УДК 517.518
DOI: 10.17277/vestnik.2023.03.pp.485-496

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ В ПРИЛОЖЕНИЯХ К ЗАДАЧАМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

А. Д. Нахман

*Кафедра «Высшая математика», alextmb@mail.ru;
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», Тамбов, Россия*

Ключевые слова: краевая задача; кусочно-выпуклые суммирующие последовательности; равносходимость.

Аннотация: Исследуются возникающие в решении задачи тепломассопереноса вопросы суммируемости тригонометрических рядов по системе $\left\{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x;\ k=1,2,...\right\}$. Установлена, в частности, экспоненциальная суммируемость разложений Фурье функций $f \in L^p$, $p \ge 1$, почти всюду, в точках непрерывности, а также в метрике соответствующего функционального пространства.

Задача о суммировании ортогональных рядов экспоненциальными методами была поставлена Б. П. Осиленкером в 1980-х годах прошлого века и прозвучала, в частности, на семинаре по теории функций в МГУ им. Ломоносова. Тогда же получены первые результаты в этом направлении, которые в 2013 – 2017 гг. были существенно обобщены авторами работ [1, 2]. Интерес к случаю экспоненциальных методов суммирования во многом обусловлен так называемым представлением Дирихле полугруппы операторов (в лебеговых пространствах), коммутирующих со сдвигами. Важен и другой прикладной аспект: семейство экспоненциальных средних в частных случаях порождает универсальную математическую модель процессов тепломассопереноса (теплопроводность в конечном стержне, процесс диффузии в конечной полой трубке, стационарное распределение тепла в полуплоскости). Так, в работе [3] предложена в терминах указанных средних математическая модель процесса сушки растительных материалов. Как оказывается, подобное моделирование может быть распространено и на процессы экстракции, чему авторы статьи [3] намерены посвятить отдельную работу. В настоящей статье представлен собственно математический аспект этого и других физических процессов.

1. Математическая модель процесса тепломассоопереноса

1.1. Постановка задачи. Вышеупомянутые процессы (при некоторых условиях, перечисленных ниже) могут быть формализованы следующим образом: подлежит отысканию решение

$$u = u(x,t),\ \ 0 \le x \le l,\ t > 0$$

краевой задачи

$$u'_t = a^2 u''_{xx} + F(x,t); \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = \mu(t); \tag{1.2}$$

$$u'_x(l,t) = 0; \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{1.4}$$

Здесь параметр $l > 0$, а функции $\mu = \mu(t)$, $\varphi = \varphi(x)$, $F(x,t)$ заданы, причем каждая из них интегрируема (по Лебегу) на соответствующей области задания.

Обращаясь к физическому смыслу соотношений (1.1) – (1.4), укажем, например, задачу теплопроводности в стержне конечной длины l с постоянным коэффициентом температуропроводности a^2. В уравнении (1.1) тогда $u = u(x,t)$ – температура в точке стержня с абсциссой x в момент времени t; то есть рассматривается одномерное температурное поле в прямом изотропном и однородном стержне постоянного сечения с теплоизолированной боковой поверхностью, когда тепловое воздействие осуществляется через его торцы. Внутри стержня могут существовать источники или поглотители тепла с плотностью $F(x,t)$ в точке с координатой x в момент времени t.

Условия (1.2), (1.3) характеризуют температурный режим на границах: заданные температуру на левом конце и плотность теплового потока на правом конце.

Далее, функция $\varphi(x)$ определяет начальное распределение температур в точках стержня. В случае $\varphi(x)$, представимой суммой своего ряда Фурье, схема решения задачи (1.1) – (1.4) хорошо известна (см. напр., [4, с. 100 – 102]). Существенные трудности возникают, если вопрос о сходимости ряда Фурье функции $\varphi(x)$ остается открытым. Рассмотрению этого случая посвящен параграф 3. В целях полноты изложения приведем решение задачи (1.1) – (1.4), осуществляя его в несколько этапов.

1.2. Первая редукция. Введем в рассмотрение разность

$$v(x,t) = u(x,t) - \mu(t). \tag{1.5}$$

Задача (1.1) – (1.4) тогда преобразуется к виду:

$$v'_t = a^2 v''_{xx} + F(x,t) - \mu'(t);$$

$$v(0,t) = 0;$$

$$v'_x(l,t) = 0;$$

$$v(x,0) = \varphi(x) - \mu(0).$$

1.3. Вторая редукция. Обозначим $G(x,t) = F(x,t) - \mu'(t)$ и положим

$$v(x,t) = P(x,t) + Q(x,t), \tag{1.6}$$

так, чтобы функции $P = P(x,t)$ и $Q = Q(x,t)$ были решениями, соответственно, стандартной задачи:

$$
\begin{cases}
P'_t = a^2 P''_{xx}\ ; \\
P(0,\, t) = 0\ ; \\
P'_x(l,\, t) = 0\ ; \\
P(x,\, 0) = \varphi(x) - \mu(0)
\end{cases}
\tag{1.7}
$$

с однородными краевыми условиям и задачи:

$$Q'_t = a^2 Q''_{xx} + G(x,t); \tag{1.8}$$

$$Q(0,t) = 0\ ; \tag{1.9}$$

$$Q'_x(l,t) = 0\ ; \tag{1.10}$$

$$Q(x,0) = 0\ . \tag{1.11}$$

Приведем схемы решений каждой из задач (1.7) и (1.8) – (1.11).

1.4. Решение задачи (1.7) конструируется по методу Фурье [4, с.90 – 94; 5, с. 154 – 155]. А именно, находим решение уравнения в виде $P(x,t) = X(x)Y(t)$. В результате разделения переменных получаем семейства функций вида:

$$X = X_n(x) = D_n \sin \lambda_n x\ ;$$

$$Y_n(t) = A_n \exp\left(-a^2 \lambda_n^2 t\right),$$

где $\lambda_n = \dfrac{\pi}{l}\left(n - \dfrac{1}{2}\right)$, $n = 1, 2, \ldots.$

Теперь в задаче (1.7) решение дифференциального уравнения с заданными краевыми условиями будут иметь следующий вид:

$$P_n(x,t) = b_n \exp\left(-a^2 \lambda_n^2 t\right) \sin \lambda_n x\ ;$$

при этом семейство коэффициентов

$$b_n = A_n D_n,\ \ n = 1, 2, \ldots$$

будет определено позднее.

Чтобы удовлетворить, наконец, начальному условию в (1.7), построим окончательное решение задачи в виде суммы ряда

$$P(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-a^2 \lambda_n^2 t\right) \sin \lambda_n x\ , \tag{1.12}$$

так что $P(x,0)$ должна совпасть с функцией $f(x) = \varphi(x) - \mu(0)$. Здесь потребуется известный факт ортонормированности на интервале $(0; l)$ системы функций (см., напр., [4, с. 52 – 57],)

$$\left\{ \sqrt{\frac{l}{2}} \sin \lambda_n x \right\},\ \ n = 1, 2, \ldots, \tag{1.13}$$

благодаря чему можно записать (оставляя пока в стороне вопросы сходимости) разложение

$$\varphi(x) - \mu(0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x\ . \tag{1.14}$$

Следовательно, члены последовательности $\{b_n\}$ в (1.14) необходимо должны быть коэффициентами Фурье функции $f(x) = \varphi(x) - \mu(0)$

$$b_n = b_n(f) = \frac{2}{l}\int_0^l (\varphi(\tau) - \mu(0))\sin\lambda_n\tau\, d\tau, \quad n = 1, 2, ...$$

1.5. Решение задачи (1.8) – (1.11). Поставим в соответствие искомой $Q(x, t)$ и заданной $G(x, t)$ их разложения по системе $\{\sin\lambda_n x\}$ (см. (1.13)):

$$Q(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\sin\lambda_n x\,; \tag{1.15}$$

$$G(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t)\sin\lambda_n x \tag{1.16}$$

с коэффициентами Фурье $q_n(t)$ и $\eta_n(t)$, зависящими от t. В результате формальной подстановки (1.15) и (1.16) в (1.8) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n'(t)\sin\lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-a^2\lambda_n^2 q_n(t) + \eta_n(t)\right)\sin\lambda_n x,$$

откуда

$$q_n'(t) + a^2\lambda_n^2 q_n(t) = \eta_n(t), \quad n = 1, 2, ... \tag{1.17}$$

Соотношение (1.17) – линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $q_n(t)$; при этом должно быть выполнено начальное условие (см. (1.11) и (1.15)) $q_n(0) = 0$. Решением полученной задачи Коши будет, как легко проверить, семейство функций

$$q_n(t) = \exp\left(-a^2\lambda_n^2 t\right)\int_0^t \exp\left(a^2\lambda_n^2\tau\right)\eta_n(\tau)d\tau, \quad n = 1, 2, ... \tag{1.18}$$

Теперь, согласно (1.15) и (1.18), будем иметь

$$Q(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp\left(-a^2\lambda_n^2 t\right)\int_0^t \exp\left(a^2\lambda_n^2\tau\right)\eta_n(\tau)d\tau\right]\sin\lambda_n x\,, \tag{1.19}$$

где, как указано выше (см. (1.16)),

$$\eta_n(\tau) = \frac{2}{l}\int_0^l G(z, \tau)\sin\lambda_n z dz\,.$$

1.6. Окончательный результат. Согласно (1.5), (1.6), (1.12) и (1.19) получаем решение задачи (1.1) – (1.4) в виде суммы следующего ряда:

$$u(x, t) = \mu(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-a^2\lambda_n^2 t\right)\sin\lambda_n x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp\left(-a^2\lambda_n^2 t\right)\int_0^t \exp\left(a^2\lambda_n^2\tau\right)\eta_n(\tau)d\tau\right]\sin\lambda_n x,$$

где коэффициенты λ_n, b_n, $\eta_n(\tau)$ определены выше.

2. Краевая задача с однородными граничными условия первого рода

2.1. Трансформация задачи (1.7). Если в задаче (1.1) – (1.4) граничное условие (1.3) второго рода заменить на условие первого рода $u(l,t)=0$, то в (1.7) соотношение $P'_x(l,t)=0$ преобразуется в $P(l,t)=0$. В этом случае (см. [4, с. 90 – 93]) разложение (1.14) будет заменено на

$$\varphi(x)-\mu(0)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin\frac{\pi}{l}nx,$$

где через $\beta_n=\beta_n(f)$ обозначены синус-коэффициенты Фурье функции $f(x)=\varphi(x)-\mu(0)$

$$\beta_n(f)=\frac{2}{l}\int_0^l(\varphi(\tau)-\mu(0))\sin(\frac{\pi}{l}n\tau)\,d\tau,\ \ n=1,2,...$$

Теперь аналог (1.12) принимает вид

$$P(x,t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(f)\exp\left(-a^2(\frac{\pi}{l}n)^2t\right)\sin\frac{\pi}{l}n\,x; \tag{2.1}$$

заметим, что решение (2.1) изучалось, в частности, в работе [3] в связи с математическим моделированием процессов сушки растительного сырья.

2.2. Уточнение начальных условий. Решение краевой задачи (1.7) на этапе реализации начального условия означало, что при $t=0$ сумма ряда (1.12) должна совпадать со значениями $f(x)=\varphi(x)-\mu(0)$. Однако при формальной подстановке $t=0$ в (1.12) нельзя гарантировать сходимость получаемого ряда Фурье, поэтому указанный факт совпадения следует понимать в более общем смысле

$$\lim_{t\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}b_n(f)\exp\left(-a^2\lambda_n^2t\right)\sin\lambda_nx=f(x); \tag{2.2}$$

условие (2.2) должно быть выполнено, например, почти всюду или в каждой точке непрерывности функции f. Точно также в задаче с граничным условием $P(l,t)=0$ начальное условие должно быть реализовано в виде

$$\lim_{t\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(f)\exp\left(-a^2\left(\frac{\pi}{l}n\right)^2t\right)\sin\frac{\pi}{l}n\,x=f(x). \tag{2.3}$$

Соотношения (2.2), (2.3) можно рассматривать как задачи о предельном поведении экспоненциальных средних разложений Фурье функции f по соответствующей системе синусов. К рассмотрению этих задач мы перейдем в следующем параграфе. При этом функцию f будем считать доопределенной на всей числовой оси нечетным $2l$-периодическим образом.

Далее, если

$$\|f\|=\frac{2}{l}\int_0^l|\varphi(x)-\mu(0)|\,dx\ ,$$

то, ввиду интегрируемости функции $\varphi(x)$, имеем, $\|f\|<\infty$. Теперь, очевидно, что

$$|b_n(f)| \le \| f \|, \ \ n = 1, 2, \ldots,$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| f \| \exp\left(-\left(\frac{\pi}{l} a\right)^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 t \right)$$

будет мажорантным для (1.12). Этот знакоположительный ряд, очевидно, является сходящимся при каждом $t > 0$, откуда и следует равномерная по x сходимость (1.12); см. также (2.2).

Точно так же устанавливается равномерная по x сходимость ряда, записанного под знаком предела в левой части (2.3).

3. Исследование поведения экспоненциальных средних разложений Фурье

3.1. Реализация условий (2.2), (2.3). В связи с (2.3) и (2.2) можно рассмотреть более общую задачу об исследовании поведения при $t \to +0$ семейств средних:

$$U_t^{\bullet}(f, x; \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(f) \nu_k(t) \sin \frac{\pi}{l} kx \tag{3.1}$$

и

$$U_t\ (f, x; \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) \nu_k(t) \sin \frac{\pi}{l}\left(k - \frac{1}{2}\right)x \tag{3.2}$$

рядов Фурье функции f по соответствующим системам синусов. Здесь $\{\nu_k(t)\}$ – так называемая суммирующая последовательность, для которой будем предполагать, что

$$\nu_k(0) = 1, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{3.3}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \ \nu_k(t) = 0, \ t > 0; \tag{3.4}$$

$$\lim_{t \to +0} \ \nu_k(t) = 1, \quad k = 1, 2, \ldots\ ; \tag{3.5}$$

$$\nu_k(t) \ln k = O_t(1), \ \ k = 2, 3, \ldots, \ \ t > 0\ . \tag{3.6}$$

В наших случаях (2.3) и (2.2) имеем в (3.1) и (3.2) соответственно,

$$\nu_k(t) = \exp\left(-\theta k^2 t\right), \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{3.7}$$

$$\nu_k(t) = \exp\left(-\theta\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 t \right), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

с $\theta = \left(\frac{\pi}{l} a\right)^2$, так что условия (3.3) – (3.6) для (3.7), (3.8), очевидно, выполнены.

Обе последовательности (3.7), (3.8) относятся к классу кусочно-выпуклых, что будет существенным для дальнейших рассуждений. Речь идет о сохранении знака вторых разностей

$$\Delta^2 \nu_k(t) = \Delta(\Delta \nu_k(t))\ , \ \text{где} \ \Delta \nu_k(t) = \nu_k(t) - \nu_{k+1}(t)\ ,$$

или о перемене его (знака) конечное число раз. В случае, например, (3.8) знаки $\Delta^2 \nu_k(t)$ определяются знаками второй производной (см. [1]) функции

$$E(y) = \exp\left(-\theta t\left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right).$$

Имеем

$$E''(y) = -\theta t\left(2 - \theta t(2y-1)^2\right)\exp\left(-\theta t\left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right),$$

так что $E''(y)$ меняет знак лишь в одной точке $y \geq 1$. Следовательно, последовательность (3.8) кусочно-выпукла, что и утверждалось.

В работах [1, 2] рассматривалось суммирование кусочно-выпуклыми методами рядов Фурье 2π-периодических функций по классической ортогональной тригонометрической системе

$$\left\{\frac{1}{2};\ \cos x,\ \sin x;\ \ldots;\ \cos kx,\ \sin kx;\ \ldots\right\}. \tag{3.9}$$

Заменяя в (3.9) x на $\dfrac{\pi}{l}x$ и ограничиваясь разложениями нечетных функций, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть L^p -класс суммируемых с p-й степенью ($p \geq 1$) на $(0, l)$ функций $f(x)$, продолженных на всю действительную ось нечетным $2l$-периодическим образом. Пусть также $\{\nu_k(t)\}$ – кусочно-выпуклая суммирующая последовательность, которая удовлетворяет ограничениям (3.3) – (3.6) .

Тогда соотношение

$$\lim_{t\to+0} U_t^{\bullet}(f, x; \nu) = f(x) \tag{3.10}$$

для всякой $f \in L^p$ имеет место почти всюду на $(0, l)$ и в метрике соответствующего функционального пространства. Равенство справедливо также в каждой точке непрерывности функции $f(x)$, а в каждой точке разрыва x_0 первого рода предел (3.10) равен значению $\dfrac{1}{2}\left(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right)$.

Аналогичный результат будет иметь место и в случае (3.8).

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда соотношение

$$\lim_{t\to+0} U_t\ (f, x; \nu) = f(x) \tag{3.11}$$

для всякой $f \in L^p$ имеет место почти всюду на $(0, l)$ и в метрике соответствующего функционального пространства, а также в каждой точке непрерывности функции $f(x)$.

Из результатов теорем 3.1 и 3.2, в частности, вытекает, что начальные условия (2.3) и (2.2) выполнены почти всюду и в каждой точке непрерывности функции $f(x)$.

Рассуждения, доказывающие теорему 3.1, содержатся в [1]. Приведем схему доказательства теоремы 3.2.

Основным этапом является представление средних (3.2) в виде оператора свертки с ядром типа Фейера [6, т. 1, с. 148]. В целях сокращения записей примем $l=\pi$. Согласно определению коэффициентов $b_k(f)$, интегральное ядро частичных сумм

$$s_n[f,x]=\sum_{k=1}^{n} b_k(f)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x,\quad n=1,2,\ldots, \tag{3.12}$$

ряда (1.14) преобразуется следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\tau=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)(x-\tau)-\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)(x+\tau)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}D_n(x-\tau)-\frac{1}{2}D_n(x+\tau), \tag{3.13}$$

где $D_n(\tau)=\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\tau$ – аналог классического ядра Дирихле [6. с. 86].

Далее

$$D_n(\tau)=\frac{1}{2\sin\frac{\tau}{2}}\sum_{k=1}^{n}(\sin k\tau-\sin(k-1)\tau)=\frac{\sin n\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}}. \tag{3.14}$$

В силу очевидной нечетности по переменной τ разности (3.13), ее произведение с $f(\tau)$ будет четным. Тогда интеграл этого произведения по $(0;\pi)$ можно заменить на половину интеграла по периоду, и частичные суммы (3.12) в силу (3.14) принимают вид

$$s_n[f,x]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\left(\frac{1}{2}D_n(x-\tau)-\frac{1}{2}D_n(x+\tau)\right)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x-\tau)-f(\tau-x)\big)D_n(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-\tau)\,D_n(\tau)\,d\tau= \tag{3.15}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\frac{\sin n\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}}d\tau,\quad n=1,2,\ldots$$

Представление (3.15) частичных сумм позволяет утверждать (см. [6, с. 113–114]), что $s_n[f,x]=o_x(\ln n)$ почти всюду, а тогда в силу (3.6) $s_n[f,x]\nu_n(t)\to 0$ при $n\to\infty$ для почти всех x. Теперь, благодаря преобразованию Абеля, получаем

$$U_t\,(f,x;\nu)=\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\Delta\nu_k(t)\,s_k[f,x]+s_N[f,x]\nu_N(t)\right)=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N-2}(k+1)\Delta^2\nu_k(t)\,\sigma_k[f,x]+N\Delta\nu_{N-1}(t)\sigma_{N-1}[f,x]\right). \tag{3.16}$$

Здесь

$$\sigma_k[f,x]=\frac{1}{k+1}\sum_{\mu=1}^{k}s_\mu[f,x],\quad k=1,2,...,$$

– средние Фейера ряда Фурье (1.14). Согласно (3.15), выполняя соответствующее суммирование, будем иметь

$$\sigma_k[f,x]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\tau)\,F_k(\tau)\,d\tau,\quad k=1,2,...,\tag{3.17}$$

где

$$F_k(\tau)=\frac{1}{k+1}\sum_{\mu=1}^{k}D_\mu(\tau)=\frac{1}{4(k+1)\sin^2\frac{\tau}{2}}\sum_{\mu=1}^{n}\left(\cos\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\tau-\cos\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\tau\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{k}{2}\tau\sin\frac{k+1}{2}\tau}{2(k+1)\sin^2\frac{\tau}{2}},\quad k=0,1,...\tag{3.18}$$

Интегральное ядро (3.18) обладает очевидными оценками

$$F_k(\tau)=O\left(\min\left\{k;\ \frac{1}{(k+1)\tau^2}\right\}\right),$$

а в этом случае, как хорошо известно (напр., [1]), соответствующий интегральный оператор (3.17) может быть оценен сверху максимальной функцией Харди–Литтлвуда

$$f^*(x)=\sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}|f(\tau)|\,d\tau$$

равномерно по k; см. напр. [1; 6, т. 1, с. 151]. Если учесть, что кусочно-выпуклая последовательность $\{\nu_k(t)\}$ обладает свойствами (см. [1, 2])

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\,|\,\Delta^2\nu_k(t)\,|=O(1)\ \text{ и }\ N\Delta\nu_N(t)\to 0\ \text{ при }\ N\to\infty,$$

то из (3.16) вытекает, что эта же оценка справедлива для $|U_t(f,x;\nu)|$

$$U_t(f,x;\nu)=O(f^*(x))\tag{3.19}$$

равномерно по t. Утверждение (3.11) теоремы 3.2 вытекает тогда из (3.19) стандартным образом (см. [1; 6, т. 2, с. 464–465]).

3.3. Вопросы равносходимости. Речь пойдет о равносходимости разложений Фурье нечетных $2l$-периодических функций по классической системе синусов (см. (3.9)) и системе (1.13). А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3. Для всякой суммируемой на $(0;l)$ нечетной $2l$-периодической функции $f(x)$ почти в каждой точке x имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left(s_n[f,x]-s_n^\bullet[f,x]\right)=0,$$

в котором $s_n[f, x]$ – последовательность частичных сумм ряда Фурье по системе $\{\sin\lambda_n x\}$, а $s_n^{\bullet}[f, x]$ – последовательность частичных сумм ряда Фурье по системе $\left\{\sin\frac{\pi}{l}nx\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $l = \pi$. Сумма $s_n[f, x]$ выше представлена в интегральной форме (3.15). Далее

$$s_n^{\bullet}[f, x] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\, D_n^{\bullet}(\tau)\, d\tau, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{3.20}$$

Здесь

$$D_n^{\bullet}(\tau) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau}{2\sin\frac{1}{2}\tau}$$

– классическое Дирихле [6, т. 1, с. 86].

Наряду с (3.20) рассмотрим последовательность

$$s_n^{\bullet\bullet}[f, x] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\, D_n^{\bullet\bullet}(\tau)\, d\tau,$$

где

$$D_n^{\bullet\bullet}(t) = \frac{\sin n\tau}{2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\tau}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

– модифицированное ядро Дирихле.

Как показано в [6, т. 1, с.80, 87], для всякой рассматриваемой $f(x)$ разность $s_n^{\bullet}[f, x] - s_n^{\bullet\bullet}[f, x]$ при $n \to \infty$ равномерно по x стремится к нулю. С другой стороны,

$$D_n(\tau) - D_n^{\bullet\bullet}(\tau) = \frac{1}{2}\sin n\tau\left(\frac{1}{\sin\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\tau}{2}}\right) = \frac{1}{2}\sin n\tau\,\mathrm{tg}\frac{\tau}{4},$$

так что в силу (3.15)

$$s_n[f, x] - s_n^{\bullet\bullet}[f, x] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\sin n\tau\,\mathrm{tg}\frac{\tau}{4}\, d\tau\ . \tag{3.21}$$

В правой части (3.21) записаны коэффициенты Фурье функции $\psi_x(\tau) = \frac{1}{2}f(x+\tau)\,\mathrm{tg}\frac{\tau}{4}$, суммируемой на $(-\pi; \pi)$ и продолженной на всю ось 2π-периодическим образом; как хорошо известно [6, т. 1, с. 80], такие коэффициенты стремятся к нулю (в нашем случае – при почти каждом x), если $n \to \infty$. Остается заметить, что

$$s_n[f, x] - s_n^{\bullet}[f, x] = (s_n[f, x] - s_n^{\bullet\bullet}[f, x]) - (s_n^{\bullet}[f, x] - s_n^{\bullet\bullet}[f, x]),$$

откуда теперь и вытекает утверждение теоремы 3.3.

Список литературы

1. Нахман, А. Д. Экспоненциальные методы суммирования рядов Фурье / А. Д. Нахман, Б. П.Осиленкер // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 101 – 109.
2. Nakhman, A. D. Nontangential Summability of Fourier Series / A. D. Nakhman, B. P. Osilenker // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2021. – Vol. 357. – P. 447 – 462.
3. Nakhman, A. D. Generalized Solution of the Heat and Mass Transfer Problem / A. D. Nakhman, Yu. V. Rodionov // Advanced Materials & Technologies. – 2017. – No. 4. – P. 56 – 63. doi: 10.17277/amt.2017.04.pp.056-063
4. Куликов, Г. М. Метод Фурье в уравнениях математической физики / Г. М. Куликов, А. Д. Нахман. – М. : Машиностроение, 2000. – 156 с.
5. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М. : Наука, 1969. – 288 с.
6. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : в 2-х томах / А. Зигмунд ; пер. с англ. – М. : Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с. ; Т. 2. – 537 с.

Exponential Summation of Fourier Series in Applications to Heat and Mass Transfer Problems

A. D. Nakhman

Department of Higher Mathematics, alextmb@mail.ru; TSTU, Tambov, Russia

Keywords: boundary value problem; piecewise-convex summing sequences; equiconvergence.

Abstract: The paper investigates the questions of summation of trigonometric series in the $\left\{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x;\ k=1, 2, ...\right\}$ system when solving the problem of heat and mass transfer. In particular, the exponential summation of Fourier expansions of functions $f \in L^p$, $p \geq 1$ has been found almost everywhere, at points of continuity, as well as in the metric of the corresponding function space.

References

1. Nakhman A.D., Osilenker B.P. [Exponential summation methods for Fourier series], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 101-109. (In Russ., abstract in Eng.)
2. Nakhman A.D., Osilenker B.P. Nontangential Summability of Fourier Series, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2021, vol. 357, pp. 447-462.
3. Nakhman A.D., Rodionov Yu.V. Generalized Solution of the Heat and Mass Transfer Problem, *Advanced Materials & Technologies*, 2017, no. 4, pp. 56-63, doi: 10.17277/amt.2017.04.pp.056-063 (In Eng., abstract in Russ.)
4. Kulikov G.M., Nakhman A.D. *Metod Fur'ye v uravneniyakh matematicheskoy fiziki* [Fourier method in equations of mathematical physics], Moscow: Mashinostroyeniye, 2000, 156 p.
5. Aramanovich I.G., Levin V.I. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics], Moscow: Nauka, 1969, 288 p.
6. Zygmund A. *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959.

Exponentielle Summierung von Fourier-Reihen in Anwendungen zu den Aufgaben des Wärme- und Stofftransfers

Zusammenfassung: Es werden die Fragen der Summierbarkeit trigonometrischer Reihen im System $\left\{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x;\ k=1,2,...\right\}$ untersucht, die sich bei der Lösung des Problems der Wärme- und Stoffübertragung entstehen. Insbesondere ist die exponentielle Summierbarkeit von Fourier-Entwicklungen von Funktionen $f\in L^p$, $p\geq 1$ fast überall an Kontinuitätspunkten sowie in der Metrik des entsprechenden Funktionsraums festgestellt.

Sommation exponentielle des séries de Fourier dans les applications aux problèmes de transfert de chaleur et de masse

Résumé: Sont étudiés les problèmes de sommabilité des séries trigonométriques dans le système $\left\{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x;\ k=1,2,...\right\}$ qui se posent dans la résolution du problème du transfert de chaleur et de masse. En particulier, est établie la sommabilité exponentielle des expansions de Fourier des fonctions $f\in L^p$, $p\geq 1$ presque partout, aux points de continuité, ainsi que dans la métrique de la continuité fonctionnelle correspondante.

Автор: ***Нахман Александр Давидович*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», ФГБОУ ВО «ТГТУ», Тамбов, Россия.