

## ОБЩАЯ КОНЦЕПЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИКИ ДЛЯ ПЕРЕДВИЖЕНИЯ ИССЛЕДУЕМОГО ПАРАМЕТРА ВО ВРЕМЕННЫХ СТРУКТУРАХ

Е. И. Алгазин

*Кафедра «Электроника и электротехника», algazin@corp.nstu.ru;  
ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет»,  
Новосибирск, Россия*

**Ключевые слова:** временные структуры; корни уравнения; линейные системы автоматики; напряжение на конденсаторе; постоянные времени; режимы функционирования.

**Аннотация:** Рассмотрены принципы построения линейных систем автоматики, предназначенных для передвижения их исследуемого параметра в цепях с различными постоянными времени. Моделирование таких систем основано на реализациях электрических цепей, позволяющих получать требуемые постоянные времени. Для этого на основе дифференциальных уравнений, описывающих поведение исследуемых цепей, формируются характеристические уравнения. Корни данных уравнений позволяют определить режим функционирования исследуемых цепей и постоянные времени. В качестве рассматриваемых цепей выбраны электрические, у которых исследуемым параметром является напряжение на конденсаторе.

---

### Введение

Изначально рассматриваются цепи, являющиеся линейными системами автоматики (ЛСА). В цепи, состоящей из последовательно соединенных индуктивности  $L$  и емкости  $C$ , предварительно заряженной до напряжения  $U_0$ , отсутствует диссипация. В остальных цепях содержится резистор, обуславливающий наличие диссипации.

Во всех рассматриваемых цепях существует обмен энергией между электростатическим полем конденсатора и магнитным полем катушки индуктивности. В цепях с резистором существует трансформация энергии обоих полей в тепловую энергию, выделяемую на резисторе  $R$ .

В зависимости от режима работы рассматриваемых цепей им соответствуют определенного вида корни, используемые при описании исследуемого параметра  $U_0$  – напряжения на конденсаторе. Для нахождения аналитического выражения постоянных интегрирования используется система уравнений. Матричная форма записи используется для проверки решения классическим способом.

В настоящей работе рассмотрены следующие режимы функционирования цепей: колебательный без диссипации для цепи, содержащей емкостный элемент и катушку индуктивности без резистивного элемента; колебательный с диссипацией для цепи второго порядка с наличием резистивного элемента; критический аperiодический для цепи второго порядка с наличием резистивного элемента и аperiодический для цепи второго порядка с наличием резистивного элемента.

При использовании матричного описания аналитических выражений исследуемого параметра (напряжения на конденсаторе) порядок цепи соответствует количеству реактивных элементов в ней и размерности используемых матриц. Это представление на плоскости. Увеличение порядка матриц (а также количества реактивных элементов в цепи) не ведет к качественному изменению результатов, а лишь усложняет вычисления и представление результатов.

Результатом исследований является получение корней, соответствующих определенному режиму функционирования рассматриваемых цепей.

В настоящей работе получены корни чисто мнимые, без вещественной части, комплексно-сопряженные, содержащие вещественную и мнимую части, и чисто вещественные, содержащие только вещественную часть.

Общепринято, что когда вычисляем постоянную времени исследуемой цепи, то принимаем ее равной обратному значению корня, взятого с обратным знаком. Это справедливо для всех корней, как для вещественных, так и для комплексных и мнимых.

Но при этом следует помнить, что в описании времени, которым является постоянная времени, появляется мнимая составляющая (в случае комплексных и мнимых корней). Об этом справедливо замечено в [1]. Поэтому необходимо найти данному явлению объяснение, позволяющее толковать наличие мнимой составляющей в описании постоянных времени.

Соответствие колебательных режимов без диссипации мнимым корням и с диссипацией комплексно-сопряженным корням дает объяснение в виде происходящего с исследуемым параметром колебательного процесса.

### Постановка задачи

Даны следующие ЛСА:

– система, состоящая из последовательно соединенных катушки с индуктивностью  $L$  и конденсатора емкостью  $C$ . Источник питания отсутствует. Конденсатор предварительно заряжен до напряжения  $U_0$ . (Далее цепь  $L - C - 0 - U_0$ ).

– системы, состоящие из последовательно соединенных катушки с индуктивностью  $L$ , конденсатора емкостью  $C$ , предварительно заряженного до напряжения  $U_0$ , а также резистора с сопротивлением  $R$ . В зависимости от значения  $R$  в таких цепях реализуется колебательный, критический аperiодический и аperiодический режим (далее цепь  $R - C - L - 0 - U_0$ ).

Допущения:  $R$ ,  $C$  и  $L$  – сосредоточенные элементы.

Источник питания отсутствует [2].

Необходимо:

1) найти корни характеристического уравнения, описывающего режим работы данных электрических цепей;

2) вывести аналитическое выражение исследуемого параметра  $U_c$  (напряжения на конденсаторе);

3) найти аналитические выражения для постоянных времени каждой из данных электрических цепей ЛСА.

### Пути решения

Рассмотрим ЛСА в виде электрической цепи  $L - C - 0 - U_0$  (рис. 1).

Опишем ее состояние на основе второго закона Кирхгофа (рис. 2).

Получим следующие уравнения:

$$\frac{1}{C} \int i_c dt + u_c = 0; \quad L \frac{di_c}{dt} - u_c = 0.$$

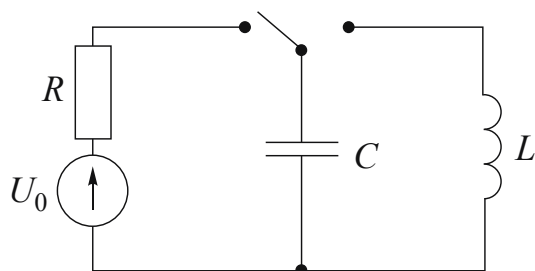


Рис. 1. Линейная система автоматики в виде электрической цепи  $L - C - 0 - U_0$

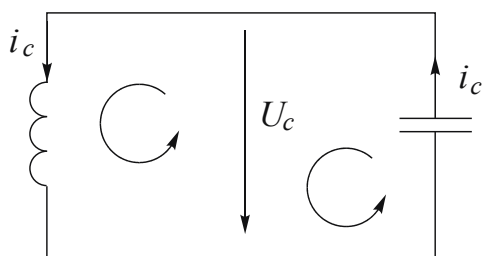


Рис. 2. Линейная система автоматики после коммутации ключа вправо

Сложим их почленно

$$\frac{1}{C} \int i_c dt + L \frac{di_c}{dt} = 0.$$

Продифференцируем обе части и упростим:

$$L \frac{d^2 i_c}{dt^2} + \frac{1}{C} i_c = 0;$$

$$\frac{d^2 i_c}{dt^2} = -\frac{1}{LC} i_c.$$

Получим характеристическое уравнение

$$p^2 = -\frac{1}{LC},$$

откуда

$$p_{1,2} = \pm j \frac{1}{LC}.$$

Найдем выражение для исследуемого параметра в виде

$$u_c(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – постоянные интегрирования.

Решим классическим методом:

$$A_1 + A_2 = U_0;$$

$$p_1 A_1 - p_1 A_2 = 0.$$

Преобразуем:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= U_0 - A_2; \\
 p_1(U_0 - A_2) - p_1 A_2 &= 0; \\
 p_1 U_0 - p_1 A_2 - p_1 A_2 &= 0; \\
 p_1 U_0 - 2p_1 A_2 &= 0; \\
 2p_1 A_2 &= p_1 U_0; \\
 2A_2 &= U_0; \\
 A_2 &= \frac{U_0}{2}; \\
 A_1 &= U_0 - A_2 = U_0 - \frac{U_0}{2} = \frac{U_0}{2}.
 \end{aligned}$$

Получим выражение для исследуемого параметра  $U_c$

$$\begin{aligned}
 u_c &= \frac{U_0}{2} e^{p_1 t} + \frac{U_0}{2} e^{-p_1 t} = \\
 &= \frac{U_0}{2} \left( \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t + j \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t \right) + \frac{U_0}{2} \left( \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t - j \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t \right) = U_0 \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t.
 \end{aligned}$$

Проведем проверку предыдущего решения с помощью матричного представления [3]:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} U_0 & 0 \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} e^{p_1 t} & e^{p_2 t} \\ p_1 e^{p_1 t} & p_2 e^{p_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}; \\
 U^T &= EA^T; \\
 E^{-1}U^T &= E^{-1}EA^T; \\
 E^{-1}U^T &= A^T.
 \end{aligned}$$

Матрица  $A$  и  $A^{-1}$  имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & -\frac{a_{12}}{\Delta} \\ -\frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & -p_1 \end{bmatrix}$ ,  $\Delta E = -2p_1$ , для момента времени  $t = 0$ .

Тогда:

$$\begin{aligned}
 E^{-1} &= \begin{bmatrix} -\frac{p_1}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta} \\ -\frac{p_1}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \end{bmatrix}; \\
 E^{-1}U^T &= A^T;
 \end{aligned}$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{p_1}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta} \\ -\frac{p_1}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{p_1}{-2p_1} & \frac{1}{2p_1} \\ -\frac{p_1}{-2p_1} & -\frac{1}{2p_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2p_1} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2p_1} \end{bmatrix};$$

$$E^{-1}U^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2p_1} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2p_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_0}{2} \\ \frac{U_0}{2} \end{bmatrix} = A^T.$$

Рассмотрим цепь  $R-C-L-0-U_0$  (рис. 3).

Для реализации апериодического режима необходимо выполнение условия  $R > R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , где  $R_{кр}$  – значение сопротивления критического. Корни исследуемой цепи находим из ее характеристического уравнения.

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Найдем выражение для исследуемого параметра в виде

$$u_c(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

При  $t = 0$

$$A_1 + A_2 = U_0;$$

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0,$$

откуда

$$A_1 = U_0 - A_2;$$

$$p_1(U_0 - A_2) + p_2 A_2 = 0.$$

Преобразуем к виду:

$$p_1 U_0 - p_1 A_2 + p_2 A_2 = 0;$$

$$A_2 = U_0 \frac{-p_1}{p_2 - p_1}.$$

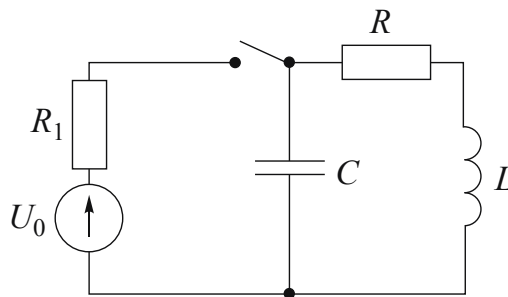


Рис. 3. Линейная система автоматизации, реализованная в виде электрической цепи  $R-C-L-0-U_0$

Проверим проведенные вычисления в матричной форме:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix}, \Delta E = p_2 - p_1;$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p_2}{p_2 - p_1} & -\frac{1}{p_2 - p_1} \\ -\frac{p_1}{p_2 - p_1} & \frac{1}{p_2 - p_1} \end{bmatrix};$$

$$E^{-1}U^T = E^{-1}EA^T.$$

Откуда

$$\begin{bmatrix} \frac{p_2}{p_2 - p_1} & -\frac{1}{p_2 - p_1} \\ -\frac{p_1}{p_2 - p_1} & \frac{1}{p_2 - p_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_0 p_2}{p_2 - p_1} \\ -\frac{U_0 p_1}{p_2 - p_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим цепь  $R-C-L-O-U_0$ , а это предельный аperiодический режим при выполнении условия  $R = R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Решение будем искать в виде

$$U_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

При  $t = 0$

$$u_{c\text{ св}} = (A_1 + A_2 t) e^{pt} \Big|_{t=0} = A_1 = U_0;$$

$$\frac{du_{c\text{ св}}}{dt} = (A_2 + pA_1 + pA_2 t) e^{pt} \Big|_{t=0} = A_2 + pA_1 = 0;$$

$$A_2 + pU_0 = 0;$$

$$A_2 = -pU_0.$$

Проверим эти выкладки в матричной форме

$$[U_0 \ 0]^T = \begin{bmatrix} e^{pt} & te^{pt} \\ p & (1+pt)e^{pt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}.$$

При  $t = 0$

$$[U_0 \ 0]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \Delta = 1;$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p & 1 \end{bmatrix};$$

$$E^{-1}U^T = A^T;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ -pU_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим цепь  $R-C-L-0-U_0$ . При выполнении условия  $R < R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , режим в цепи будет колебательный.

В рассматриваемом случае колебательного режима решение будем искать в виде

$$U_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

с учетом того, что  $p_1 = -\delta + j\omega_{св}$ ,  $p_2 = -\delta - j\omega_{св}$ , где  $\delta = \frac{R}{2L} < \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ;

а  $\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  – угловая частота собственных затухающих или свободных колебаний в рассматриваемой цепи. Поскольку при  $t = 0$

$$A_1 + A_2 = U_0; \quad p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0, \quad (1)$$

то постоянные интегрирования имеют следующий вид:

$$A_1 = \frac{U_0 p_2}{p_2 - p_1}; \quad A_2 = -\frac{U_0 p_1}{p_2 - p_1}.$$

Вместо  $p_1$  и  $p_2$  подставим их комплексные выражения:

$$p_2 - p_1 = -\delta - j\omega_{св} - (-\delta + j\omega_{св}) = -2j\omega_{св};$$

$$A_1 = \frac{U_0(-\delta - j\omega_{св})}{-2j\omega_{св}}; \quad A_2 = \frac{-U_0(-\delta + j\omega_{св})}{-2j\omega_{св}}.$$

После подстановки полученных комплексных выражений  $A_1$  и  $A_2$  в систему (1) получим тождества, что говорит о верности расчетов. Проверим в матричной форме:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta E = p_2 - p_1;$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p_2}{p_2 - p_1} & -\frac{1}{p_2 - p_1} \\ -\frac{p_1}{p_2 - p_1} & \frac{1}{p_2 - p_1} \end{bmatrix}; \quad E^{-1} U^T = E^{-1} E A^T,$$

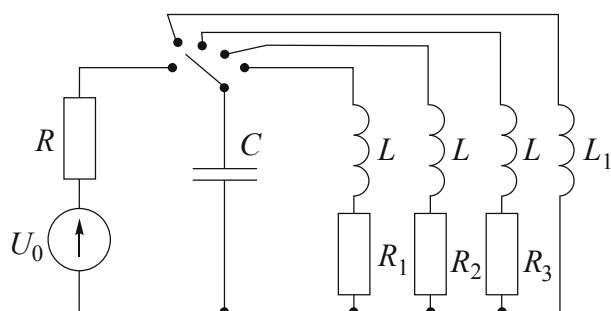
откуда

$$\begin{bmatrix} \frac{p_2}{p_2 - p_1} & -\frac{1}{p_2 - p_1} \\ -\frac{p_1}{p_2 - p_1} & \frac{1}{p_2 - p_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_0 p_2}{p_2 - p_1} \\ -\frac{U_0 p_1}{p_2 - p_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}.$$

Объединим предыдущие цепи, изображенные на рис. 1 и 3, в одну цепь, которая и будет окончательным вариантом ЛСА (рис. 4).

Цепь  $L-C-0-U_0$  реализует незатухающий колебательный режим, которому соответствуют два мнимых корня, равные по модулю, но с различными знаками:

$$p_1 = j\frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad p_2 = -j\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$



**Рис. 4. Окончательный вариант электрической цепи, реализующей ЛСА:**  
 $R_1 < R_2 < R_3, L \neq L_1$

Цепь  $R_1 - C - L - 0 - U_0$  реализует затухающий колебательный режим, которому соответствуют два комплексно-сопряженных корня:

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{C} - \frac{R^2}{4L^2}}; \quad p_2 = -\frac{R}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{C} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Цепь  $R_2 - C - L - 0 - U_0$  реализует критический аperiodический режим, которому соответствуют два равных вещественных корня

$$p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L}.$$

Цепь  $R_3 - C - L - 0 - U_0$  реализует аperiodический режим, которому соответствуют два различных вещественных корня

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}; \quad p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Формально-логический переход от корней (мнимых, комплексных, вещественных) к временным структурам  $jt$ ,  $t + jt$  и  $t$  заключается в том, что во всех случаях  $p = -\frac{1}{\tau}$ , откуда  $\tau = -\frac{1}{p}$ , где  $\tau$  – постоянная времени рассматриваемой цепи, которая может быть чисто мнимая, комплексно-сопряженная или вещественная, что указывает на принадлежность к временной структуре.

### Результаты

Для цепи  $L - C - 0 - U_0$  найдена постоянная времени. Величина мнимая. Режим колебательный незатухающий.

Для цепи  $R - C - L - 0 - U_0$  найдены постоянные времени для колебательного затухающего, критического аperiodического и аperiodического режимов работы цепи. Эти величины комплексно-сопряженные и вещественные.

Полученные постоянные времени принадлежат в случае цепи  $L - C - 0 - U_0$  к мнимой структуре времени, в случае цепи  $R - C - L - 0 - U_0$  – к комплексной либо вещественной структуре времени.

Полученная окончательная схема позволяет переводить исследуемый параметр  $U_c$  из одной временной структуры в другую.



## Выводы

Найденные постоянные времени для цепей  $L-C-0-U_0$  и  $R-C-L-0-U_0$  указывают на режим функционирования цепи. Общая концепция построения ЛСА для передвижения их исследуемого параметра в различных структурах времени заключается в установлении исходного состояния электрической цепи ЛСА и последующего переключения на ветвь, где постоянные времени мнимые, комплексно-сопряженные или вещественные.

### Список литературы

1. Арнольд, В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1978. – 304 с.
2. Веселовский, О. Н. Основы электротехники и электротехнические устройства радиоэлектронной аппаратуры / О. Н. Веселовский, Л. М. Брославский. – М. : Высшая школа, 1977. – 312 с.
3. Краткий физико-технический справочник / Под общ. ред. К. П. Яковлева. – Том 1. Математика. Физика. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – 448 с.

---

## A General Concept of Constructing Linear Automation Systems for Movement of Investigated Parameter in Time Structures

E. I. Algazin

*Department of Electronics and Electrical Engineering,  
Novosibirsk State Technical University  
Novosibirsk, Russia, algazin@corp.nstu.ru*

**Keywords:** time structures; roots of the equation; linear automation systems; voltage on a capacitor; time constants; operating modes.

**Abstract:** In this paper, the principles of constructing linear automation systems designed to move their parameter under study in circuits with different time constants are considered. Modeling of such systems is based on realizations of electrical circuits that allow one to obtain the required time constants. To do this, on the basis of differential equations that describe the behavior of the circuits under study, characteristic equations are formed. The roots of these equations make it possible to determine the mode of operation of the circuits under study and the time constants. Electrical circuits are selected as the circuits, in which the parameter under study is the voltage on the capacitor.

### References

1. Arnold V.I. *Dopolnitel'nyye glavy teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Additional Chapters in the Theory of Ordinary Differential Equations], Moscow: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit-ry, 1978, 304 p. (In Russ.)
2. Veselovsky O.N., Broslavsky L.M. *Osnovy elektrotekhniki i elektrotekhnicheskiye ustroy-stva radioelektronnoy apparatury* [Fundamentals of

electrical engineering and electro-technical devices of radio-electronic equipment], Moscow: Vysshaya shkola, 1977, 312 p. (In Russ.)

3. Yakovlev K.P. (Ed.). *Kratkiy fiziko-tehnicheskiy spravochnik* [Brief physical and technical reference book], vol. 1. *Matematika. Fizika* [Mathematics. Physics], Moscow: Gos. izdatel'stvo fiz.-mat. literatury, 1960, 448 p. (In Russ.)

---

### **Allgemeines Konstruktionskonzept linearer Automatisierungssysteme für Bewegung ihrer untersuchten Parameter in Zeitstrukturen**

**Zusammenfassung:** Es sind die Konstruktionsprinzipien linearer automatischer Systeme betrachtet, die dazu bestimmt sind, ihre untersuchten Parameter in Schaltkreisen mit unterschiedlichen Zeitkonstanten zu bewegen. Die Modellierung solcher Systeme basiert auf der Realisierung elektrischer Schaltungen, die es ermöglichen, die erforderlichen Zeitkonstanten zu erhalten. Zu diesem Zweck werden charakteristische Gleichungen auf der Grundlage von Differentialgleichungen gebildet, die das Verhalten der untersuchten Schaltungen beschreiben. Die Wurzeln dieser Gleichungen ermöglichen die Bestimmung der Funktionsweise der untersuchten Schaltungen und der Zeitkonstanten. Als untersuchte Schaltungen werden elektrische Schaltungen gewählt, bei denen der untersuchte Parameter die Spannung am Kondensator ist.

---

### **Conception générale de la construction des systèmes d'automatisation linéaire pour le mouvement du paramètre étudié dans les structures temporelles**

**Résumé:** Sont examinés les principes de la construction des systèmes d'automatisation linéaires conçus pour déplacer leur paramètre étudié dans des circuits avec différentes constantes de temps. La modélisation de ces systèmes est basée sur la mise en œuvre des circuits électriques permettant d'obtenir les temps requis. Pour cette raison à la base des équations décrivant le comportement des circuits sont formées des équations caractéristiques. Les racines de ces équations permettent de déterminer le mode de fonctionnement des circuits étudiés et les constantes de temps. En tant que circuits considérés, sont choisis les circuits électriques dans lesquels le paramètre étudié est la tension aux bornes du condensateur.

---

**Автор:** *Алгазин Евгений Игоревич* – доктор технических наук, профессор кафедры «Электроника и электротехника», ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет», Новосибирск, Россия.