УДК 536.21.005

МЕТОДОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ТЕЛ ПРОСТОЙ ФОРМЫ*

В.В. Власов, С.В. Пономарев[1], С.В. Мищенко[1], В.В. Татаринов[2], С.В. Григорьева[1], Е.С. Пономарева[1]

Кафедра «Автоматизированные системы и приборы», ТГТУ (1)
Тамбовский филиал военного университета радиационной, химической и биологической защиты (2)

Ключевые слова и фразы: граничные условия 4-го рода специального вида; краевая задача теплопроводности; многослойные тела; построение функции Грина; свойства функции Грина.

Аннотация: Рассмотрены постановки краевых задач теплопроводности для двухслойных и многослойных тел. Приведены основные свойства функций Грина соответствующих краевых задач. Рассмотрена методология применения функций Грина для получения квадратурных формул, представляющих собой записи решений краевых задач теплопроводности. Обсуждаются вопросы построения функций Грина и основных преимуществ их использования при решении краевых задач теплопроводности.

Обозначения

a – температуропроводность, м^2/с;
*c*ρ - объемная теплоемкость, Дж/(м^3·К);
G – функция Грина;
P – удельная мощность поверхностного источника тепла, Вт/м^2;
q – тепловой поток, Вт/м^2;
r – пространственная координата, м;
R – значения координат граничных поверхностей, м;
T – температура, К;
W – объемная плотность внутренних источников тепла, Вт/м^3;
X – собственные функции краевых задач Штурма-Лиувилля;
α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^2·К);
β, γ – коэффициенты в обобщенной записи (3, 6) граничных условий;
δ – функция Дирака;
ε – собственные значения краевых задач Штурма-Лиувилля;
ζ – безразмерная координата;
η – переменная интегрирования, с;
λ – теплопроводность, Вт/(м·К);
ξ – переменная интегрирования, м;
τ – время, с;
ψ – функции, определяющие закономерности изменения граничных условий во времени;
г – коэффициент формы.

Индексы

л – значение, заданное на левой границе тела;
н – начальное значение;
п – значение, заданное на правой границе тела;
с – греющая (охлаждающая) среда;
I, II, III – граничные условия 1, 2 или 3 рода.

* Статья является продолжением исследований по применению функций Грина для решения инженерных задач теплофизики, выполнявшихся соавторами под руководством профессора В.В. Власова [3, 7].

В научно-технической литературе достаточно часто используют решения краевых задач теплопроводности, основанные на применении метода функции Грина [1 - 8]. К сожалению, в большинстве случаев опубликованные результаты содержат постановку исходной краевой задачи теплопроводности, а затем, без промежуточных выкладок, приводится запись решения этой задачи, полученная с применением функции Грина. В отличие от [1 - 8] в данной статье, на примере многослойных тел простой формы, рассматривается методология применения функций Грина для решения краевых задач теплопроводности.

1 Постановка краевой задачи теплопроводности для двухслойных тел простой формы

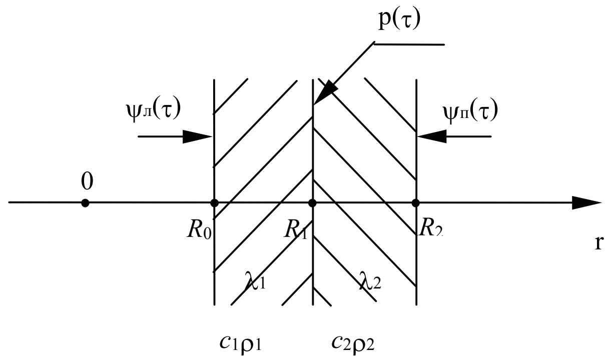

Рис. 1 Схема двухслойных тел простой формы

Краевая задача теплопроводности для двухслойных тел простой формы (рис. 1) может быть представлена в виде дифференциального уравнения теплопроводности:

$$r^{\Gamma} c\rho(r) \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r}\left[r^{\Gamma} \lambda(r) \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r} \right] + W(r,\tau) r^{\Gamma}, \tag{1}$$

$$\tau > 0, \qquad R_0 < r < R_2,$$

с начальным условием

$$T(r, 0) = T_{\text{н}}(r) \tag{2}$$

и с граничными условиями:

$$\beta_{\text{л}} \frac{\partial T(R_0,\tau)}{\partial r} + \gamma_{\text{л}} T(R_0,\tau) = \psi_{\text{л}}(\tau), \tag{3}$$

$$\begin{cases} T(R_1 - 0,\tau) = T(R_1 + 0,\tau), & (4) \\ \lambda(R_1 - 0) \dfrac{\partial T(R_1 - 0,\tau)}{\partial r} - \lambda(R_1 + 0) \dfrac{\partial T(R_1 + 0,\tau)}{\partial r} = p(\tau), & (5) \end{cases}$$

$$\beta_{\text{п}} \frac{\partial T(R_2,\tau)}{\partial r} + \gamma_{\text{п}} T(R_2,\tau) = \psi_{\text{п}}(\tau), \tag{6}$$

где $T(r, \tau)$ – температура тела в точке с пространственной координатой r в момент времени τ; г – коэффициент формы (г = 0, 1, 2 соответственно для плоской, цилиндрической и сферической систем координат); R_0, R_1, R_2 – координаты граничных поверхностей рассматриваемых (рис. 1) двухслойных тел; $c\rho(r)$, $\lambda(r)$ – кусочно-постоянные функции, задающие значения объемной теплоемкости и теплопроводности каждого из слоев двухслойных тел:

$$c\rho(r) = \begin{cases} c_1\rho_1 & \text{при} \quad R_0 \le r < R_1, \\ c_2\rho_2 & \text{при} \quad R_1 < r \le R_2, \end{cases} \qquad \lambda(r) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{при} \quad R_0 \le r < R_1, \\ \lambda_2 & \text{при} \quad R_1 < r \le R_2; \end{cases}$$

$W(r, \tau)$ – объемная плотность внутренних источников тепла; $T_н(r)$ – начальное распределение температуры в двухслойном теле; $\beta_л$, $\gamma_л$, $\beta_п$, $\gamma_п$ - коэффициенты в записи граничных условий (3), (6), которые в зависимости от рода граничных условий, заданных при $r = R_0$ и $r = R_2$, могут принимать значения [2]:

- в случае граничных условий первого рода (ГУ-1)

$$\beta_л \equiv 0, \gamma_л \equiv 1, \text{т.е. (3) принимает вид } T(R_0,\tau) = \psi_л^{\mathrm{I}}(\tau) \equiv T_л(\tau)\,, \tag{3-I}$$

$$\beta_п \equiv 0, \gamma_п \equiv 1, \text{т.е. (6) принимает вид } T(R_2,\tau) = \psi_п^{\mathrm{I}}(\tau) \equiv T_п(\tau)\,, \tag{6-I}$$

где $\psi_л^{\mathrm{I}}(\tau) \equiv T_л(\tau), \psi_п^{\mathrm{I}}(\tau) \equiv T_п(\tau)$ – имеют физический смысл функций, определяющих закономерности изменения температур $T_л(\tau)$, $T_п(\tau)$, заданных на поверхностях двухслойного тела слева при $r = R_0$ и справа при $r = R_2$;

- в случае граничных условий второго рода (ГУ-2)

$$\beta_л \equiv -\lambda(R_0+0), \gamma_л \equiv 0, \text{ т.е. } -\lambda(R_0+0)\frac{\partial T(R_0+0,\tau)}{\partial r} = \psi_л^{\mathrm{II}}(\tau) \equiv q_л(\tau)\,, \tag{3-II}$$

$$\beta_п \equiv +\lambda(R_т-0), \gamma_п \equiv 0, \text{ т.е. } +\lambda(R_т-0)\frac{\partial T(R_т-0,\tau)}{\partial r} = \psi_п^{\mathrm{II}}(\tau) \equiv q_п(\tau)\,, \tag{6-II}$$

где $\psi_л^{\mathrm{II}}(\tau) \equiv q_л(\tau), \psi_п^{\mathrm{II}}(\tau) \equiv q_п(\tau)$ – имеют физический смысл функций, определяющих закономерности изменения тепловых потоков $q_л(\tau)$, $q_п(\tau)$, заданных на поверхностях $r = R_0$ и $r = R_2$ двухслойного тела слева и справа;

- в случае граничных условий третьего рода (ГУ-3)

$$\beta_л \equiv -\frac{\lambda(R_0+0)}{\alpha_л}, \gamma_л \equiv 1, \text{ т.е. } -\frac{\lambda(R_0+0)}{\alpha_0}\cdot\frac{\partial T(R_0+0,\tau)}{\partial r} + T(R_0+0,\tau) = \psi_л^{\mathrm{III}}(\tau) \equiv T_л^{\mathrm{c}}(\tau)\,, \tag{3-Ш}$$

$$\beta_п \equiv +\frac{\lambda(R_т-0)}{\alpha_п}, \gamma_п \equiv 1, \text{ т.е. } +\frac{\lambda(R_т-0)}{\alpha_т}\cdot\frac{\partial T(R_т-0,\tau)}{\partial r} + T(R_т-0,\tau) = \psi_п^{\mathrm{III}}(\tau) \equiv T_п^{\mathrm{c}}(\tau)\,, \tag{6-III}$$

где $\psi_л^{\mathrm{III}}(\tau) \equiv T_л^{\mathrm{c}}(\tau)$, $\psi_п^{\mathrm{III}}(\tau) \equiv T_п^{\mathrm{c}}(\tau)$ - имеют физический смысл функций, определяющих закономерности изменения температур $T_л^{\mathrm{c}}(\tau)$, $T_п^{\mathrm{c}}(\tau)$ греющих сред, омывающих поверхности $r = R_0$ и $r = R_2$ двухслойного тела слева и справа, причем: $\alpha_л$, $\alpha_п$ - значения коэффициентов теплоотдачи, заданные на поверхностях $r = R_0$ и $r = R_2$; $p(\tau)$ - удельная мощность поверхностного источника тепла, действующего при $r = R_1$ на границе раздела слоев двухслойного тела.

Отметим, что выражения (4), (5) представляют собой обобщенную запись [2] граничных условий четвертого рода (ГУ-4), причем из (4) вытекает непрерывность температуры $T(r, \tau)$ на границе раздела двух сред при $r = R_1$. Физическому смыслу задачи (1) - (6) удовлетворяет также требование непрерывности функции $T(r, \tau)$ и ее первых производных по r при всех r за исключением точки R_1 и точек срабатывания внутренних источников тепла $W(r,\tau) = \delta(r-\xi)\delta(\tau-\eta)$, заданных в виде произведения δ-функций Дирака [1-3, 9].

2 Функция Грина краевой задачи (1) - (6) и ее свойства

Функцией Грина краевой задачи (1) - (6) называется [1-3, 9] функция четырех аргументов $G(r, \xi, \tau\text{-}\eta)$, которая является решением уравнения (1) при его правой части

$$W(r,\tau) = \delta(r - \xi)\delta(\tau - \eta) \tag{7}$$

и при однородных краевых условиях (2) - (6), т.е. при $T_{\text{н}}(r) \equiv 0$, $\psi_{\text{л}}(\tau) \equiv 0$, $p(\tau) \equiv 0, \psi_{\text{п}}(\tau) \equiv 0$.

В силу такого определения очевидно, что функция Грина $G(r, \xi, \tau\text{-}\eta)$ краевой задачи (1) - (6) имеет физический смысл нестационарного температурного поля, которое возникает в двухслойном теле (рис. 1) при однородных краевых условиях (2) - (6) в результате действия в момент времени $\tau = \eta$ внутреннего источника тепла в виде δ - функции Дирака $\delta(r - \xi)$ в точке с координатой $r = \xi$.

Введенная таким образом функция Грина $G(r, \xi, \tau\text{-}\eta)$ краевой задачи (1) - (6) имеет следующие свойства [1-3].

1. Функция $G(r, \xi, \tau\text{-}\eta)$ по аргументам r и τ удовлетворяет однородному уравнению (1), т.е.

$$r^{\Gamma} c\rho(r) \frac{\partial G(r, \xi, \tau - \eta)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial r}\left[r^{\Gamma} \lambda(r) \frac{\partial G(r, \xi, \tau - \eta)}{\partial r} \right] = 0 . \tag{1'}$$

2. Функция $G(r, \xi, \tau\text{-}\eta)$ по аргументам ξ, η удовлетворяет однородному уравнению

$$\xi^{\Gamma} c\rho(\xi) \frac{\partial G(r, \xi, \tau - \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\xi^{\Gamma} \lambda(\xi) \frac{\partial G(r, \xi, \tau - \eta)}{\partial \xi} \right] = 0 , \tag{1''}$$

которое называется [1-3] самосопряженным с уравнением (1').

3. Функция Грина $G(r, \xi, \tau\text{-}\eta)$ при $\eta \to \tau$, т.е. при $(\tau - \eta) \to 0$ обращается в δ - функцию Дирака

$$\lim_{(\tau - \eta) \to 0} G(r, \xi, \tau - \eta) = \delta(r - \xi) . \tag{2'}$$

4. Функция Грина $G(r, \xi, \tau\text{-}\eta)$ по аргументам r и ξ удовлетворяет однородным граничным условиям (3) - (6), а именно:

а) однородным граничным условиям (3)

как по аргументу r

$$\beta_{\text{л}} \frac{\partial G(R_0, \xi, \tau - \eta)}{\partial r} + \gamma_{\text{л}} G(R_0, \xi, \tau - \eta) = 0 , \tag{3'}$$

причем, при ГУ-1: $G(R_0, \xi, \tau\text{-}\eta) = 0$, (3'-I)

при ГУ-2: $$-\lambda(R_0 + 0) \frac{\partial G(R_0 + 0, \xi, \tau - \eta)}{\partial r} = 0 , \tag{3'-II}$$

при ГУ-3: $$-\frac{\lambda(R_0 + 0)}{\alpha_{\text{л}}} \cdot \frac{\partial G(R_0 + 0, \xi, \tau - \eta)}{\partial r} + G(R_0 + 0, \xi, \tau - \eta) = 0 ; \tag{3'-III}$$

так и по аргументу ξ

$$\beta_{л}\frac{\partial G(r,R_0,\tau-\eta)}{\partial\xi}+\gamma_{л}G(r,R_0,\tau-\eta)=0\,, \qquad (3'')$$

причем при ГУ-1: $G(r,R_0,\tau\text{-}\eta)=0$, (3’’-I)

$$\text{при ГУ-2: } -\lambda(R_0+0)\frac{\partial G(r,R_0+0,\tau-\eta)}{\partial\xi}=0\,, \qquad (3''\text{-II})$$

$$\text{при ГУ-3: } -\frac{\lambda(R_0+0)}{\alpha_{л}}\cdot\frac{\partial G(r,R_0+0,\tau-\eta)}{\partial\xi}+G(r,R_0+0,\tau-\eta)=0\,; \qquad (3''\text{-III})$$

б) однородным граничным условиям четвертого рода (4), (5)
как по аргументу r при $r = R_1$

$$G(R_1-0,\xi,\tau\text{-}\eta)=G(R_1+0,\xi,\tau\text{-}\eta), \qquad (4')$$

$$\lambda(R_1-0)\frac{\partial G(R_1-0,\xi,\tau-\eta)}{\partial r}-\lambda(R_1+0)\frac{\partial G(R_1+0,\xi,\tau-\eta)}{\partial r}=0\,, \qquad (5')$$

так и по аргументу ξ при $\xi = R_1$

$$G(r,R_1-0,\tau\text{-}\eta)=G(r,R_1+0,\tau\text{-}\eta), \qquad (4'')$$

$$\lambda(R_1-0)\frac{\partial G(r,R_1-0,\tau-\eta)}{\partial\xi}-\lambda(R_1+0)\frac{\partial G(r,R_1+0,\tau-\eta)}{\partial\xi}=0\,; \qquad (5'')$$

в) однородным граничным условиям (6)
как по аргументу r при $r = R_2$

$$\beta_{п}\frac{\partial G(R_{т},\xi,\tau-\eta)}{\partial r}+\gamma_{п}G(R_{т},\xi,\tau-\eta)=0\,, \qquad (6')$$

причем при ГУ-1: $G(R_2,\xi,\tau\text{-}\eta)=0$, (6’-I)

$$\text{при ГУ-2: } +\lambda(R_{т}-0)\frac{\partial G(R_{т}-0,\xi,\tau-\eta)}{\partial r}=0\,, \qquad (6'\text{-II})$$

$$\text{при ГУ-3: } +\frac{\lambda(R_{т}-0)}{\alpha_{п}}\cdot\frac{\partial G(R_{т}-0,\xi,\tau-\eta)}{\partial r}+G(R_{т}-0,\xi,\tau-\eta)=0\,; \qquad (6'\text{-III})$$

так и по аргументу ξ при $\xi = R_2$

$$\beta_{п}\frac{\partial G(r,R_{т},\tau-\eta)}{\partial\xi}+\gamma_{п}G(r,R_{т},\tau-\eta)=0\,, \qquad (6'')$$

причем при ГУ-1: $G(r,R_2,\tau\text{-}\eta)=0$, (6’’-I)

$$\text{при ГУ-2: } \lambda(R_{т}-0)\frac{\partial G(r,R_{т}-0,\tau-\eta)}{\partial\xi}=0\,, \qquad (6''\text{-II})$$

при ГУ-3: $$\frac{\lambda(R_т - 0)}{\alpha_п} \cdot \frac{\partial G(r, R_т - 0, \tau - \eta)}{\partial \xi} + G(r, R_т - 0, \tau - \eta) = 0 . \qquad (6''\text{-III})$$

Отметим, что, исходя из физического смысла краевой задачи (1) - (6), функция Грина $G(r, \xi, \tau\text{-}\eta)$ вместе с ее первыми производными является непрерывной во всех точках существования решений уравнений (1') и (1'') за исключением точки R_1 и точек срабатывания внутренних источников тепла $\delta(r - \xi)\delta(\tau - \eta)$.

3 Методология получения квадратурных формул, представляющих собой запись решения краевой задачи теплопроводности (1) - (6) через функцию Грина

В уравнении (1) заменим аргументы r, τ на ξ, η, умножим левую и правую части (1) на $G(r, \xi, \tau\text{-}\eta)$ и вычислим двойной интеграл $\int\limits_0^\tau \int\limits_{R_0}^{R_т} \{\ldots\} d\xi d\eta$ от левой и правой частей получившегося уравнения. В результате получим:

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_{R_0}^{R_т} \xi^\Gamma c\rho(\xi) \frac{\partial T(\xi, \eta)}{\partial \eta} G(r, \xi, \tau - \eta) d\xi d\eta =$$

$$= \int\limits_0^\tau \int\limits_{R_0}^{R_т} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\xi^\Gamma \lambda(\xi) \frac{\partial T(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right] G(r, \xi, \tau - \eta) d\xi d\eta + \int\limits_0^\tau \int\limits_{R_0}^{R_т} \xi^\Gamma W(\xi, \eta) G(r, \xi, \tau - \eta)\, d\xi\, d\eta . \qquad (8)$$

Все интегралы уравнения (8) удовлетворяют требованиям теоремы Фубини-Лебега [10] и потому, в принципе, могут быть вычислены последовательным однократным интегрированием, причем порядок интегрирования внутри двойных интегралов может меняться.

В уравнении (8) преобразуем интеграл слева. Проинтегрируем по частям внутренний однократный интеграл

$$\int\limits_{R_0}^{R_т} \int\limits_0^\tau \xi^\Gamma c\rho(\xi) \frac{\partial T(\xi, \eta)}{\partial \eta} G(r, \xi, \tau - \eta) d\eta d\xi =$$

$$= \int\limits_{R_0}^{R_т} \left[G(r, \xi, \tau - \eta)\xi^\Gamma c\rho(\xi) T(\xi, \eta)\Big|_0^\tau - \int\limits_0^\tau T(\xi, \eta)\xi^\Gamma c\rho(\xi) \frac{\partial G(r, \xi, \tau - \eta)}{\partial \eta} d\eta \right] d\xi .$$

Отметим, что функция Грина в силу свойства (2') при $\eta = \tau$ обращается в функцию $\delta(r - \xi)$, поэтому после преобразований рассматриваемый интеграл, с учетом фильтрующего свойства δ-функции Дирака [9] $\int\limits_{R_0}^{R_т} \delta(r - \xi)\xi^\Gamma c\rho(\xi) T(\xi, \tau) =$ $= r^\Gamma c\rho(r) T(r, \tau)$, принимает вид

$$\int\limits_{R_0}^{R_т} \int\limits_0^\tau \xi^\Gamma c\rho(\xi) \frac{\partial T(\xi, \eta)}{\partial \eta} G(r, \xi, \tau - \eta) d\eta d\xi = r^\Gamma c\rho(r) T(r, \tau) -$$

$$
-\int_{R_0}^{R_{\text{т}}} G(r,\xi,\tau-0)\xi^{\Gamma} c\rho(\xi) T(\xi,0) d\xi - \int_{R_0}^{R_{\text{т}}}\int_0^{\tau} T(\xi,\eta)\xi^{\Gamma} c\rho(\xi)\frac{\partial G(r,\xi,\tau-\eta)}{\partial\eta} d\eta d\xi . \tag{9}
$$

В уравнении (8) преобразуем первый интеграл справа. Проинтегрируем по частям внутренний однократный интеграл, предварительно разбив его на два: на интервалах (R_0, R_1) и (R_1, R_2)

$$
\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R_{\text{т}}} \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial T(\xi,\eta)}{\partial\xi}\right] G(r,\xi,\tau-\eta) d\xi d\eta =
$$

$$
= \int_0^{\tau}\left[\lim_{\Delta R\to 0}\left\{ G(r,\xi,\tau-\eta)\xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial T(\xi,\eta)}{\partial\xi}\right|_{R_0}^{R_1-\Delta R} + G(r,\xi,\tau-\eta)\xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial T(\xi,\eta)}{\partial\xi}\left|_{R_1+\Delta R}^{R_{\text{т}}}\right\}\right] d\eta -
$$

$$
-\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R_{\text{т}}} \xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial T(\xi,\eta)}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial G(r,\xi,\tau-\eta)}{\partial\xi} d\xi d\eta =
$$

$$
= +\int_0^{\tau} G(r,R_{\text{т}},\tau-\eta) R_{\text{т}}^{\Gamma}\lambda(R_{\text{т}})\frac{\partial T(R_{\text{т}},\eta)}{\partial\xi} d\eta + \int_0^{\tau}\left[G(r,R_1-0,\tau-\eta) R_1^{\Gamma}\lambda(R_1-0)\frac{\partial T(R_1-0,\eta)}{\partial\xi} -\right.
$$

$$
\left. - G(r,R_1+0,\tau-\eta) R_1^{\Gamma}\lambda(R_1+0)\frac{\partial T(R_1+0,\eta)}{\partial\xi}\right] d\eta -
$$

$$
-\int_0^{\tau} G(r,R_0,\tau-\eta) R_0^{\Gamma}\lambda(R_0)\frac{\partial T(R_0,\eta)}{\partial\xi} d\eta - \int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R_{\text{т}}} \xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial T(\xi,\eta)}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial G(r,\xi,\tau-\eta)}{\partial\xi} d\xi d\eta =
$$

$$
= \int_0^{\tau} G(r,R_{\text{т}},\tau-\eta) R_{\text{т}}^{\Gamma}\lambda(R_{\text{т}})\frac{\partial T(R_{\text{т}},\eta)}{\partial\xi} d\eta +
$$

$$
+\int_0^{\tau} G(r,R_1,\tau-\eta) R_1^{\Gamma}\left[\lambda(R_1-0)\frac{\partial T(R_1-0,\eta)}{\partial\xi} - \lambda(R_1+0)\frac{\partial T(R_1+0,\eta)}{\partial\xi}\right] d\eta -
$$

$$
-\int_0^{\tau} G(r,R_0,\tau-\eta) R_0^{\Gamma}\lambda(R_0)\frac{\partial T(R_0,\eta)}{\partial\xi} d\eta - \int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R_{\text{т}}} \xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial T(\xi,\eta)}{\partial\xi}\frac{\partial G(r,\xi,\tau-\eta)}{\partial\xi} d\xi d\eta.
$$

Выше было принято во внимание свойство (4’’) непрерывности функции Грина в точке $r = R_1$. С учетом граничного условия (5) на границе раздела двух тел имеем

$$
\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R_{\text{т}}} \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial T(\xi,\eta)}{\partial\xi}\right] G(r,\xi,\tau-\eta) d\xi d\eta =
$$

$$
= \int_0^{\tau} G(r,R_{\text{т}},\tau-\eta) R_{\text{т}}^{\Gamma}\lambda(R_{\text{т}})\frac{\partial T(R_{\text{т}},\eta)}{\partial\xi} d\eta + \int_0^{\tau} G(r,R_1,\tau-\eta) R_1^{\Gamma} p(\eta) d\eta - \tag{10}
$$

$$
-\int_0^{\tau} G(r,R_0,\tau-\eta) R_0^{\Gamma}\lambda(R_0)\frac{\partial T(R_0,\eta)}{\partial\xi} d\eta - \int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R_{\text{т}}} \xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial T(\xi,\eta)}{\partial\xi}\frac{\partial G(r,\xi,\tau-\eta)}{\partial\xi} d\xi d\eta.
$$

В выражении (10) преобразуем последний интеграл. Проинтегрируем по частям внутренний однократный интеграл, разбив его на два: на интервалах (R_0, R_1) и (R_1, R_2)

$$\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R_\text{т}} \xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial T(\xi,\eta)}{\partial\xi}\frac{\partial G(r,\xi,\tau-\eta)}{\partial\xi}d\xi d\eta =$$

$$= \int_0^{\tau}\lim_{\Delta R\to 0}\left\{\xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial G(r,\xi,\tau-\eta)}{\partial\xi}T(\xi,\eta)\Big|_{R_0}^{R_1-\Delta R} + \xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial G(r,\xi,\tau-\eta)}{\partial\xi}T(\xi,\eta)\Big|_{R_1+\Delta R}^{R_\text{т}}\right\}d\eta -$$

$$-\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R_\text{т}} T(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial G(r-\xi,\tau-\eta)}{\partial\xi}\right]d\xi d\eta =$$

$$= \int_0^{\tau} T(R_1,\eta)R_1^{\Gamma}\left[\lambda(R_1-0)\frac{\partial G(r,R_1-0,\tau-\eta)}{\partial\xi} - \lambda(R_1+0)\frac{\partial G(r,R_1+0,\tau-\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta +$$

$$+\int_0^{\tau}\left\{\frac{\partial G(r,R_\text{т},\tau-\eta)}{\partial\xi}R_\text{т}^{\Gamma}\lambda(R_\text{т})T(R_\text{т},\eta) - \frac{\partial G(r,R_0,\tau-\eta)}{\partial\xi}R_0^{\Gamma}\lambda(R_0)T(R_0,\eta)\right\}d\eta -$$

$$-\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R_\text{т}} T(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial G(r,\xi,\tau-\eta)}{\partial\xi}\right]d\xi d\eta.$$

С учетом однородности граничного условия (5'') для функции Грина имеем

$$\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R_\text{т}} \xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial T(\xi,\eta)}{\partial\xi}\frac{\partial G(r,\xi,\tau-\eta)}{\partial\xi}d\xi d\eta =$$

$$= \int_0^{\tau}\left\{\frac{\partial G(r,R_\text{т},\tau-\eta)}{\partial\xi}R_\text{т}^{\Gamma}\lambda(R_\text{т})T(R_\text{т},\eta) - \frac{\partial G(r,R_0,\tau-\eta)}{\partial\xi}R_0^{\Gamma}\lambda(R_0)T(R_0,\eta)\right\}d\eta - \quad (11)$$

$$-\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{R_\text{т}} T(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial G(r,\xi,\tau-\eta)}{\partial\xi}\right]d\xi d\eta.$$

Подставим полученные результаты (9) - (11) в уравнение (8). После алгебраических преобразований получим

$$r^{\Gamma}c\rho(r)T(r,\tau) = \int_{R_0}^{R_\text{т}} G(r,\xi,\tau-0)\xi^{\Gamma}c\rho(\xi)T(\xi,0)d\xi +$$

$$+\int_{R_0}^{R_\text{т}}\int_0^{\tau} T(\xi,\eta)\left\{\xi^{\Gamma}c\rho(\xi)\frac{\partial G(r,\xi,\tau-\eta)}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^{\Gamma}\lambda(\xi)\frac{\partial G(r,\xi,\tau-\eta)}{\partial\xi}\right]\right\}d\eta d\xi +$$

$$+\int_0^\tau G(r,R_т,\tau-\eta)R_т^\Gamma\lambda(R_т)\frac{\partial T(R_т,\eta)}{\partial\xi}d\eta+\int_0^\tau G(r,R_1,\tau-\eta)R_1^\Gamma p(\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^\tau G(r,R_0,\tau-\eta)R_0^\Gamma\lambda(R_0)\frac{\partial T(R_0,\eta)}{\partial\xi}d\eta-$$

$$-\int_0^\tau\left\{\frac{\partial G(r,R_т,\tau-\eta)}{\partial\xi}R_т^\Gamma\lambda(R_т)T(R_т,\eta)-\frac{\partial G(r,R_0,\tau-\eta)}{\partial\xi}R_0^\Gamma\lambda(R_0)T(R_0,\eta)\right\}d\eta+$$

$$+\int_{R_0}^{R_т}\int_0^\tau\xi^\Gamma W(\xi,\eta)\,G(r,\xi,\tau-\eta)\,d\eta d\xi\,.$$

В первом двойном интеграле подынтегральная функция, выделенная фигурными скобками, равна нулю в силу того, что функция Грина по аргументам ξ, η является решением самосопряженного однородного уравнения (1’’). Поэтому данный интеграл тождественно равен нулю.

Итак, в качестве промежуточного результата получим

$$T(r,\tau)=\frac{1}{r^\Gamma c\rho(r)}\left[\int_{R_0}^{R_т}G(r,\xi,\tau-0)\xi^\Gamma c\rho(\xi)T(\xi,0)d\xi+\right.\tag{12-i}$$

$$+\int_0^\tau G(r,R_т,\tau-\eta)R_т^\Gamma\lambda(R_т)\frac{\partial T(R_т,\eta)}{\partial\xi}d\eta+\tag{12-ii}$$

$$+\int_0^\tau G(r,R_1,\tau-\eta)R_1^\Gamma p(\eta)d\eta-\tag{12-iii}$$

$$-\int_0^\tau G(r,R_0,\tau-\eta)R_0^\Gamma\lambda(R_0)\frac{\partial T(R_0,\eta)}{\partial\xi}d\eta-\tag{12-iv}$$

$$-\int_0^\tau\frac{\partial G(r,R_т,\tau-\eta)}{\partial\xi}R_т^\Gamma\lambda(R_т)T(R_т,\eta)d\eta+\tag{12-v}$$

$$+\int_0^\tau\frac{\partial G(r,R_0,\tau-\eta)}{\partial\xi}R_0^\Gamma\lambda(R_0)T(R_0,\eta)d\eta+\tag{12-vi}$$

$$\left.+\int_{R_0}^{R_т}\int_0^\tau\xi^\Gamma W(\xi,\eta)G(r,\xi,\tau-\eta)d\eta d\xi\right].\tag{12-vii}$$

Отметим, что в правой части (12) присутствуют: функция Грина и ее производная по координате, а также функции, определяемые условиями (2), (3-I), (3-II), (5), (6-I), (6-II) и функция источника. Таким образом, (12) позволяет найти искомую функцию $T(r,\tau)$, но только в тех случаях, когда на внешних поверхностях двухслойного тела, т.е. при $r=R_0$ и $r=R_2$, заданы граничные условия первого или второго рода. Например, в случае, когда при $r=R_0$ и $r=R_2$ заданы граничные условия первого рода (3-I), (6-I), интегралы (12-ii), (12-iv) становятся тождественно равны нулю в силу (6’’-I), (3’’-I), а после подстановки $T(\xi,0)=T_н(\xi)$, и $T(R_т,\eta)=T_п(\eta)$, $T(R_0,\eta)=T_л(\eta)$ в интегралы (12-i), (12-v), (12-vi), получим

$$T(r,\tau)=\frac{1}{r^{\Gamma}c\rho(r)}\left[\int\limits_{R_0}^{R_т} G(r,\xi,\tau-0)\xi^{\Gamma}c\rho(\xi)T_н(\xi)d\xi+\right. \qquad (12'\text{-i})$$

$$+\int\limits_0^{\tau} G(r,R_1,\tau-\eta)R_1^{\Gamma}p(\eta)d\eta+ \qquad (12'\text{-iii})$$

$$+\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial G(r,R_0,\tau-\eta)}{\partial\xi}R_0^{\Gamma}\lambda(R_0)T_л(\eta)d\eta- \qquad (12'\text{-vi})$$

$$-\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial G(r,R_т,\tau-\eta)}{\partial\xi}R_т^{\Gamma}\lambda(R_т)T_п(\eta)d\eta+ \qquad (12'\text{-v})$$

$$\left.+\int\limits_{R_0}^{R_т}\int\limits_0^{\tau} G(r,\xi,\tau-\eta)\xi^{\Gamma}W(\xi,\eta)d\eta d\xi\right]. \qquad (12'\text{-vii})$$

Из последнего выражения следует, что искомое температурное поле $T(r,\tau)$ находится в результате суперпозиции интегралов (12'-i), (12'-iii), (12'-vi), (12'-v), (12'-vii), зависящих соответственно от начальных условий $T_н(\xi)$, удельной мощности $p(\eta)$ поверхностного источника тепла, действующего между слоями при $r = R_1$; температур $T_л(\eta)$, $T_п(\eta)$ поверхностей двухслойной системы слева при $r = R_0$ и справа при $r = R_2$ и от объемной плотности $W(\xi,\eta)$ внутренних источников тепла.

Аналогично, в случае, когда на внешних поверхностях двухслойного тела при $r = R_0$ и $r = R_2$ заданы граничные условия второго рода (3-II) и (6-II), интегралы (12-v), (12-vi) становятся тождественно равны нулю в силу (6''-II), (3''-II), а после подстановки $T(\xi,0)=T_н(\xi)$, $-\lambda(R_0)\frac{\partial T(R_0,\eta)}{\partial\xi}= \;=q_л(\eta),\; \lambda(R_т)\frac{\partial T(R_т,\eta)}{\partial\xi}=q_п(\eta)$ в интегралы (12-i), (12-ii), (12-iv), получим

$$T(r,\tau)=\frac{1}{r^{\Gamma}c\rho(r)}\left[\int\limits_{R_0}^{R_т} G(r,\xi,\tau-0)\xi^{\Gamma}c\rho(\xi)T_н(\xi)d\xi+\right. \qquad (12''\text{-i})$$

$$+\int\limits_0^{\tau} G(r,R_1,\tau-\eta)R_1^{\Gamma}p(\eta)d\eta+ \qquad (12''\text{-iii})$$

$$+\int\limits_0^{\tau} G(r,R_0,\tau-\eta)R_0^{\Gamma}q_л(\eta)d\eta+ \qquad (12''\text{-iv})$$

$$+\int\limits_0^{\tau} G(r,R_т,\tau-\eta)R_т^{\Gamma}q_п(\eta)d\eta+ \qquad (12''\text{-ii})$$

$$\left.+\int\limits_{R_0}^{R_т}\int\limits_0^{\tau} G(r,\xi,\tau-\eta)\xi^{\Gamma}W(\xi,\eta)d\eta d\xi\right]. \qquad (12''\text{-vi})$$

Здесь интегралы (12’’-iv), (12’’-ii) определяют зависимость искомого температурного поля $T(r, \tau)$ от тепловых потоков $q_л(\eta)$ и $q_п(\eta)$, заданных на внешних поверхностях двухслойной системы слева при $r = R_0$ и справа при $r = R_2$.

Выражение (12) в том виде, как оно представлено выше, не позволяет сразу получить запись искомого решения в случае, когда при $r = R_0$ и $r = R_2$ заданы граничные условия третьего рода (3-III) и (6-III). Проведем следующее преобразование выражения (12). Прибавим к выражениям (12-iv), (12-vi) и вычтем из них интеграл $\alpha_л \int_0^\tau G(r, R_0, \tau-\eta) R_0^г T(R_0, \eta) d\eta$. В результате будем иметь:

$$-\int_0^\tau G(r, R_0, \tau-\eta) R_0^г \lambda(R_0) \frac{\partial T(R_0, \eta)}{\partial \xi} d\eta + \int_0^\tau \frac{\partial G(r, R_0, \tau-\eta)}{\partial \xi} R_0^г \lambda(R_0) T(R_0, \eta) d\eta +$$

$$+ \alpha_л \int_0^\tau G(r, R_0, \tau-\eta) R_0^г T(R_0, \eta) d\eta - \alpha_л \int_0^\tau G(r, R_0, \tau-\eta) R_0^г T(R_0, \eta) d\eta =$$

$$= \alpha_л \int_0^\tau G(r, R_0, \tau-\eta) R_0^г \left[-\frac{\lambda(R_0)}{\alpha_л} \frac{\partial T(R_0, \eta)}{\partial \xi} + T(R_0, \eta) \right] d\eta -$$

$$- \alpha_л \int_0^\tau T(R_0, \eta) R_0^г \left[-\frac{\lambda(R_0)}{\alpha_л} \frac{\partial G(r, R_0, \tau-\eta)}{\partial \xi} + G(r, R_0, \tau-\eta) \right] d\eta =$$

$$= \alpha_л \int_0^\tau G(r, R_0, \tau-\eta) R_0^г T_л^c(\eta) d\tau ,$$

здесь принято во внимание, что в силу (3-III) и (3’’-III)

$$-\frac{\lambda(R_0)}{\alpha_л} \frac{\partial T(R_0, \eta)}{\partial \xi} + T(R_0, \eta) = \psi_л^{III}(\eta) \equiv T_л^c(\eta) ,$$

$$-\frac{\lambda(R_0)}{\alpha_л} \frac{\partial G(r, R_0, \tau-\eta)}{\partial \xi} + G(r, R_0, \tau-\eta) = 0 .$$

Если к выражениям (12-ii) и (12-v) прибавить и вычесть аналогичный интеграл, то получится:

$$\int_0^\tau G(r, R_т, \tau-\eta) R_т^г \lambda_т(R_т) \frac{\partial T(R_т, \eta)}{\partial \xi} d\eta - \int_0^\tau \frac{\partial G(r, R_т, \tau-\eta)}{\partial \xi} R_т^г \lambda(R_т) T(R_т, \eta) d\eta +$$

$$+ \alpha_п \int_0^\tau G(r, R_т, \tau-\eta) R_т^г T(R_т, \eta) d\eta - \alpha_п \int_0^\tau G(r, R_т, \tau-\eta) R_т^г T(R_т, \eta) d\eta =$$

$$= \alpha_п \int_0^\tau G(r, R_т, \tau-\eta) R_т^г \left[\frac{\lambda_т(R_т)}{\alpha_п} \frac{\partial T(R_т, \eta)}{\partial \xi} + T(R_т, \eta) \right] d\eta -$$

$$- \alpha_п \int_0^\tau T(R_т, \eta) R_т^г \left[\frac{\lambda_т(R_т)}{\alpha_п} \frac{\partial G(r, R_т, \tau-\eta)}{\partial \xi} + G(r, R_т, \tau-\eta) \right] d\eta =$$

$$= \alpha_п \int_0^\tau G(r, R_т, \tau-\eta) R_т^г T_п^c(\eta) d\eta ,$$

здесь также принято во внимание, что в силу (6-III)

$$\frac{\lambda_{\text{т}}(R_{\text{т}})}{\alpha_{\text{п}}}\frac{\partial T(R_{\text{т}}\text{и}\eta)}{\partial\xi}+T(R_{\text{т}}\text{и}\eta)=\psi_{\text{п}}^{\text{III}}(\eta)\equiv T_{\text{п}}^{\text{с}}(\eta)\,,$$

а в силу (6’’-III)

$$\frac{\lambda_{\text{т}}(R_{\text{т}})}{\alpha_{\text{п}}}\frac{\partial G(r\text{и}R_{\text{т}}\text{и}\tau-\eta)}{\partial\xi}+G(r\text{и}R_{\text{т}}\text{и}\tau-\eta)=0\,.$$

Итак, в случае задания граничных условий третьего рода (3-III) и (6-III) при $r = R_0$ и $r = R_2$, выражение (12) примет вид:

$$T(r\text{и}\tau)=\frac{1}{r^{\text{Г}}c\rho(r)}\left[\int\limits_{R_0}^{R_{\text{т}}}G(r\text{и}\xi\text{и}\tau-0)\xi^{\text{Г}}c\rho(\xi)T_{\text{н}}(\xi)d\xi+\right. \qquad (12’’’\text{-i})$$

$$+\int\limits_0^{\tau}G(r\text{и}R_1\text{и}\tau-\eta)R_1^{\text{Г}}p(\eta)d\eta+ \qquad (12’’’\text{-iii})$$

$$+\,\alpha_{\text{л}}\int\limits_0^{\tau}G(r\text{и}R_0\text{и}\tau-\eta)R_0^{\text{Г}}T_{\text{л}}^{\text{с}}(\eta)d\eta+ \qquad (12’’’\text{-ix})$$

$$+\,\alpha_{\text{п}}\int\limits_0^{\tau}G(r\text{и}R_{\text{т}}\text{и}\tau-\eta)R_{\text{т}}^{\text{Г}}T_{\text{п}}^{\text{с}}(\eta)d\eta+ \qquad (12’’’\text{-x})$$

$$\left.+\int\limits_{R_0}^{R_{\text{т}}}\int\limits_0^{\tau}G(r\text{и}\xi\text{и}\tau-\eta)\xi^{\text{Г}}W(\xi\text{и}\eta)d\eta d\xi\right]\,, \qquad (12’’’\text{-vii})$$

где интегралы (12’’’-ix), (12’’’-x) определяют зависимость температурного поля $T(r,\tau)$ от температур $T_{\text{л}}^{\text{с}}(\eta)$ и $T_{\text{п}}^{\text{с}}(\eta)$ сред, омывающих внешние поверхности рассматриваемой двухслойной системы слева и справа при $r = R_0$ и $r = R_2$.

В общем случае на поверхности $r = R_0$ может быть задано граничное условие рода m (m = 1, 2 или 3), а на поверхности $r = R_2$ - граничное условие рода k (k = 1, 2 или 3). С учетом выражений (12’), (12’’) и (12’’’) искомое температурное поле (при граничных условиях рода m при $r = R_0$ и рода k при $r = R_2$) определяется выражением

$$T(r\text{и}\tau)=\frac{1}{r^{\text{Г}}c\rho(r)}\left[\int\limits_{R_0}^{R_{\text{т}}}G(r\text{и}\xi\text{и}\tau-0)\xi^{\text{Г}}c\rho(\xi)T_{\text{н}}(\xi)d\xi+\right.$$

$$+\,B_m(r\text{и}\tau)+\int\limits_0^{\tau}G(r\text{и}R_1\text{и}\tau-\eta)R_1^{\text{Г}}p(\eta)d\eta+D_k(r\text{и}\tau)+ \qquad (13)$$

$$\left.+\int\limits_{R_0}^{R_{\text{т}}}\int\limits_0^{\tau}G(r\text{и}\xi\text{и}\tau-\eta)\xi^{\text{Г}}W(\xi\text{и}\eta)d\eta d\xi\right],$$

где $$B_1(r\text{и}\tau)=\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial G(r\text{и}R_0\text{и}\tau-\eta)}{\partial\xi}R_0^{\text{Г}}\lambda(R_0)T_{\text{л}}(\eta)d\eta\,,$$

$$D_1(r\text{и}\tau)=-\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial G(r\text{и}R_{\text{т}}\text{и}\tau-\eta)}{\partial\xi}R_{\text{т}}^{\text{Г}}\lambda(R_{\text{т}})T_{\text{п}}(\eta)d\eta\,,$$

$$B_{\text{т}}(r и \tau) = \int_0^{\tau} G(r и R_0 и \tau - \eta) R_0^{Г} q_{\text{л}}(\tau) d\eta ,$$

$$D_{\text{т}}(r и \tau) = \int_0^{\tau} G(r и R_{\text{т}} и \tau - \eta) R_{\text{т}}^{Г} q_{\text{п}}(\tau) d\eta ,$$

$$B_3(r и \tau) = \alpha_{\text{л}} \int_0^{\tau} G(r и R_0 и \tau - \eta) R_0^{Г} T_{\text{л}}^{\text{c}}(\tau) d\eta ,$$

$$D_3(r и \tau) = \alpha_{\text{п}} \int_0^{\tau} G(r и R_{\text{т}} и \tau - \eta) R_{\text{т}}^{Г} T_{\text{п}}^{\text{c}}(\tau) d\eta .$$

Таким образом, выражение (13) представляет собой запись решения краевой задачи (1) - (6), которое позволяет рассчитать нестационарное температурное поле $T(r, \tau)$ двухслойной системы (рис. 1) при произвольных значениях функций $T_{\text{н}}(r)$, $W(r, \tau)$, $p(\tau)$, $T_{\text{л}}(\tau)$, $T_{\text{п}}(\tau)$, $q_{\text{л}}(\tau)$, $q_{\text{п}}(\tau)$, $T_{\text{л}}^{\text{c}}(\tau)$ и $T_{\text{п}}^{\text{c}}(\tau)$, заданных в краевой задаче (1) - (6).

4 Решение краевой задачи теплопроводности через функцию Грина в случае *n*-слойного тела

Схема рассматриваемой *n*-слойной системы приведена на рис. 2.

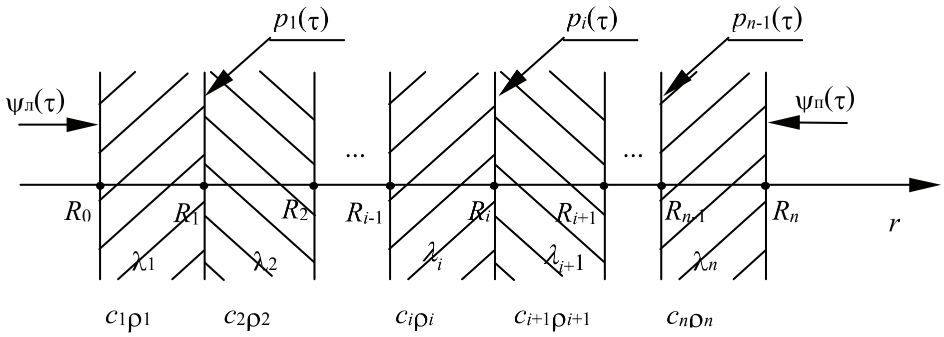

Рис. 2 Схема *n*-слойной системы

Краевая задача теплопроводности для *n*-слойных тел плоской (Г = 0), цилиндрической (Г = 1) и сферической (Г = 2) формы может быть записана в виде:

$$r^{Г} c\rho(r) \frac{\partial T(r и \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r}\left[r^{Г} \lambda(r) \frac{\partial T(r и \tau)}{\partial r} \right] + W(r и \tau) , \qquad (14)$$

$$\tau > 0, \qquad R_0 < r < R_n,$$

$$T(r, 0) = T_{\text{н}}(r), \qquad (15)$$

$$\beta_{\text{л}} \frac{\partial T(R_0 и \tau)}{\partial r} + \gamma_{\text{л}} T(R_0 и \tau) = \psi_{\text{л}}(\tau) , \qquad (16)$$

$$\begin{cases} T(R_i - 0 и \tau) = T(R_i + 0 и \tau) и i = 1 и г и \ldots и n - 1 и & (17) \\ \lambda(R_i - 0) \dfrac{\partial T(R_i - 0 и \tau)}{\partial r} - \lambda(R_i + 0) \dfrac{\partial T(R_i + 0 и \tau)}{\partial r} = p_i(\tau) и i = 1 и г и \ldots и n - 1 и & (18) \end{cases}$$

ISSN 0136-5835. Вестник ТГТУ. 2002. Том 8. № 1. Transactions TSTU.

$$\beta_{\text{п}} \frac{\partial T(R_n, \tau)}{\partial r} + \gamma_{\text{п}} T(R_n, \tau) = \psi_{\text{п}}(\tau). \qquad (19)$$

Обозначения, использованные при записи краевой задачи (14) - (19), совпадают с ранее использованными обозначениями. Особенностью постановки краевой задачи (14) - (19) является то, что на всех поверхностях раздела $r = R_i$, $i = 1, 2, ..., n-1$ заданы $(n-1)$ граничных условий четвертого рода, представленные в виде (17), (18), причем объемная теплоемкость $c\rho(r)$ и теплопроводность $\lambda(r)$ задаются в виде:

$$c\rho(r) = c_i \rho_i \text{ при } R_{i-1} < r < R_i, \; i = 1, 2, ..., n;$$

$$\lambda(r) = \lambda_i \text{ при } R_{i-1} < r < R_i, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Физический смысл коэффициентов $\beta_{\text{л}}$, $\gamma_{\text{л}}$ и функций $\psi_{\text{л}}(\tau)$ определяется так же, как и в случае (3-I), (3-II), (3-III). Физический смысл коэффициентов $\beta_{\text{п}}$, $\gamma_{\text{п}}$ и функций $\psi_{\text{п}}(\tau)$ определяется граничными условиями (6-I), (6-II), (6-III) при замене значения координаты $r = R_2$ правой границы в выражениях (6-I), (6-II), (6-III) на $r = R_n$. Функции $p_i(\tau)$ в (18) имеют физический смысл удельных мощностей поверхностных источников тепла, действующих на поверхностях раздела слоев при $r = R_i$, $i = 1, 2, ..., n-1$.

Если для краевой задачи (14) - (19) повторить математические преобразования, аналогичные рассмотренным в третьем разделе данной статьи, а при интегрировании по частям внутренних интегралов выражений

$$\int_0^\tau \int_{R_0}^{R_n} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\xi^\Gamma \lambda(\xi) \frac{\partial T(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right] G(r, \xi, \tau - \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$\int_0^\tau \int_{R_0}^{R_n} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\xi^\Gamma \lambda(\xi) \frac{\partial T(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right] \frac{\partial G(r, \xi, \tau - \eta)}{\partial \xi}\, d\xi\, d\eta,$$

эти внутренние интегралы разбить на n интегралов на отрезках $(0, R_1)$, (R_1, R_2), ..., (R_{n-1}, R_n), то вместо интеграла $\int_0^\tau G(r, R_1, \tau - \eta) R_1^\Gamma p(\eta)\, d\eta$ в выражении (13) получится сумма интегралов

$$\int_0^\tau G(r, R_1, \tau - \eta) R_1^\Gamma p_1(\eta)\, d\eta + \int_0^\tau G(r, R_2, \tau - \eta) R_2^\Gamma p_2(\eta)\, d\eta + \ldots$$

$$+ \int_0^\tau G(r, R_{n-1}, \tau - \eta) R_{n-1}^\Gamma p_{n-1}(\eta)\, d\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^\tau G(r, R_i, \tau - \eta) R_i^\Gamma p_i(\eta)\, d\eta \;.$$

Если слева на поверхности $r = R_0$ задано граничное условие рода m $(m = 1, 2$ или $3)$, а справа на поверхности $r = R_n$ задано граничное условие рода k $(k = 1, 2$ или $3)$, то решение краевой задачи (14) - (19) получается в виде:

$$T(r, \tau) = \frac{1}{r^\Gamma c\rho(r)} \left[\int_{R_0}^{R_n} G(r, \xi, \tau - 0) \xi^\Gamma c\rho(\xi) T_{\text{н}}(\xi)\, d\xi + \right.$$

$$+ B_m(r \text{и} \tau) + \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{\tau} G(r \text{и} R_i \text{и} \tau - \eta) R_i^{\Gamma} p_i(\eta) d\eta + D_k(r \text{и} \tau) +$$

$$\left. + \int_0^{\tau} \int_{R_0}^{R_n} G(r \text{и} \xi \text{и} \tau - \eta) \xi^{\Gamma} W(\xi \text{и} \eta) d\xi d\eta \right], \qquad (20)$$

где $$B_1(r \text{и} \tau) = \int_0^{\tau} \frac{\partial G(r \text{и} R_0 \text{и} \tau - \eta)}{\partial \xi} R_0^{\Gamma} \lambda(R_0) T_{\text{л}}(\eta) d\eta,$$

$$D_1(r \text{и} \tau) = -\int_0^{\tau} \frac{\partial G(r \text{и} R_n \text{и} \tau - \eta)}{\partial \xi} R_n^{\Gamma} \lambda(R_n) T_{\text{П}}(\eta) d\eta,$$

$$B_{\text{T}}(r \text{и} \tau) = \int_0^{\tau} G(r \text{и} R_0 \text{и} \tau - \eta) R_0^{\Gamma} q_{\text{л}}(\tau) d\eta,$$

$$D_{\text{T}}(r \text{и} \tau) = \int_0^{\tau} G(r \text{и} R_n \text{и} \tau - \eta) R_n^{\Gamma} q_{\text{П}}(\tau) d\eta,$$

$$B_3(r \text{и} \tau) = \alpha_{\text{л}} \int_0^{\tau} G(r \text{и} R_0 \text{и} \tau - \eta) R_0^{\Gamma} T_{\text{л}}^{\text{c}}(\tau) d\eta,$$

$$D_3(r \text{и} \tau) = \alpha_{\text{П}} \int_0^{\tau} G(r \text{и} R_n \text{и} \tau - \eta) R_n^{\Gamma} T_{\text{П}}^{\text{c}}(\tau) d\eta.$$

Выражение (20) представляет собой запись решения краевой задачи (14) - (19), которое позволяет рассчитать нестационарное температурное поле $T(r, \tau)$ n-слойного тела (рис. 2) при произвольных значениях функций $T_{\text{н}}(r)$, $W(r, \tau)$, $p_i(\tau)$, $i = 1, 2, ..., n-1$; $T_{\text{л}}(\tau)$, $T_{\text{п}}(\tau)$, $q_{\text{л}}(\tau)$, $q_{\text{п}}(\tau)$, $T_{\text{Л}}^{c}(\tau)$, $T_{\text{П}}^{c}(\tau)$, заданных в краевой задаче (14) - (19). Однако, воспользоваться на практике выражением (20) можно лишь при условии, что функция Грина $G(r \text{и} \xi \text{и} \tau - \eta)$ краевой задачи (14) - (19) известна.

5 Построение функции Грина краевой задачи (14) - (19)

Наиболее просто функция Грина $G(r \text{и} \xi \text{и} \tau - \eta)$ может быть найдена путем сравнения какого-либо частного решения краевой задачи (14) - (19) с записью этого решения через функцию Грина. Например, если в краевой задаче (14) - (19) положить $\psi_{\text{л}}(\tau) = 0$, $\psi_{\text{п}}(\tau) = 0$, $W(r, \tau) = 0$, $p_i(\tau) = 0$, $(i = 1, 2, ..., n-1)$ и $T_{\text{н}}(r) \neq 0$, то решение такой задачи легко находится методом разделения переменных [1, 2] в виде:

$$T(r \text{и} \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j X_j\left(\frac{r}{R_n}\right) \exp\left[-\varepsilon_j^{\text{T}} \frac{a_0(\tau - 0)}{R_n^{\text{T}}}\right], \qquad (21)$$

где $$A_j = \frac{\int_{R_0}^{R_n} X_j\left(\frac{r}{R_n}\right) r^{\Gamma} c\rho(r) T_{\text{H}}(r) dr}{\int_{R_0}^{R_n} X_j^{\text{T}}\left(\frac{r}{R_n}\right) r^{\Gamma} c\rho(r) dr} - \qquad (22)$$

коэффициенты разложения в ряд Фурье $T_{\text{н}}(r) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j X_j\left(\frac{r}{R_n}\right)$ начального распределения $T_{\text{н}}(r)$ температуры в теле; $a_0 = \lambda_0/(c_0\rho_0)$ - характерное для рассматриваемой задачи значение коэффициента температуропроводности, в частности, в качестве a_0 может быть принято значение коэффициента температуропроводности одного из слоев n-слойной системы; ε_j и $X_j\left(\frac{r}{R_n}\right)$ - собственные значения и собственные функции краевой задачи Штурма-Лиувилля [11], возникающей при решении рассматриваемой задачи методом разделения переменных, причем, в нашем случае эта краевая задача Штурма-Лиувилля имеет вид:

$$\frac{d}{d\zeta}\left[\zeta^{\Gamma}\overline{\lambda}(\zeta)\frac{dX_j(\zeta)}{d\zeta}\right] + \varepsilon_j^{\text{т}}\zeta^{\Gamma}\overline{c\rho}(\zeta)X_j(\zeta) = 0\,, \qquad \frac{R_0}{R_n} < \zeta < 1\,,$$

$$\frac{\beta_{\text{л}}}{R_n}\frac{dX_j\left(\frac{R_0}{R_n}\right)}{d\zeta} + \gamma_{\text{л}} X_j\left(\frac{R_0}{R_n}\right) = 0\,,$$

$$X_j\left(\frac{R_i}{R_n} - 0\right) = X_j\left(\frac{R_i}{R_n} + 0\right), \qquad i = 1, 2, ..., n\text{-}1, \tag{23}$$

$$\overline{\lambda}\left(\frac{R_i}{R_n} - 0\right)\frac{dX_j\left(\frac{R_i}{R_n} - 0\right)}{d\zeta} = \lambda\left(\frac{R_i}{R_n} + 0\right)\frac{dX_j\left(\frac{R_i}{R_n} + 0\right)}{d\zeta}\,, \qquad i = 1, 2, ..., n\text{-}1,$$

$$\frac{\beta_{\text{п}}}{R_n}\frac{dX_j(1)}{d\zeta} + \gamma_{\text{п}} X_j(1) = 0\,,$$

где $\zeta = \frac{r}{R_n}$ - безразмерная пространственная координата; безразмерные теплопроводность и объемная теплоемкость в задаче (23) задаются в виде:

$$\overline{\lambda}(\zeta) = \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \quad \text{при } R_{i-1}/R_n < \zeta < R_i/R_n \text{и } i = 1\text{иги..и}n\,,$$

$$\overline{c\rho}(\zeta) = \frac{c_i\rho_i}{c_0\rho_0} \text{ при } R_{i-1}/R_n < \zeta < R_i/R_0 \text{и } i = 1\text{иги..и}n\,.$$

Заменим в числителе (22) переменную интегрирования r на переменную ξ и результат подставим в (21)

$$T(r\text{и}\tau) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\int\limits_{R_0}^{R_n} X_j\left(\frac{\xi}{R_n}\right)\xi^{\Gamma}c\rho(\xi)T_{\text{н}}(\xi)d\xi}{\int\limits_{R_0}^{R_n} X_j^{\text{т}}\left(\frac{r}{R_n}\right)r^{\Gamma}c\rho(r)dr} X_j\left(\frac{r}{R_n}\right)\exp\left[-\varepsilon_j^{\text{т}}\frac{a_0(\tau - 0)}{R_n^{\text{т}}}\right] =$$

$$= \int\limits_{R_0}^{R_n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j\left(\frac{r}{R_n}\right) X_j\left(\frac{\xi}{R_n}\right) \exp\left[-\varepsilon_j^{\text{Т}} \frac{a_0(\tau - 0)}{R_n^{\text{Т}}}\right]}{\int\limits_{R_0}^{R_n} X_j^{\text{Т}}\left(\frac{r}{R_n}\right) r^{\text{Г}} c\rho(r) dr} \xi^{\text{Г}} c\rho(\xi) T_{\text{н}}(\xi)\, d\xi . \qquad (24)$$

Сравним решение (24) рассматриваемой задачи с записью этого же решения через функцию Грина

$$T(r, \tau) = \frac{1}{r^{\text{Г}} c\rho(r)} \int\limits_{R_0}^{R_n} G(r, \xi, \tau - 0) \xi^{\text{Г}} c\rho(\xi) T_{\text{н}}(\xi) d\xi , \qquad (25)$$

которое получается из выражения (20) после подстановки в него нулевых граничных условий и нулевой правой части $W(\xi, \eta) = 0$.

В результате сравнения (24) и (25) получаем, что функция Грина имеет вид:

$$G(r, \xi, \tau - \eta) = r^{\text{Г}} c\rho(r) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j\left(\frac{r}{R_n}\right) X_j\left(\frac{\xi}{R_n}\right) \exp\left[-\varepsilon_j^{\text{Т}} \frac{a_0(\tau - \eta)}{R_n^{\text{Т}}}\right]}{\int\limits_{R_0}^{R_n} X_j^{\text{Т}}\left(\frac{s}{R_n}\right) s^{\text{Г}} c\rho(s) ds} . \qquad (26)$$

Подставив получившуюся функцию Грина (26) в выражение (20), можно рассчитать температурное поле $T(r, \tau)$ n-слойного тела при любых значениях функций, входящих в начальные и граничные условия (15) - (19) и в правую часть уравнения (14) рассматриваемой краевой задачи теплопроводности (14) - (19).

Следует отметить, что при подстановке функции Грина (26) в выражение (20) произведение $r^{\text{Г}} c\rho(r)$, стоящее в правой части (26), и выражение $\frac{1}{r^{\text{Г}} c\rho(r)}$, входящее в качестве сомножителя в правую часть (20), взаимно сокращаются. В результате (20) может быть представлено в виде:

$$T(r, \tau) = \int\limits_{R_0}^{R_n} \hat{G}(r, \xi, \tau - 0) \xi^{\text{Г}} c\rho(\xi) T_{\text{н}}(\xi) d\xi +$$

$$+ \hat{B}_m(r, \tau) + \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_0^{\tau} \hat{G}(r, R_i, \tau - \eta) R_i^{\text{Г}} p_i(\eta) d\eta + \hat{D}_k(r, \tau) + \qquad (27)$$

$$+ \int\limits_0^{\tau} \int\limits_{R_0}^{R_n} \hat{G}(r, \xi, \tau - \eta) \xi^{\text{Г}} W(\xi, \eta) d\xi d\eta ,$$

где $$\hat{B}_1(r, \tau) = \int\limits_0^{\tau} \frac{\partial \hat{G}(r, R_0, \tau - \eta)}{\partial \xi} R_0^{\text{Г}} \lambda(R_0) T_{\text{л}}(\eta) d\eta ,$$

$$\hat{D}_1(r, \tau) = -\int\limits_0^{\tau} \frac{\partial \hat{G}(r, R_n, \tau - \eta)}{\partial \xi} R_n^{\text{Г}} \lambda(R_n) T_{\text{п}}(\eta) d\eta ,$$

$$\hat{B}_{\text{т}}(r,\tau) = \int_0^{\tau} \hat{G}(r,R_0,\tau-\eta) R_0^{\Gamma} q_{\text{л}}(\eta) d\eta \,,$$

$$\hat{D}_{\text{т}}(r,\tau) = \int_0^{\tau} \hat{G}(r,R_n,\tau-\eta) R_n^{\Gamma} q_{\text{п}}(\eta) d\eta \,,$$

$$\hat{B}_{3}(r,\tau) = \alpha_{\text{л}} \int_0^{\tau} \hat{G}(r,R_0,\tau-\eta) R_0^{\Gamma} T_{\text{л}}^{c}(\eta) d\eta \,,$$

$$\hat{D}_{3}(r,\tau) = \alpha_{\text{п}} \int_0^{\tau} \hat{G}(r,R_n,\tau-\eta) R_n^{\Gamma} T_{\text{п}}^{c}(\eta) d\eta \,,$$

$$\hat{G}(r,\xi,\tau-\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j\left(\frac{r}{R_n}\right) X_j\left(\frac{\xi}{R_n}\right) \exp\left[-\varepsilon_j^{\text{т}} \frac{a_0(\tau-\eta)}{R_n^{\text{т}}}\right]}{\int_{R_0}^{R_n} X_j^{\text{т}}\left(\frac{s}{R_n}\right) s^{\Gamma} c\rho(s) ds} \tag{28}$$

- скорректированная функция Грина, позволяющая вместо выражения (20) использовать более простое выражение (27). Строго говоря, $\hat{G}(r,\xi,\tau-\eta)$ не является функцией Грина исходной краевой задачи (14) - (19), но легко получается из функции Грина (26) следующим образом

$$\hat{G}(r,\xi,\tau-\eta) = \frac{G(r,\xi,\tau-\eta)}{r^{\Gamma} c\rho(r)} \,.$$

6 Обсуждение полученных результатов

Рассмотренная в данной статье инженерная методология применения функции Грина для решения краевых задач теплопроводности многослойных тел плоской, цилиндрической и сферической формы обладает следующими достоинствами.

1. В случае, когда рассматриваемая краевая задача (14) - (19) поставлена так, что

- функция внутренних источников $W(r,\tau)$ зависит только от пространственной координаты r и времени τ;

- функция начального распределения температуры $T_{\text{н}}(r)$ зависит только от пространственной координаты r;

- функции $\psi_{\text{л}}(\tau)$, $\psi_{\text{п}}(\tau)$, определяющие закономерности изменения во времени граничных условий первого, второго или третьего рода, заданных при $r = R_0$ и $r = R_n$, зависят только от времени τ;

- функции $p_i(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, n$-1, задающие удельные мощности поверхностных источников тепла, действующих на границах раздела слоев n-слойного тела при $r = R_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$-1, зависят только от времени τ,

достаточно один раз построить функцию Грина (26) рассматриваемой краевой задачи (14) - (19) с соответствующими граничными условиями 1, 2 или 3 рода или со смешанными граничными условиями, чтобы получить решение этой задачи в виде (20) при всевозможных функциях $W(r,\tau)$, $T_{\text{н}}(r)$, $\psi_{\text{л}}(\tau)$, $\psi_{\text{п}}(\tau)$, $p_i(\tau)$.

2. В случае, когда $W(r,\tau,T)$ — нелинейная функция температуры, решение задачи (14) - (19) является решением нелинейного интегрального уравнения, которое получается подстановкой $W(r,\tau,T)$ в выражение (20) при соответствующих конкретных начальных и граничных условиях.

3. Функция Грина позволяет рассматривать огромное количество задач расчета температурных полей твердых тел, решения которых приведены в [1, 2], с единых позиций.

При решении краевых задач теплопроводности с использованием традиционных подходов [2] (методами разделения переменных, преобразования Лапласа, конечных интегральных преобразований и др.) необходимость изменить род граничных условий (16), (19) или учесть функции $p_i(\tau)$, $W(r,\tau)$ источников тепла, часто воспринимается как переход к рассмотрению новой краевой задачи. Простой перебор граничных условий 1, 2 или 3 рода на поверхностях $r = R_0$ и $r = R_n$ при $p_i(\tau) = 0$, $W(r,\tau) = 0$ приводит к девяти вариантам постановок задач. Рассмотрение случаев, когда $W(r,\tau) \neq 0$ (например, $W(r,\tau) = \text{const}$, $W(r,\tau) = = W(r)$, $W(r,\tau) = W(\tau)$, $W(r,\tau) = W(r)W(\tau)$ и т.п.) или $p_i(\tau) \neq 0$ (например, $p_1 = p_1(\tau) \neq 0$ при $p_2 = p_3 = p_4 = \ldots = p_{n-1} = 0$; $p_2 = p_2(\tau) \neq 0$ при $p_1 = p_3 = p_4 = \ldots = p_{n-1} = 0$ и т.д.), увеличивает количество вариантов постановок задач во много раз. С точки зрения метода функций Грина понятно, что все это многообразие постановок краевых задач теплопроводности является частными случаями одной краевой задачи (14) - (19).

4. При численном решении краевой задачи (14) - (19) возникает необходимость в сравнении полученного численного решения с каким-либо точным решением этой задачи. В этом случае в качестве точного решения могут быть использованы выражения (20) или (27), полученные с применением метода функции Грина.

5. Аналитические решения (20), (27) краевой задачи (14) - (19) могут быть использованы и неоднократно использовались авторами статьи при разработке методов измерения теплофизических свойств твердых, сыпучих, пастообразных и жидких материалов на основе измерительных устройств, выполненных в виде многослойных систем [12-14].

Список литературы

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука, 1964. - 487 с.

2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967. - 599 с.

3. Власов В. В. Применение функций Грина к решению инженерных задач теплофизики. - М.: Изд. МИХМ, 1972. - 440 с.

4. Егерев В. К. Диффузионная кинетика в неподвижных средах. - М.: Наука, 1970. - 227 с.

5. Toor H. L. Solution of the Linearized Equation of Multicomponent Masstransfer // A.I.Ch.E.J. - 1964. -V.10 - No.4. - Pp. 448-455, 460-465.

6. Gidaspow D. Greens Function for Graetz Problem and Interfacial Concentrations // A.I.Ch.E.J. - 1971. - V. 17. - No.1. - Pp. 19-24.

7. Власов В. В., Кулаков М. В., Пономарев С. В., Журба А. М. Применение функций Грина к расчету температурных полей в ламинарных потоках жидкостей //ТОХТ. - 1975. - Т. IX. - №5. - С. 717-722.

8. Пономарев С. В., Мищенко С. В. Методы и устройства для измерения эффективных теплофизических характеристик потоков технологических жидкостей. - Тамбов: Изд. ТГТУ, 1997. - 248 с.

9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1973. - 832 с.

10. Шварц Л. Математические методы для физических наук. - М.: Мир, 1965.

11. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. - М.: Наука, 1974. - 432 с.

12. Ponomarev S.V., Mischenko S.V., Grigorieva S.V., Divin A.G., Mischenko E.S., Ponomareva E.S. Methods of measuring solid, Dry, Paste materials and liquids thermophysical properties // Proceeding of the 4th World Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics. Brussels, June 2-6. -1997. – Pp. 225-229.

13. Пономарев С.В., Мищенко С.В., Григорьева С.В., Дивин А.Г. Метод измерений и автоматизированное рабочее место исследователя теплофизических свойств жидкостей // Измерительная техника. -1998. -№6. - С. 35-43.

14. Мищенко С.В., Пономарев С.В., Григорьева С.В., Дивин А.Г., Мищенко Е.С., Пономарева Е.С. Метод и автоматизированное устройство для измерения теплофизических свойств жидкостей (на английском языке) // Вестник ТГТУ. - 1998. -Том 4. - №2-3. –С.244-254.

Methodology of Green Functions Application to Solve Boundary Problem of Thermal Conductivity for Multilayer Bodies of Simple Shape

V.V. Vlasov, S.V. Ponomarev[1], S.V. Mishchenko[1], V.V. Tatarinov[2], S.V. Grigoryeva[1], Ye.S. Ponomareva[1]

Department "Computer-Aided Systems and Devices" (1), TSTU;
Tambov Branch of Military University of Radiating,
Chemical and Biological Protection (2)

Key words and phrases: quadrature formulas; boundary problem of thermal conductivity; multi-layer bodies; temperature patterns calculation; Green function.

Abstract: Formulation of boundary problems of thermal conductivity for double-layer and multi-layer bodies is considered. Main properties of Green functions for relative boundary problems are given. Methodology of Green functions application for production of quadtature formulas, representing records of solutions of boundary problems of thermal conductivity, is considered in detail. Questions of Green functions formulation and main advantages of its application for solution of boundary problems of thermal conductivity are discussed.

Methodologie der Anwendung der Grin-Funktionen für die Lösung der Randaufgaben der Wärmeleitfähigkeit der vielschichtigen Körper der einfachen Form

Zusammenfassung: Es sind die Stellungen der Randaufgaben der Wärmeleitfähigkeit für die zweischichtigen und vielschichtigen Körper betrachtet. Es sind die Haupteigenschaften der Grin-Funktionen der entsprechenden Randaufgaben angeführt. Es ist die Methodologie der Anwendung der Grin-Funktion für die Erhaltung der Quadraturformeln, die die Aufzeichnungen der Lösungen der Randaufgaben der Wärmeleitfähigkeit darstellen, detailliert betrachtet. Es werden die Fragen über der Struktur der Grin-Funktionen und über den Hauptvorteilen ihrer Benutzung bei der Lösung der Randaufgaben der Wärmeleitfähigkeit besprochen.

Méthode de l'application des fonctions de Green pour la résolution des problèmes aux limites du transfert de chaleur des corps multicouches de la forme simple

Résumé: On a examiné les formulations des problèmes aux limites du transfert de chaleur des corps à une et à plusieurs couches. On a cité les principales fonctions de Green pour la résolution des problèmes aux limites correspondants. On a examiné en détails la méthode de l'application des fonctions de Green pour l'obtention des formules quadrataires qui présentent les notices des résolutions des problèmes aux limites du transfert de chaleur. On a discuté les questions concernant la construction des fonctions de Green et leurs performances au cours de la résolution des problèmes aux limites du transfert de chaleur.