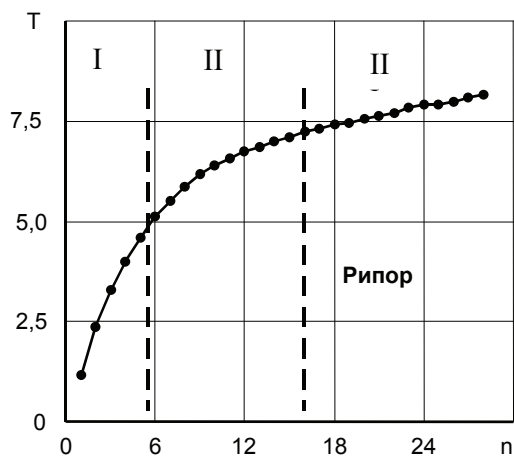


Рис. 5 Участки термограммы для рипора

Второй (II) участок термограммы характеризуется регуляризацией тепловых потоков (тепловой поток, проходящий через точку измерения, становится практически постоянным). Для этого участка будет справедливо выражение (12). Причем уравнение (12) будет справедливо для II участка и в случае, если учесть реальные размеры и теплоемкости нагревателя и термодатчиков в устройстве, реализующем метод измерения.

Третий (III) участок термограммы характеризуется тем, что нарушается условие неограниченности исследуемого образца и тепловой поток, проходящий через точку измерения, становится переменным.

Таким образом, выражение (12) является расчетным для II (рабочего) участка термограммы (рис. 5, 6). С учетом того, что в процессе проведения эксперимента температура фиксируется через определенные промежутки времени  $\Delta\tau$ , т.е.  $\tau = n \cdot \Delta\tau$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , можем записать выражение (12) в виде:

$$T(t_n) = \frac{q}{2\pi\lambda} \left( t_n + \ln[a] - \ln \left[ \frac{r^2}{4\Delta\tau} \right] - \gamma \right), \quad (13)$$

где  $t_n = \ln[n]$ .

Основным расчетным соотношением для определения ТФС будет выражение (13). Согласно уравнению (13) для определения ТФС необходимо знать ряд величин, определяемых режимными ( $q$ ,  $\Delta\tau$ ) и конструктивными ( $r$ ) особенностями применяемого устройства. Поэтому при заданных режимах эксперимента можем считать эти величины постоянными прибора. Значения постоянных прибора будем определять на основе градуировочных экспериментов (достаточно одного образца с известными ТФС).

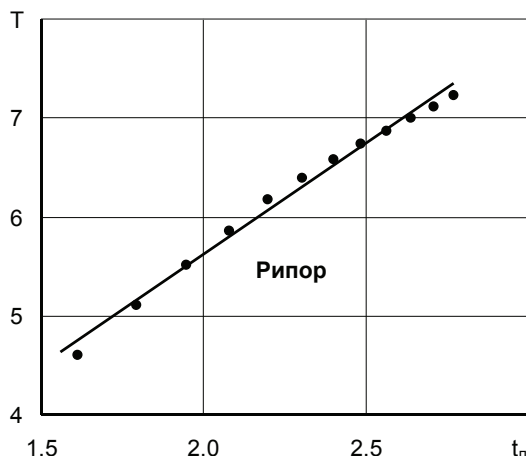


Рис. 6 II-ой участок термограммы в координатах  $T = T(t_n)$

Для расчета ТФС по экспериментальным данным представим выражение (13) в следующем виде:

$$T(t_n) = b_1 t_n + b_0, \quad (14)$$

где  $b_1 = \frac{\alpha}{\lambda}$ ,  $b_0 = \frac{\alpha}{\lambda} (\ln[a] - \beta)$  - параметры модели, описывающей термограмму на рабочем участке,  $\alpha = \frac{q}{2\pi}$ ,  $\beta = \ln \left[ \frac{r^2}{4\Delta\tau} \right] + \gamma$  - постоянные прибора, определяемые кон-

структивными особенностями применяемого устройства и режимами опыта,  $t_n = \ln[n]$ ,  $n$  - номер точки на термограмме ( $\tau = n \cdot \Delta\tau$ ).

Выражения для расчета ТФС и постоянных прибора имеют следующий вид:

$$\alpha = \lambda_0 b_{10}, \quad (12)$$

$$\beta = \ln[a_0] - \frac{b_{00}}{b_{10}}, \quad (16)$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{b_1}, \quad (17)$$

$$a = \exp\left[\frac{b_0}{b_1} + \beta\right], \quad (18)$$

где  $\lambda$ ,  $a$ ,  $\lambda_0$ ,  $a_0$  – теплопроводности и температуропроводности исследуемого материала и образцовой меры ТФС;  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_{00}$ ,  $b_{10}$  – коэффициенты, определенные из термограмм (см. рис. 6), снятых на исследуемом материале и образцовой мере.

Разработана методика определения границ I – III участков термограмм [4] и операция определения коэффициентов уравнения (14).

Таким образом, разработана модель, учитывающая различные состояния функционирования измерительной системы. На основе модели получены расчетные уравнения, которые позволяют определять комплекс ТФС – теплопроводность и температуропроводность. Определение ТФС по экспериментальным данным, где реально выполняется расчетная зависимость (13), дает возможность существенно снизить методическую погрешность измерений. Так как ТФС определяют по участку, а не по отдельным точкам термограммы, то снижается также влияние случайных составляющих погрешности измерения. Это особенно важно для композиционных материалов, где к случайной добавляется погрешность, связанная с отличием локальных значений ТФС от средних для данного материала. Вследствие того, что модель (13) является линейной по параметрам, возникает возможность на основе классических статистических методов провести оценку случайной составляющей погрешности измерения ТФС для отдельного опыта.

#### *Список литературы*

1. Вавилов В.П. Тепловые методы неразрушающего контроля. Справочник. – М.: Машиностроение, 1991. – 240 с.
2. Платунов Е.С. и др. Теплофизические измерения и приборы. – Л.: Машиностроение, 1986. – 256 с.
3. Мищенко С.В., Муромцев Ю.Л., Цветков Э.И. и др. Анализ и синтез измерительных систем. – Тамбов: Тамб. гос. техн. ун-т, 1995. – 234 с.
4. Жуков Н.П., Муромцев Ю.Л., Майникова Н.Ф. и др. Патент РФ № 2161301 RU, кл. G 01 N 25/18. Способ неразрушающего определения теплофизических свойств материалов. Б.И. № 36, 2000.
5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики: – Т. 3, часть 2. – М.: Наука, 1969. – 672 с.

**Modeling of Heat Transfer Processes  
from Impulse Linear Heat Source under Thermal Physical Measurements**

**N.P. Zhukov<sup>1</sup>, Yu.L. Muromtzev<sup>2</sup>, N.F. Mainikova<sup>3</sup>, I.V. Rogov<sup>1</sup>**

*Departments: "Hydraulics and Heat Engineering" (1),  
"Design of Radio-Electronic and Microprocessor Systems" (2),  
"Theory of Machines Mechanisms and Machine Parts" (3), TSTU*

**Key words and phrases:** automated systems of research; impulse heat influence; linear heat source; mathematical modeling; non-destructive control for thermal physical properties; heat diffusivity; heat conductivity.

**Abstract:** Theoretical foundations of non-destructive control method of thermal physical properties of materials are considered. The model of non-stationary heat transfer from linear heat source, allowing for various conditions of measurement system functioning is offered.

---

**Modellierung des Prozesses der Wärmeübertragung  
von der wärmephysikalischen Abmessungen**

**Zusammenfassung:** Es sind die theoretischen Grundlagen der ununterbrochenen Kontrolle der wärmephysikalischen Eigenschaften der Stoffe betrachtet. Es ist das Modell des Prozesses der unstationären Wärmeübertragung von der linearen impulsiven Wärmequelle, das verschiedene Zustände der Funktionierung des Meßsystems berücksichtigt vorgeschlagen.

---

**Modélage du processus du transfert de masse à partir de la source linéaire  
de la chaleur au cours des changements thermophysiques**

**Résumé:** On a examine les bases théoriques de la méthode du contrôle non destructif des propriétés thermophysiques des matériaux. On a proposé le modèle du processus du transfert non stationnaire de chaleur à partir de la source linéaire de la chaleur à impulsions qui tient compte des états différents du fonctionnement du système de mesure.