УДК 519.21
DOI: 10.17277/vestnik.2024.03.pp.438-445

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОБОБЩЕННОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭРЛАНГА ВТОРОГО ПОРЯДКА

И. С. Дегтярев, М. А. Перегудов, Р. Ю. Колмыков, А. С. Колмыкова

Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия» имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», romankolmykov@gmail.com; Воронеж, Россия

Ключевые слова: алгоритм; время перехода; интенсивности переходов; закон распределения Эрланга; полумарковский процесс.

Аннотация: Особенностью обобщенного закона распределения Эрланга является задание более чем одной интенсивности перехода между состояниями. Существующий способ вычисления интенсивностей переходов через среднее время имеет высокую точность при значительном времени вычисления, что не позволяет проводить расчеты в режиме реального времени. Дано описание альтернативного алгоритма нахождения интенсивностей перехода между состояниями полумарковской цепи по заданному среднему времени. В результате применения предлагаемого алгоритма получен прирост производительности в несколько раз по сравнению с существующим, при этом скорость работы практически не зависит от заданной точности вычислений. Данный алгоритм может применяться и в других задачах, использующих полумарковские цепи, где вместо интенсивностей перехода задаются средние времена.

Введение

Для моделирования входящего потока заявок в задачах телекоммуникации, а также при решении транспортных задач в основном применяется обобщенный закон распределения Эрланга, поскольку при его использовании теоретические результаты хорошо согласуются с эмпирическими [1 – 3]. Ряд авторов утверждает, что с помощью обобщенного закона Эрланга можно аппроксимировать практически любое распределение случайной величины [4, 5]. Данный закон распределения используется в полумарковских цепях, где переходы между состояниями подчиняются непоказательному закону распределения. Такие цепи используются, например, при моделировании радиосвязи [6], а также в модели функционирования информационно-технического средства (**ИТС**), приведенной в [7]. Решение полумарковской цепи осуществляется путем приведения ее к марковской [8] и дальнейшего решения системы уравнений Колмогорова. При этом необходимо знать интенсивности переходов между состояниями для закона распределения (*далее* – интенсивности переходов). Однако существует ряд задач, в которых вместо интенсивностей даны средние времена перехода между состояниями полумарковской цепи (*далее* – средние времена перехода) [7, 9]. С учетом этого решение полумарковской осуществляется в три этапа: нахождение интенсивностей переходов по заданным средним временам; преобразование полумарковской цепи в марковскую, используя полученные интенсивности переходов; решение системы уравнений Колмогорова для полученной марковской цепи. Данный алгоритм реализован в программном комплексе оценки соотношения сил противоборствующих формирований при планировании общевойскового боя «Стронций» для моделирования функционирования ИТС [10]. Одно из требований, предъявляемых в процессе разработки к комплексу – возможность проводить моделирование в режиме времени, близком к реальному. Для этого необходимо провести оптимизацию всех модулей программного комплекса. При этом одним из узких мест является модуль определения интенсивностей переходов. Нахождение интенсивностей осуществляется численно, путем их перебора в целях определения максимума плотности обобщенного закона распределения для заданного среднего времени. При увеличении точности определения интенсивностей повышается длительность такого преобразования. При этом для требуемой точности комплекс не способен моделировать в режиме реального времени. Поэтому требуется получить аналитическое решение задачи определения интенсивностей переходов обобщенного закона распределения Эрланга второго порядка (**ОЗРЭ ВП**) по известному среднему времени перехода.

Цель работы – разработка алгоритма определения интенсивностей перехода ОЗРЭ ВП по известному среднему времени перехода с минимизацией количества решаемых уравнений численными методами.

Разработка алгоритма определения параметров обобщенного закона распределения Эрланга второго порядка

Существующий алгоритм поиска интенсивностей перехода по заданному среднему времени перехода, используемый в моделирующем комплексе [10], основан на следующем принципе: среднее время перехода будет достигнуто в максимуме плотности распределения ОЗРЭ ВП с искомыми интенсивностями перехода. При этом существующий алгоритм заключается в осуществлении перебора всех значений интенсивностей в заданном диапазоне с заданным шагом. Для каждой пары значений интенсивностей перехода численно находится максимум плотности вероятности. Затем выбирают пару значений с наибольшей плотностью вероятности, соответствующую заданному среднему времени. Блок-схема существующего алгоритма приведена на рис. 1.

Шаг 1. Задают исходные данные.

В качестве исходных данных выступают: $[\lambda_1^{\min}, \lambda_1^{\max}]$, $[\lambda_2^{\min}, \lambda_2^{\max}]$ – интервалы подбора значений первой и второй интенсивности соответственно; λ_1^{step}, λ_2^{step} – шаги подбора значений первой и второй интенсивности соответственно; $[t_{\min}, t_{\max}]$ – временной интервал; t_{step}, t_{ε} – шаг и погрешность подбора по времени соответственно; t_{avg} – среднее время перехода.

Шаг 2. Выбирают значения для интенсивностей перехода ОЗРЭВП из заданного интервала.

Шаг 3. Определяют максимальное значение плотности вероятности E_i для выбранных на предыдущем шаге значений интенсивностей переходов λ_1^i, λ_2^i перебором значений времени из заданного интервала с использованием аналитического выражения

$$E(t, \lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_1 \lambda_2 \frac{\mathrm{e}^{-t\lambda_1} - \mathrm{e}^{-t\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (1)$$

Если полученное значение плотности вероятности является наибольшим среди всех предыдущих, то переходят к шагу 4, в противном случае – продолжают перебор значений интенсивностей переходов.

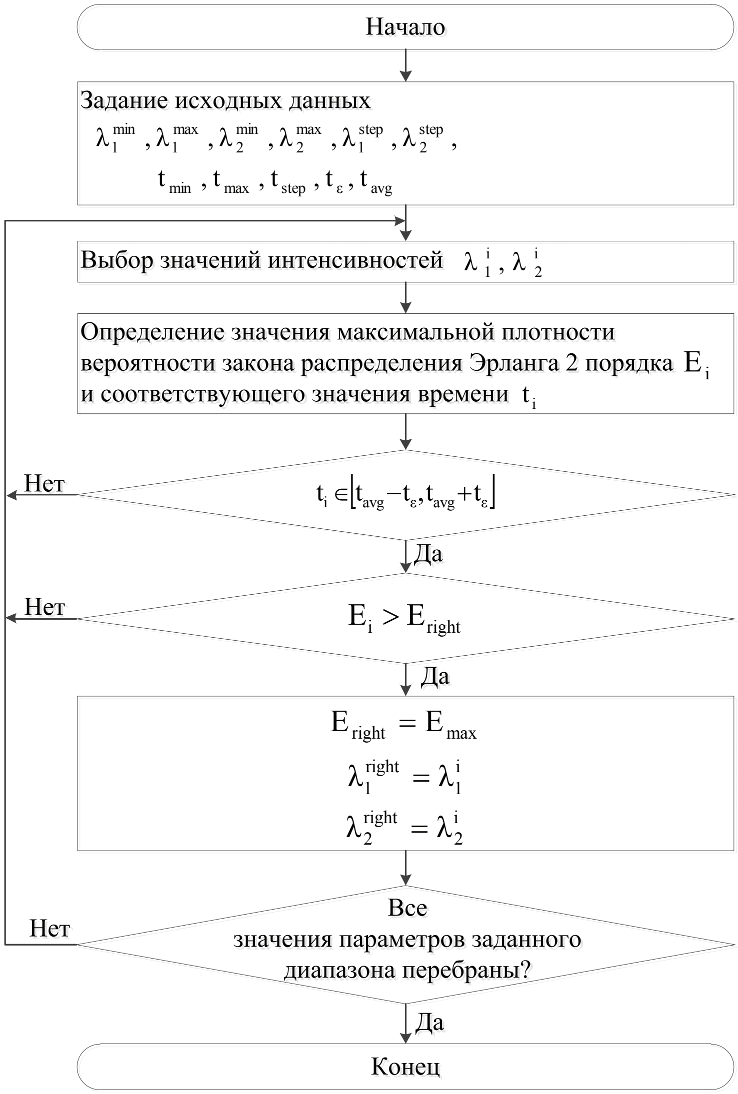

Рис. 1. Известный алгоритм поиска интенсивностей переходов между состояниями полумарковской цепи по заданному среднему времени перехода

Шаг 4. Запоминают наибольшее значение максимума плотности вероятности и соответствующие ему значения интенсивностей переходов.

Если все значения интенсивностей переходов из заданного интервала рассмотрены, то перебор завершается, в противном случае – продолжают перебор значений интенсивностей переходов между состояниями.

Для увеличения точности выборки параметров необходимо уменьшать шаг подбора параметров, что приводит к увеличению количества итераций. С увеличением количества итераций возрастает расчетное время. Как следствие, недостатком данного алгоритма является большое время работы. При попытке ускорить алгоритм (увеличить шаг подбора) – теряется точность.

Для *предлагаемого алгоритма* плотность вероятности ОЗРЭ ВП определяется также выражением (1) [4], после чего при определении максимального значения плотности вероятности закона распределения Эрланга второго порядка необходимо найти производную, приравнять ее нулю и решить полученное уравнение относительно времени

$$\frac{\partial E(t,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial t}=0. \tag{2}$$

Рассмотрим решение пошагово. Вычислим производную по времени от плотности вероятности закона распределения

$$\frac{\partial E(t,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\lambda_1\lambda_2\frac{e^{-t\lambda_1}-e^{-t\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)=\frac{-\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t\lambda_1}-e^{-t\lambda_2}\right)=$$

$$=\frac{-\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t\lambda_1}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t\lambda_2}\right)\right)=\frac{-\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(-\lambda_1 e^{-t\lambda_1}+\lambda_2 e^{-t\lambda_2}\right);$$

$$\frac{\partial E(t,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial t}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1 e^{-t\lambda_1}-\lambda_2 e^{-t\lambda_2}\right). \tag{3}$$

Уравнение (2) с учетом (3) примет вид

$$\lambda_1 e^{-t\lambda_1}=\lambda_2 e^{-t\lambda_2}. \tag{4}$$

Подставим в уравнение (4) известное значение среднего времени перехода между состояниями t_d^* и получим:

$$\lambda_1 e^{-t_d^*\lambda_1}=\lambda_2 e^{-t_d^*\lambda_2}. \tag{5}$$

Затем умножим обе части уравнения (5) на $-t_d^*$ и воспользуемся W-функцией Ламберта [11], обладающей свойством $W(xe^x)=x$:

$$-t_d^*\lambda_1 e^{-t_d^*\lambda_1}=-t_d^*\lambda_2 e^{-t_d^*\lambda_2};$$

$$W\left(-t_d^*\lambda_1 e^{-t_d^*\lambda_1}\right)=W\left(-t_d^*\lambda_2 e^{-t_d^*\lambda_2}\right);$$

$$W\left(-t_d^*\lambda_1 e^{-t_d^*\lambda_1}\right)=-t_d^*\lambda_2;$$

$$\lambda_2=-\frac{1}{t_d^*}W\left(-t_d^*\lambda_1 e^{-t_d^*\lambda_1}\right). \tag{6}$$

Подставим (6) в (1) и получим выражение максимального значения плотности вероятности ОЗРЭВП в виде функции одной переменной

$$E_0(\lambda_1)=\frac{\lambda_1}{t_d^*}W\left(-\lambda_1 t_d^* e^{-\lambda_1 t_d^*}\right)\frac{e^{-t_d^*\lambda_1}-e^{W(-\lambda_1 t_d^* e^{-\lambda_1 t_d^*})}}{\lambda_1+\frac{1}{t_d^*}W\left(-\lambda_1 t_d^* e^{-\lambda_1 t_d^*}\right)}. \tag{7}$$

Найдем значение интенсивности перехода λ_1, при котором функция (7) достигает максимума. Для этого решим уравнение (8) относительно λ_1

$$\frac{\partial E_0(\lambda_1)}{\partial \lambda_1} = 0, \tag{8}$$

в котором производная имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_0(\lambda_1)}{\partial \lambda_1} = {} & \frac{W\left(-\lambda_1 t_d^* \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*}\right)}{t_d^*\left(\lambda_1 + \frac{1}{t_d^*} W\left(-\lambda_1 t_d^* \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*}\right)\right)} \times \\
& \times \left[\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*} - \mathrm{e}^{W(-\lambda_1 t_d^* \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*})}\right) \times \left(1 - \frac{1}{\lambda_1 t_d^* \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*}\left(W\left(-\lambda_1 t_d^* \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*}\right) + 1\right)}\right) + \right. \\
& + \lambda_1 \left(-t_d^* \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*} + \frac{\mathrm{e}^{W(-\lambda_1 t_d^* \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*})}}{\lambda_1 t_d^* \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*}} \frac{W\left(-\lambda_1 t_d^* \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*}\right)}{W\left(-\lambda_1 t_d^* \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*}\right) + 1}\right) - \\
& - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \frac{1}{t_d^*} W\left(-\lambda_1 t_d^* \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*}\right)} \left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*} - \mathrm{e}^{W(-\lambda_1 t_d^* \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*})}\right) \times \\
& \left. \times \left(1 - \frac{W\left(-\lambda_1 t_d^* \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*}\right)}{\lambda_1 t_d^{*2} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*}\left(W\left(-\lambda_1 t_d^* \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_d^*}\right) + 1\right)}\right)\right].
\end{aligned} \tag{9}$$

Решим (8) относительно λ_1 любым известным численным методом, например, методом половинного деления [12], и получим искомое значение λ_1. При этом численно решается только одно уравнение, в отличие от существующего алгоритма.

С учетом полученных аналитических выражений алгоритм определения интенсивностей переходов ОЗРЭ ВП для заданного среднего времени перехода между состояниями представим в виде последовательности действий (рис. 2).

Шаг 1. Задают исходные данные. В качестве исходных данных выступает среднее время перехода между состояниями t_d^*.

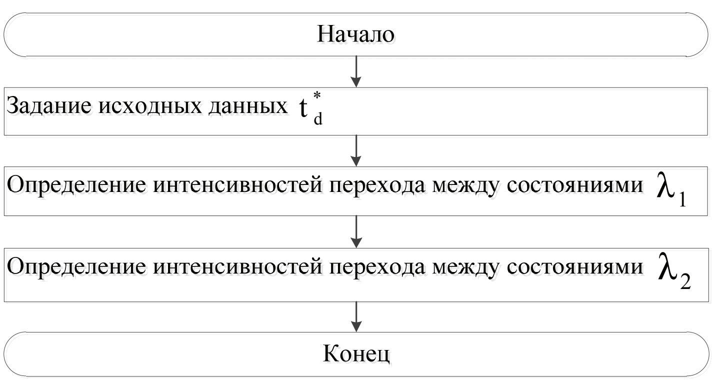

Рис. 2. Блок-схема предлагаемого алгоритма

Шаг 2. Определяют интенсивность переходов между состояниями λ_1 путем решения уравнения (8) известным численным методом.

Шаг 3. Определяют интенсивность переходов между состояниями λ_2 с использованием выражения (6).

Предложенный алгоритм реализован в программном комплексе оценки эффективности организационно-технических систем в условиях антагонистического конфликта «Стронций» [10].

При вычислении одной пары параметров с помощью существующего алгоритма с точностью 10^{-5} в однопоточном режиме работы процессора понадобилось 3 мин 42 с, а в многопоточном режиме – 51 с. Предлагаемый алгоритм справляется с задачей за 2 мс, что дает прирост производительности против многопоточного режима в 25 500 раз и в 100 000 раз – против однопоточного режима.

Заключение

Таким образом, разработан новый алгоритм определения параметров обобщенного закона распределения Эрланга второго порядка с применением методов дифференциального исчисления. В *отличие* от существующего алгоритма в предлагаемом алгоритме для поиска параметров ОЗРЭ ВП решается численными методами не множество уравнений, определяемых количеством пар задаваемых интенсивностей, а только одно, что позволило осуществлять расчеты в режиме реального времени. Заложенный подход к определению параметров ОЗРЭ ВП может быть реализован и при определении параметров обобщенного закона Эрланга третьего и вышестоящего порядков.

Список литературы

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / А. В. Гасников, С. Л. Кленов, Е. А. Нурминский [и др.] ; под ред. А. В. Гасникова. – М. : МФТИ, 2010. – 362 с.

2. Наумова, Н. А. Метод определения функции транспортных затрат в узловых точках сети / Н. А. Наумова // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 8 (часть 4). – С. 853 – 857.

3. Naumova, N. A. Problems of Optimisation of Flows Distribution in the Network / N. A. Naumova // Applied Mathematics. – 2013. – Vol. 3, No. 1. – P. 12 – 19. doi: 10.5923/j.am.20130301.02.

4. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учеб. пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высш. шк., 2000. – 383 с.

5. Cox, D. R. Queues / D. R. Cox, W. L. Smith. – London: Methuen, 1961, 200 p.

6. Чикин, М. Г. Особенности использования аппарата полумарковских процессов для моделирования направлений радиосвязи в интересах оценки эффективности радио подавления / М. Г. Чикин // Радиотехника. – 2005. – № 9. – С. 97 – 101.

7. Бойко, А. А. Способ стратифицированного аналитического описания процесса функционирования информационно-технических средств / А. А. Бойко // Информационные технологии. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 35 – 42.

8. Чикин, М. Г. Метод аналитического описания процессов с дискретным множеством состояний и непоказательными распределениями времен переходов / М. Г. Чикин // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2004. – № 5. – С. 8 – 11.

9. Бойко, А. А. Способ аналитического моделирования процесса распространения вирусов в компьютерных сетях различной структуры / А. А. Бойко // Труды СПИИРАН. – 2015. – № 5(42). – С. 196 – 211.

10. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ №2017660088. Программный комплекс оценки эффективности организационно-технических систем в условиях антагонистического конфликта «Стронций» / А. А. Бойко, И. С. Дегтя-

рев ; правообладатели Бойко А. А., Дегтярев И. С.; заявл. 06.10.2017 ; опубл. 21.11.2017.

11. Дубинов, А. Е. W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики / А. Е. Дубинов, И. Д. Дубинова, С. К. Сайков. – Саров : РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. – 161 с.

12. Корзунина, В. В. Лабораторный практикум по численным методам / В. В. Корзунина, З. А. Шабунина. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 35 с.

An Algorithm for Measuring the Parameters of the Generalized Second-Order Erlang Distribution Law

I. S. Degtyarev, M. A. Peregudov, R. Yu. Kolmykov, A. S. Kolmykova

Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin Air Force Academy, romankolmykov@gmail.com, Voronezh, Russia

Keywords: algorithm; transition time; transition intensity; Erlang distribution law; semi-Markov process.

Abstract: A feature of the generalized Erlang distribution law is the specification of more than one transition intensity between states. The existing method for calculating transition intensities through average time has high accuracy with a significant calculation time, which does not allow real-time calculations. A description of an alternative algorithm for finding transition intensities between states of a semi-Markov chain by a given average time is given. As a result of applying the proposed algorithm, a performance increase of several times was obtained compared to the existing one, while the speed of operation is practically independent of the specified accuracy of calculations. This algorithm can also be used in other problems using semi-Markov chains, where average times are specified instead of transition intensities.

References

1. Gasnikov A.V., Klenov S.L, Nurminsky E.A. *Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnyh potokov* [Introduction to mathematical modeling of traffic flows], Moscow: MIPT, 2010, 362 p. (In Russ.)

2. Naumova N.A. [Method of determining the function of transport costs at the nodal points of the network], *Fundamental'nye issledovaniya* [Fundamental research], 2013, no. 8 (part 4), pp. 853-857. (In Russ., abstract in Eng.)

3. Naumova N.A. Problems of Optimisation of Flows Distribution in the Network, *Applied Mathematics*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 12-19. doi: 10.5923/j.am.20130301.02

4. Ventcel E.S., Ovcharov L.A. *Teoriya sluchajnyh processov i ee inzhenernye prilozheniya* [Theory of random processes and its engineering applications], Moscow: Vysshaya shkola, 2000, 383 p. (In Russ.)

5. Cox D.R. Smith W.L. *Queues*. – London: Methuen, 1961, 200 p.

6. Chikin M.G. [Features of using the apparatus of semi-Markov processes for modeling radio communication directions in the interests of evaluating the effectiveness of radio suppression], *Radiotekhnika* [Radio Engineering], 2005, no. 9, pp. 97-101. (In Russ., abstract in Eng.)

7. Boyko A.A. [Method of stratified analytical description of the process of functioning of information technology tools], *Informatsionnyye tekhnologii* [Information technologies], 2015, vol. 21, no. 1, pp. 35-42. (In Russ., abstract in Eng.)

8. Chikin M.G. [Method of analytical description of processes with a discrete set of states and non-indicative distributions of transition times], *Informacionno-izmeritel'nye i upravlyayushchie sistemy* [Information-measuring and control systems], 2004, no. 5, pp. 8-11. (In Russ., abstract in Eng.)

9. Boyko A.A. [Method of analytical modeling of the process of virus propagation in computer networks of various structures], *Trudy SPIIRAN* [Proceedings of SPIIRAN], 2015, no. 5(42), pp. 196-211. (In Russ., abstract in Eng.)

10. Boyko A.A., Degtyarev I.S. Certificate of registration of the computer program No. 2017660088. *Programmnyj kompleks ocenki effektivnosti organizacionno-tekhnicheskih sistem v usloviyah antagonisticheskogo konflikta "Stroncij"* [The software package for evaluating the effectiveness of organizational and technical systems in the conditions of an antagonistic conflict "Strontium"], published 21.11.2017. (In Russ.)

11. Dubinov A.E., Dubinova I.D., Saikov S.K. *W-funkciya Lamberta i ee primenenie v matematicheskih zadachah fiziki* [Lambert's W-function and its application in mathematical problems of physics], Sarov: RFNC-VNIIEF, 2006, 161 p. (In Russ.)

12. Korzunina V.V., Shabunina Z.A. *Laboratornyj praktikum po chislennym metodam* [Laboratory workshop on numerical methods], Voronezh: CPI of VSU, 2011, 35 p. (In Russ.)

Algorithmus zur Bestimmung der Parameter des verallgemeinerten Erlang-Verteilungsgesetzes zweiter Ordnung

Zusammenfassung: Die Besonderheit des verallgemeinerten Erlang-Verteilungsgesetzes ist die Zuordnung von mehr als einer Übergangsintensität zwischen Zuständen. Die bestehende Methode zur Berechnung der Übergangsintensitäten über die mittlere Zeit hat eine hohe Genauigkeit bei einer erheblichen Berechnungszeit, die keine Echtzeitberechnungen ermöglicht. Es ist ein alternativer Algorithmus zur Ermittlung der Übergangsintensitäten zwischen den Zuständen der Semi-Markov-Kette über eine bestimmte mittlere Zeit beschrieben. Durch die Anwendung des vorgeschlagenen Algorithmus war die Produktivitätssteigerung um ein Vielfaches gegenüber der bestehenden erzielt, wobei die Arbeitsgeschwindigkeit praktisch nicht von der gegebenen Genauigkeit der Berechnungen abhängt. Dieser Algorithmus kann auch bei anderen Problemen mit Semi-Markov-Ketten angewandt werden, bei denen anstelle der Übergangsintensitäten die mittleren Zeiten festgelegt werden.

Algorithme pour déterminer les paramètres de la loi de distribution généralisée d'erlang du second ordre

Résumé: Une des caractéristiques de la loi de distribution généralisée d'Erlang est de spécifier plus d'une intensité de transition entre les états. La méthode actuelle de calcul des intensités de transition dans le temps moyen est très précise pour un temps de calcul important, ce qui ne permet pas de réaliser des calculs en temps réel. Un algorithme alternatif est décrit pour trouver les intensités de transition entre les stations d'une chaîne semi-markovien sur un temps moyen donné. A l'issue de l'application de l'algorithme proposé, sont obtenus des gains de performance plus importants par rapport à l'algorithme existant, tandis que la vitesse de travail est pratiquement indépendante de la précision des calculs. Cet algorithme peut également être utilisé dans d'autres problèmes utilisant des chaînes semi-markoviens, où les temps moyens sont donnés au lieu des intensités de transition.

Авторы: ***Дегтярев Иван Сергеевич*** – научный сотрудник; ***Перегудов Максим Анатольевич*** – кандидат технических наук, ***Колмыков Роман Юрьевич*** – адъюнкт; ***Колмыкова Анастасия Сергеевна*** – младший научный сотрудник, Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия» имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж, Россия.