

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ ИЗ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

Г.М. Куликов, И.Е. Карева

*Кафедра «Прикладная математика и механика», ТГТУ*

**Ключевые слова и фразы:** анизотропия; температурное поле; тензор теплопроводности.

**Аннотация:** Поставлена трехмерная задача теплопроводности для многослойного тела вращения с общими свойствами анизотропии. Разработана методика решения данной задачи. Проведен анализ влияния углов армирования, степени анизотропии на распределение температуры в многослойных телах вращения.

### Обозначения:

$c$ – теплоемкость материала, Дж/(кг · К); $d_B$ – диаметр волокон, м; $h$ – толщина армированного слоя, м; $i_B$ – интенсивность армирования; $U$ – температура, °С; $W$ – плотность теплового потока, Вт/м <sup>2</sup> ;	$\gamma$ – угол армирования, рад; $\lambda$ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м · К); $\rho$ – плотность материала, кг/м <sup>3</sup> ; $\psi_B$ – относительное объемное содержание волокон; $\Lambda$ – тензор теплопроводности.
--	--

### Постановка задачи

При изучении ряда задач механики возникает необходимость расчета температурных полей в телах вращения из слоистых композитов. Целью данной работы было исследование влияния на температурные поля различных факторов, таких как степень анизотропии материала, направление армирования слоев, геометрия тела.

Была поставлена задача теплопроводности в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ , для многослойного тела вращения, обладающего общими свойствами цилиндрической анизотропии. Расчетная схема такого тела представлена на рис. 1.

Линейное уравнение теплопроводности для произвольного тела имеет вид [1]

$$c\rho \frac{\partial U}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\Lambda \cdot \operatorname{grad} U) + Q. \quad (1)$$

Уравнение стационарной теплопроводности для многослойного тела вращения без внутренних источников тепла (1) в цилиндрических координатах может быть записано в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_{rr}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial r} + \lambda_{r\varphi}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial \varphi} + r \lambda_{rz}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda_{r\varphi}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial r} + \lambda_{\varphi\varphi}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_k}{\partial \varphi} + \lambda_{\varphi z}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{rz}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial r} + \lambda_{\varphi z}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_k}{\partial \varphi} + \lambda_{zz}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial z} \right) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad (2)$$

где  $U_k$  – температура в  $k$ -м слое;  $\lambda_{rr}^{(k)}$ ,  $\lambda_{rz}^{(k)}$ ,  $\lambda_{r\varphi}^{(k)}$ ,  $\lambda_{zz}^{(k)}$ ,  $\lambda_{\varphi z}^{(k)}$ ,  $\lambda_{\varphi\varphi}^{(k)}$  – компоненты тензора теплопроводности  $k$ -го слоя,  $N$  – число слоев.

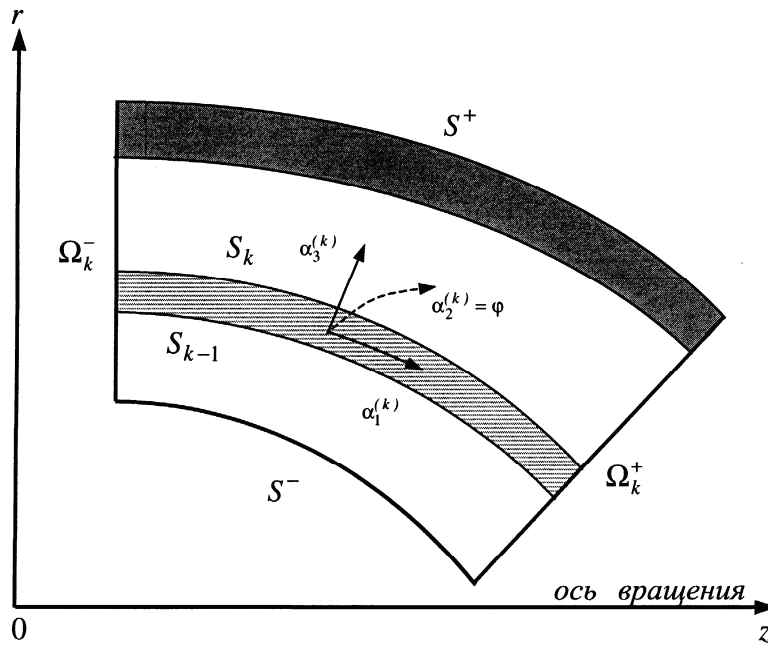


Рис. 1 Многослойное тело вращения

Условия сопряжения температур и тепловых потоков на границах раздела слоев имеют вид:

$$\begin{aligned} U_n|_{S_n} &= U_{n+1}|_{S_n}, \quad n = \overline{1, N-1}, \\ W_n|_{S_n} &= W_{n+1}|_{S_n}, \quad n = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия для определенности первого рода на внутренней  $S^-$  и внешней  $S^+$  поверхностях тела запишем в виде

$$U_1|_{S^-} = T^-, \quad U_N|_{S^+} = T^+. \quad (4)$$

Граничные условия, также первого рода, на торцевых поверхностях  $\Omega_k^+$  и  $\Omega_k^-$  имеют вид

$$U_k|_{\Omega_k^-} = T_k^-, \quad U_k|_{\Omega_k^+} = T_k^+, \quad (5)$$

где  $T^\pm(r, \varphi, z)$ ,  $T_k^\pm(r, \varphi, z)$  – известные функции температуры от координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ .

Уравнения (2)–(5) полностью описывают процесс переноса тепла в многослойном теле вращения из композитного материала.

### Вычисление компонент тензора теплопроводности

Остановимся подробнее на вопросе вычисления компонент тензора теплопроводности. Рассмотрим случай, когда тело содержит однонаправленные армированные слои постоянной толщины. Фрагмент такого слоя в цилиндрической системе координат показан на рис. 2.

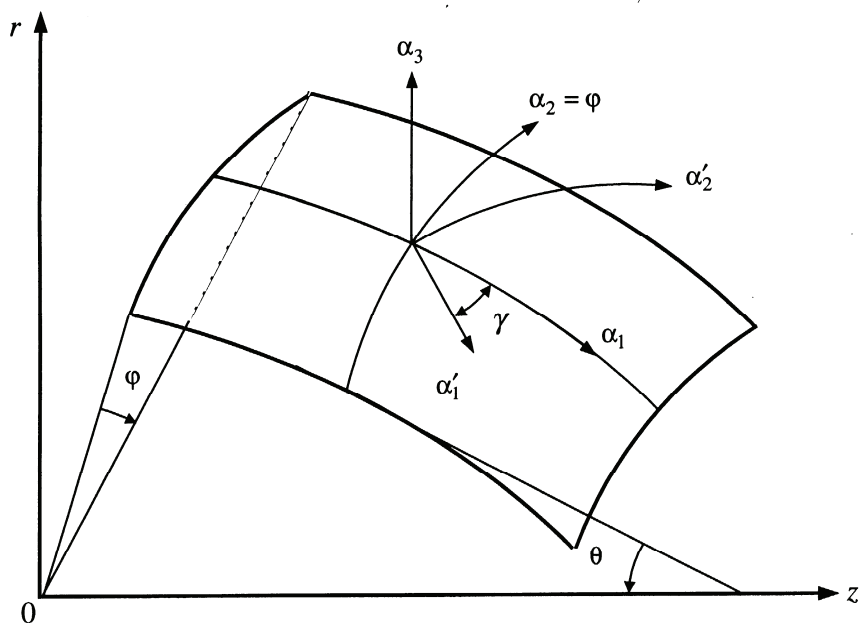


Рис. 2 Фрагмент срединной поверхности армированного слоя

Для каждого анизотропного слоя введем свою ортогональную криволинейную систему координат  $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha_3$ , в которой координатные линии направлены соответственно вдоль оси армирования, перпендикулярно ей и по нормали к поверхности слоя. В данных осях тензор теплопроводности содержит три ненулевых компоненты  $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ . Преобразование коэффициентов теплопроводности при переходе к криволинейным ортогональным координатам  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , задается направляющими косинусами, где  $\alpha_1$  – совпадает с меридианом,  $\alpha_2$  – направлена вдоль соответствующего параллельного круга, а ось  $\alpha_3$  сохраняет прежнее направление. Угол  $\gamma$  называется углом армирования слоя. Значения направляющих косинусов приведены в табл. 1.

Таблица 1

	$\alpha'_1$	$\alpha'_2$	$\alpha_3$
$\alpha_1$	$\cos \gamma$	$\sin \gamma$	0
$\alpha_2$	$-\sin \gamma$	$\cos \gamma$	0
$\alpha_3$	0	0	1

По известным формулам тензорной алгебры [2] производим пересчет компонент тензора теплопроводности  $\lambda_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ , которые в новых осях примут следующие значения:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11} &= \lambda'_1 \cos^2 \gamma + \lambda'_2 \sin^2 \gamma, \\
 \lambda_{22} &= \lambda'_2 \cos^2 \gamma + \lambda'_1 \sin^2 \gamma, \\
 \lambda_{12} &= (\lambda'_2 - \lambda'_1) \cos \gamma \sin \gamma, \\
 \lambda_{33} &= \lambda'_3, \lambda_{13} = 0, \lambda_{23} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Переход от системы координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  к цилиндрической системе координат определяется направляющими косинусами, приведенными в табл. 2, где угол  $\theta$  – угол, образованный касательной к срединной поверхности слоя и осью  $z$ .

Таблица 2

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$r$	$-\sin \theta$	0	$\cos \theta$
$\varphi$	0	1	0
$z$	$\cos \theta$	0	$\sin \theta$

Рассматриваемый слой в цилиндрической системе координат проявляет свойства общего случая цилиндрической анизотропии, а тензор теплопроводности имеет шесть различных ненулевых компонент:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{rr} &= \lambda_{11} \sin^2 \theta + \lambda_{33} \cos^2 \theta, \\
 \lambda_{zz} &= \lambda_{33} \sin^2 \theta + \lambda_{11} \cos^2 \theta, \\
 \lambda_{rz} &= (\lambda_{33} - \lambda_{11}) \sin \theta \cos \theta, \\
 \lambda_{r\varphi} &= -\lambda_{12} \sin \theta, \\
 \lambda_{\varphi\varphi} &= \lambda_{22}, \quad \lambda_{\varphi z} = \lambda_{12} \cos \theta.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Коэффициенты теплопроводности  $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$  определяются соотношениями, зависящими от теплопроводности волокон  $\lambda_B$  и теплопроводности связующего  $\lambda_C$ . Приближенная формула для приведенного коэффициента теплопроводности в поперечном направлении дана в [3]:

$$\lambda'_2 = \lambda'_3 = \lambda_C \frac{1 + \psi_B + (1 - \psi_B)\lambda}{(1 + \psi_B)\lambda + 1 - \psi_B}, \quad \lambda = \frac{\lambda_C}{\lambda_B}.
 \tag{8}$$

Такой материал, для которого  $\lambda'_2 = \lambda'_3$ , называется трансверсально изотропным.

Приведенный коэффициент теплопроводности в продольном направлении пропорционален объемному содержанию компонентов:

$$\lambda'_1 = \lambda_C(1 - \psi_B) + \lambda_B\psi_B.
 \tag{9}$$

Здесь относительное объемное содержание наполнителя  $\psi_B$  определяется из соотношения

$$\psi_B = \frac{\pi d_B^2}{4h} i_B,
 \tag{10}$$

где  $d_B$  – диаметр волокон;  $i_B$  – интенсивность армирования,  $h$  – толщина армированного слоя.

Таким образом, общая постановка задачи дает нам полный тензор теплопроводности  $\Lambda$ , содержащий 6 независимых ненулевых компонент:  $\lambda_{rr}$ ,  $\lambda_{rz}$ ,  $\lambda_{r\varphi}$ ,  $\lambda_{zz}$ ,  $\lambda_{\varphi z}$ ,  $\lambda_{\varphi\varphi}$ .

#### Алгоритм решения задачи теплопроводности для многослойного анизотропного тела вращения при осесимметричном нагреве

Как частный случай была рассмотрена осесимметричная задача теплопроводности для многослойного анизотропного тела вращения. Уравнение теплопроводности (2) в этом случае следующее:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_{rr}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial r} + r \lambda_{rz}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{rz}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial r} + \lambda_{zz}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial z} \right) = 0. \quad (11)$$

Тогда тензор теплопроводности  $k$ -го слоя будет иметь 3 различные, ненулевые компоненты  $\lambda_{rr}^{(k)}$ ,  $\lambda_{rz}^{(k)}$ ,  $\lambda_{zz}^{(k)}$ .

При решении данной задачи применялся метод конечных элементов, основанный на вариационном принципе. Краевой задаче (3) – (5), (11) может быть поставлена в соответствие вариационная задача об отыскании экстремали функционала вида

$$J = \sum_{k=1}^N \int_{V_k} \left[ \frac{1}{2} \lambda_{rr}^{(k)} \left( \frac{\partial U_k}{\partial r} \right)^2 + \lambda_{rz}^{(k)} \left( \frac{\partial U_k}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial U_k}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \lambda_{zz}^{(k)} \left( \frac{\partial U_k}{\partial z} \right)^2 \right] dV, \quad (12)$$

где  $V_k$  – объем ограниченный поверхностями  $S_k$ ,  $S_{k-1}$ ,  $\Omega_k^-$ ,  $\Omega_k^+$ ,  $dV = r dr d\varphi dz$ .

Уравнение (11) с граничными условиями (4) – (5) и условиями непрерывности (3) является следствием некоторой вариационной задачи, которая заключается в том, что функционал  $J$  принимает стационарное значение  $\delta J = 0$ . Таким образом, любое распределение температуры, при котором функционал  $J$  становится минимальным, является решением исходной задачи.

Для нахождения минимума функционала (12) применяем метод конечных элементов. В качестве конечного элемента использовался треугольный элемент с линейной аппроксимацией. В результате была получена система линейных алгебраических уравнений для нахождения температуры в узлах элементов

$$[K]\{U\} = \{F\}, \quad (13)$$

где  $[K]$  – положительно определенная, симметричная матрица,  $\{U\}$  – вектор узловых значений температуры,  $\{F\}$  – вектор, определяемый из граничных условий. Система с ленточной, симметричной, положительно определенной матрицей решалась методом Холецкого [4]. Для реализации алгоритма решения задачи была разработана программа на языке C++.

#### Алгоритм решения задачи теплопроводности для многослойного анизотропного тела вращения при неосесимметричном нагреве

При неосесимметричном нагреве необходимо рассматривать трехмерную постановку задачи, тогда уравнению (2) с граничными условиями (4) – (5) и условиями непрерывности (3) соответствует функционал

$$J = \sum_{k=1}^N \int_{V_k} \left[ \frac{1}{2} \lambda_{rr}^{(k)} \left( \frac{\partial U_k}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_{zz}^{(k)} \left( \frac{\partial U_k}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2r^2} \lambda_{\varphi\varphi}^{(k)} \left( \frac{\partial U_k}{\partial \varphi} \right)^2 + \lambda_{rz}^{(k)} \left( \frac{\partial U_k}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial U_k}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \lambda_{\varphi z}^{(k)} \left( \frac{\partial U_k}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial U_k}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \lambda_{r\varphi}^{(k)} \left( \frac{\partial U_k}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial U_k}{\partial \varphi} \right) \right] dV. \quad (14)$$

Для нахождения минимума вариации функционала применялся полуаналитический метод конечных элементов, основанный на разложении температуры в ряд Фурье по окружной координате

$$U_k = \sum_n \bar{U}_n^{(k)} \cos n\varphi + \tilde{U}_n^{(k)} \sin n\varphi \quad (15)$$

и решений двумерной задачи для каждой гармоники. Этот метод позволяет решать задачи с локальным нагревом, при этом для численного определения гармоник в раз-

ложениях функций, характеризующих граничные условия, целесообразно использовать быстрое преобразование Фурье.

В качестве конечного элемента использовался треугольный элемент с линейной аппроксимацией. В случае ортотропного тела, когда тензор теплопроводности содержит только диагональные элементы, задача сводится к решению двух систем линейных алгебраических уравнений, для нахождения коэффициентов в разложении Фурье. Обе системы с симметричными, ленточными матрицами решались методом Холецкого. В общем случае цилиндрической анизотропии задача сводится к решению одной системы уравнений вдвое большей размерности, при этом матрица системы ленточная, но несимметричная. Для решения системы использовался модифицированный метод Гаусса [4].

Была разработана программа для реализации алгоритма решения задачи на языке C++.

### Численные результаты и их обсуждение

В качестве примера решения осесимметричной задачи был рассчитан двухслойный полый цилиндр из перекрестно армированных слоев стеклопластика. Расчетная схема цилиндра представлена на рис. 3. На границах цилиндра ставились граничные условия первого рода: на внутренней поверхности  $U_1|_{S^-} = T_0 = 10^\circ\text{C}$ , на внешней поверхности  $U_2|_{S^+} = T_N = 50^\circ\text{C}$ , на торцах  $U_k|_{\Omega_k^+} = T_0$  ( $k = 1, 2$ ), в сечении  $z = 0$  ставилось условие симметрии  $W_k|_{z=0} = 0$ . Линейные размеры цилиндра:  $l = 0,11$  м,  $R_0 = 0,1$  м,  $R_1 = 0,105$  м,  $R_2 = 0,11$  м. Коэффициенты теплопроводности материала:  $\lambda_1 = 6,3$  Вт/(м · К),  $\lambda_2 = 0,57$  Вт/(м · К).

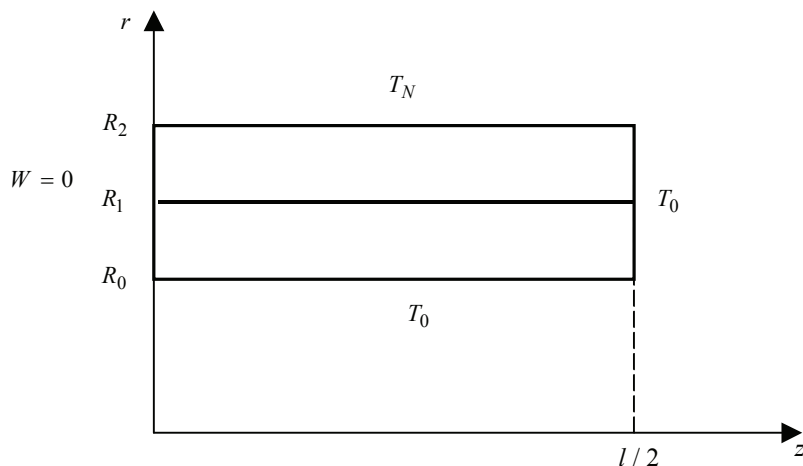


Рис. 3 Расчетная схема двухслойного цилиндра

Результаты расчета при различных углах армирования представлены на рис. 4 в виде графиков зависимости температуры от радиуса цилиндра, в сечении  $z = 0$ .

Проведенный анализ влияния углов армирования на температурное поле цилиндра показал, что внутри слоев распределение температуры близко к линейному, но при разнице углов в  $90^\circ$  наблюдается нелинейность по толщине всего цилиндра.

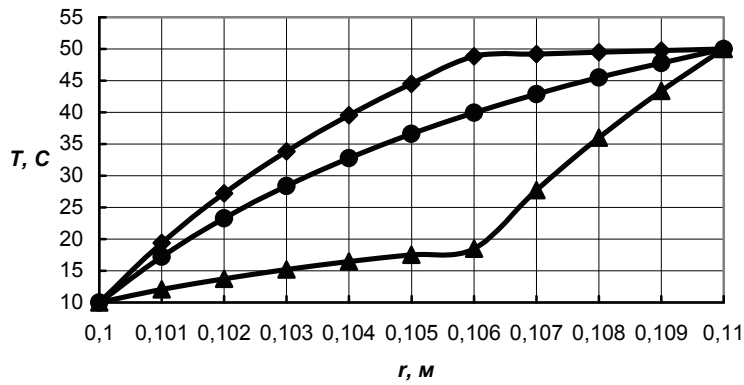


Рис. 4 Распределение температуры по толщине цилиндра:

◆  $\gamma_1 = \pi/2, \gamma_2 = 0$     ●  $\gamma_1 = -\pi/4, \gamma_2 = \pi/4$     ▲  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = \pi/2$

Для проверки правильности работы второй программы был рассмотрен тестовый пример. В работе [5] представлен расчет двумерного (по координатам  $r, \varphi$ ) температурного поля полого цилиндра из композитного материала со следующими характеристиками: коэффициент теплопроводности связующего  $\lambda_c = \lambda_0$ , коэффициент теплопроводности волокон  $\lambda_b = 5\lambda_0$ . Внешний радиус цилиндра  $R_N = r_0 = 1$ , внутренний  $R_0 = 0,8r_0$ . Объемное содержание армирующих волокон меняется по толщине по линейному закону  $\psi_b = \psi(r)$ , от  $\psi_0 = 0,45$  до  $\psi_N = 0,8$ . На внутренней поверхности поддерживалась температура  $U|_{S^-} = T_0 = \text{const}$ , а внешняя поверхность имеет температуру, меняющуюся по закону  $U|_{S^+} = 2T_0(1 + 0,5 \cos \varphi)$ . При решении данной задачи длина цилиндра принималась большой, чтобы минимизировать влияние температуры на торцах и свести трехмерную задачу к двумерной. Полученные результаты выводились в срединном сечении цилиндра. Результаты расчета (1) распределения относительной температуры  $\tau = \frac{U}{T_0}$  по толщине  $x = \frac{r - R_0}{R_N - R_0}$  и результаты (2), приведенные в [5], сведены в табл. 3.

Таблица 3

x	(1)			(2)		
	$\varphi = 0$	$\varphi = \pi/2$	$\varphi = \pi$	$\varphi = 0$	$\varphi = \pi/2$	$\varphi = \pi$
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	1,531	1,276	1,003	1,533	1,279	1,003
0,4	1,987	1,496	0,904	1,990	1,499	0,905
0,6	2,435	1,691	0,947	2,448	1,695	0,950
0,8	2,713	1,858	1,003	2,715	1,860	1,002
1	3,000	2,000	1,000	3,000	2,000	1,000

Как видно из табл. (3), результаты расчета достаточно хорошо согласуются с описанными в работе [5].

В качестве примера решения неосесимметричной задачи рассматривался расчет двухслойного конуса (рис. 5). На границах конуса ставились граничные условия первого рода: на внутренней поверхности  $U|_{S^-} = T_0 = 50^\circ\text{C}$ , на внешней поверхности  $U|_{S^+} = 2T_0(1 + 0,5 \cos \varphi)$ , на торцах  $U_k|_{\Omega_k^\pm} = T_0$ , ( $k = 1, 2$ ). В предельном положении, при  $\theta = 0$  рассматривался цилиндр. Линейные размеры тела:  $R_0 = 0,2$  м,  $R_1 = 0,205$  м,  $R_2 = 0,21$  м,  $l = 0,07$  м. Углы армирования слоев равны  $\gamma_1 = -\pi/4$ ,  $\gamma_2 = \pi/4$  для первого и второго слоя, соответственно.

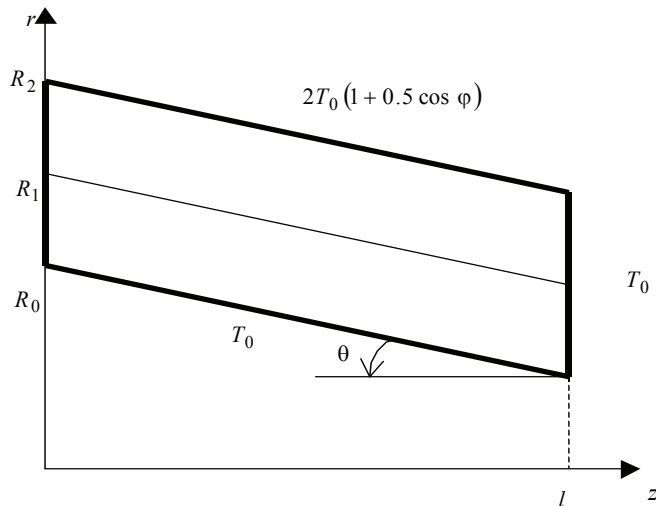


Рис. 5 Расчетная схема двухслойного конуса

Рассматривались материалы – стеклопластик и резинокорд (обрезиненные металлические волокна). Характеристики стеклопластика приводились ранее, характеристики резинокорда: коэффициент теплопроводности связующего  $\lambda_c = 0,159$  Вт/(м · К), коэффициент теплопроводности волокон  $\lambda_b = 421$  Вт/(м · К), объемное содержание армирующих волокон  $\psi_b = 0,35$ .

На рис. 6, 7 представлены графики распределения температуры по толщине цилиндра  $\theta = 0$  в сечении  $z = l/2$  для различных  $\varphi$ , из которых видно, что влияние отношения коэффициентов теплопроводности составляющих композита (назовем это отношение степенью неоднородности) на распределение температуры значительно.

Стеклопластик имеет меньшую степень неоднородности, чем резинокорд, поэтому, как видно из графиков, при прочих равных условиях отклонение распределения температуры от линейного у стеклопластика меньше, чем у резинокорда. Распределение же температуры по толщине резинокордного цилиндра при  $\varphi = 0$  является существенно нелинейным.

Также исследовалось влияние угла конусности на распределение температуры. На рис. 8 показана зависимость температуры от координаты  $r$  резинокордного конуса при различных значениях  $\theta$ , в сечениях  $z = l/2$ ,  $\varphi = 0$ . При этом видно, что чем меньше угол  $\theta$ , тем значительнее распределение температуры по толщине отличается от линейного.



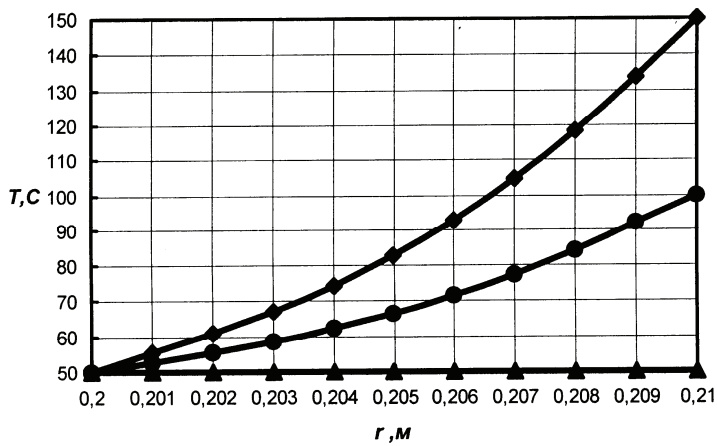


Рис. 6 Распределение температуры по толщине цилиндра в сечении  $z = l/2$  при различных  $\varphi$  (стеклопластик):

◆  $\varphi = 0$     ●  $\varphi = \pi/2$     ▲  $\varphi = \pi$

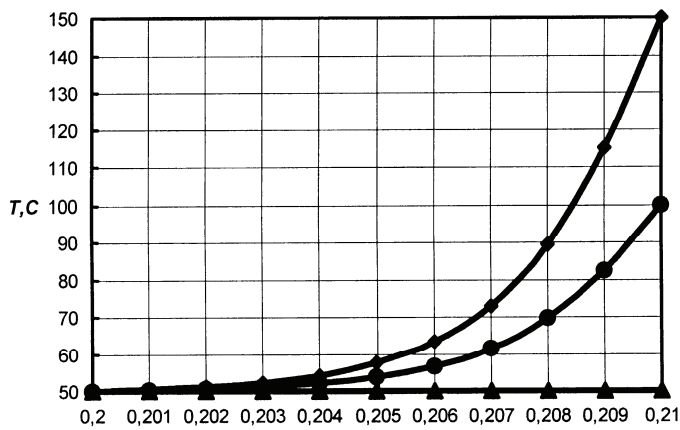


Рис. 7 Распределение температуры по толщине цилиндра в сечении  $z = l/2$  при различных  $\varphi$  (резинокорд):

◆  $\varphi = 0$     ●  $\varphi = \pi/2$     ▲  $\varphi = \pi$

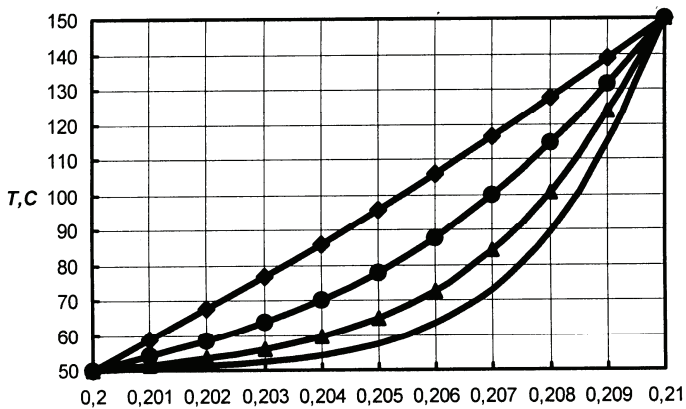


Рис. 8 Распределение температуры по толщине конуса в сечении  $z = l/2$ ,  $\varphi = 0$  при различных  $\theta$  (резинокорд):

◆  $\theta = \pi/3$     ●  $\theta = \pi/4$     ▲  $\theta = \pi/6$     —  $\theta = 0$

Таким образом, был проведен анализ влияния углов армирования, геометрии тела, степени неоднородности на температурные поля в телах вращения, выполненных из слоистых композитов. Была разработана методика решения трехмерной задачи переноса тепла с полным тензором теплопроводности в цилиндрической системе координат.

#### *Список литературы*

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. - 736 с.
2. Ильющин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во МГУ, 1990.- 310 с.
3. Ван Фо Фы Г.А. Конструкции из армированных пластмасс. - Киев: Наукова Думка, 1971. - 220 с.
4. Уилкинсон Дж., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. - М.: Машиностроение, 1976. - 389 с.
5. Василенко А.Т. Несимметричные температурные поля и напряжения в цилиндрах из неоднородных композитов // Механика композитных материалов. -1995. - Т.31, № 4. - С. 494-500.

---

### **Research of Stationary Heat Conduction in Rotating Bodies Made of Multilayer Composites**

**G.M. Kulikov, I.Ye. Kareva**

*Department of Applied Mathematics and Mechanics, TSTU*

**Key words and phrases:** anisotropy; temperature pattern; heat conduction tensor.

**Abstract:** Three-dimensional problem of heat conduction for multilayer rotating body with general anisotropy properties is set. Methodic for solving this problem is developed. Analysis of reinforcement angles, anisotropy degrees influence on temperature distribution in multilayer rotating bodies is carried out.

---

### **Untersuchung der stationären Wärmeleitfähigkeit in den Bewegungskörpern aus geschichteten Kompositen**

**Zusammenfassung:** Es ist dreidimensionale Aufgabe der Wärmeleitfähigkeit für den vielschichtigen Bewegungskörper mit den gemeinsamen Eigenschaften der Anisotropie gestellt. Es ist die Analyse der Einwirkung der Bewehrungsecken, des Anisotropiegrades auf die Temperaturverteilung in den vielschichtigen Bewegungskörpern.

---

### **Etude du transfert de la chaleur stationnaire dans les corps de rotation des matériaux composites**

**Résumé:** On a posé le problème à trois mesures pour le transfert de la chaleur dans un corps de rotation à multicouches avec les propriétés générales d'isotropie. On a élaboré la méthode de la résolution de ce problème. On a fait l'analyse de l'influence des angles d'armement, du degré d'anisotropie sur la répartition de la température dans les corps de rotation multicouches.