УДК 517.518
DOI: 10.17277/vestnik.2022.04.pp.644-661

ДВА КЛАССА ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ В ВЕСОВЫХ ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Б. П. Осиленкер, А. Д. Нахман

Кафедра «Высшая математика», alextmb@mail.ru;
ФГБОУ ВО «ТГТУ», Тамбов, Россия

Ключевые слова: аппроксимативные единицы; максимальные оценки; операторы свертки; средние рядов Фурье и сопряженных рядов.

Аннотация: Рассмотрены два класса операторов свертки, порожденных функциями из весовых лебеговых пространств. В терминах условий на коэффициенты Фурье семейств интегральных ядер установлены максимальные оценки весовых L^p-норм операторов свертки сильного ($p>1$) и слабого ($p \ge 1$) типа. Предложены теоремы сходимости; построены аппроксимативные единицы в соответствующей *-алгебре. Полученные результаты перенесены на семейства линейных средних рядов Фурье и сопряженных рядов. Рассмотрены, в частности, экспоненциальные методы суммирования и их приложения к обобщенным дробным интегралам.

1. Обозначения. Семейства средних ряда Фурье и сопряженного ряда

Пусть $L_\nu^p = L_\nu^p(Q)$ – класс измеримых на $Q=(-\pi,\pi]$ 2π-периодических функций f, таких что

$$\| f \|_{\nu,p} = \left(\int_Q | f(x) |^p \; \nu(x) dx \right)^{1/p} < \infty , \quad p \ge 1 .$$

Здесь весовая функция $\nu = \nu(x) \ge 0$ также измерима на $Q=(-\pi,\pi]$ и 2π-периодична; в случае $\nu \equiv 1$ имеем классические лебеговы пространства $L^p = L^p(Q)$; $L = L^1(Q)$. Положим

$$A_p(\nu; I) = \left(\frac{1}{|I|} \int_I \nu(t) dt \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I \nu^{-1/(p-1)}(t) dt \right)^{p-1} , \quad p \ge 1 ,$$

где I – произвольный интервал, а множитель $\left(\int_I \nu^{-1/(p-1)}(t) dt \right)^{p-1}$ считается по определению равным $\operatorname*{esssup}_{t \in I} \dfrac{1}{\nu(t)}$ при $p=1$.

Говорят, что выполнено A_p-условие Розенблюма–Макенхоупта [1, 2] и применяют обозначение $\nu \in A_p$, если $\sup\limits_I A_p(\nu; I) < \infty$, $p \geq 1$. В настоящей работе, как и в [2], полагаем, что $0 \cdot \infty = 0$. Тогда (см. [2])

$$\left(\int_Q \nu^{-1/(p-1)}(t)dt\right)^{p-1} < \infty \quad \text{для} \quad \nu \in A_p \quad (p \geq 1),$$

и можно считать (на основании неравенства Гельдера), что каждая $f \in L_\nu^p(Q)$ является также функцией из класса $L(Q)$.

С помощью весовой функции $\nu = \nu(x) \geq 0$ будет определена мера множеств Ω в виде

$$\mu(\Omega) = \int\limits_\Omega \nu(x)dx\,.$$

Сопоставим произвольной функции $f \in L(Q)$ последовательность ее коэффициентов Фурье

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-ikt)\,dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{1.1}$$

ряд Фурье

$$s\,[f, x] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\exp(ikx) \tag{1.2}$$

и сопряженный ряд

$$\tilde{s}\,[f, x] = -i\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\operatorname{sgn} k) c_k(f)\exp(ikx)\,. \tag{1.3}$$

С помощью бесконечной последовательности

$$\lambda = \{\lambda_k(h), \;\; k = 0, 1, \ldots\}, \tag{1.4}$$

определяемой значениями параметра $h > 0$, построим два семейства операторов вида:

$$U_h(f) = U_h(f, x; \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{|k|}(h) c_k(f)\exp(ikx) \tag{1.5}$$

и

$$\tilde{U}_h(f) = \tilde{U}_h(f, x; \lambda) = -i\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\operatorname{sgn} k)\lambda_{|k|}(h)\, c_k(f)\exp(ikx), \tag{1.6}$$

которые называются также семействами линейных средних ряда Фурье и сопряженного ряда соответственно.

Поведение средних (1.5) при $h \to +0$ (вопросы так называемой λ-суммируемости) в случае дискретных значений параметра h составляло предмет многих исследований (см. [3 – 5] и др.); в меньшей степени изучен случай (1.6).

В настоящей работе рассмотрим следующие вопросы (более точные формулировки будут представлены в текстах соответствующих теорем):

– какие условия на суммирующую последовательность достаточны для ограниченности в $L_\nu^p(Q)$, $\nu \in A_p$, максимальных операторов, порожденных семействами (1.5), (1.6) и ассоциированных с ними операторов свертки;

– какие условия обеспечивают при $h \to +0$ сходимость (1.5), (1.6) почти всюду и в метрике соответствующего пространства;

– каково поведение семейств обобщенных дробных интегралов ряда Фурье и сопряженного ряда при $h \to +0$.

2. Постановка задач для операторов свертки

Если воспользоваться интегральной формой (1.1) коэффициентов Фурье в представлениях (1.5) и (1.6), и формально выполнить почленное интегрирование получаемых рядов, то приходим к рассмотрению следующих двух семейств операторов свертки:

$$f * K_h = (f * K_h)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, K_h(x-t)\,dt \tag{2.1}$$

и

$$f * \tilde{K}_h = (f * \tilde{K}_h)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \tilde{K}_h(x-t)\,dt\,, \tag{2.2}$$

где

$$K_h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{|k|}(h)\exp(ikx)\,; \tag{2.3}$$

$$\tilde{K}_h(x) = -i\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\operatorname{sgn} k)\lambda_{|k|}(h)\exp(ikx)\,. \tag{2.4}$$

Теперь сформулированные выше задачи (возможно, уже вне связи с вопросами суммируемости рядов (1.2) и (1.3)) могут быть переформулированы в терминах таких условий на коэффициенты Фурье функций $K_h(x)$ и $\tilde{K}_h(x)$, которые, в частности, обеспечат сходимость рядов (2.3), (2.4) почти всюду и ограниченность операторов свертки (2.1) и (2.2) в весовых лебеговых пространствах $L_\nu^p = L_\nu^p(Q)$.

Перечислим вышеупомянутые условия, которым на протяжении всей работы будет удовлетворять последовательность (1.4). Для этого положим $\Delta\lambda_k(h) = \lambda_k(h) - \lambda_{k+1}(h),\ \Delta\lambda_k^2(h) = \Delta(\Delta\lambda_k(h)),\ k = 0, 1, ...,$ и

$$\sum(\lambda, h) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,|\,\Delta^2\lambda_k(h)\,|\,.$$

Последовательность (1.4) называется квазивыпуклой [6, т. 1, с. 135], если $\sum(\lambda, h) < \infty$ при каждом $h > 0$. Будем говорить, что (1.4) равномерно квазивыпукла, если существует постоянная $C = C_\lambda$, такая что

$$\sum{}^*(\lambda) = \sup_{h>0} \sum(\lambda,\, h) \le C_\lambda\,. \tag{2.5}$$

Здесь и в дальнейшем через C обозначаем постоянные, вообще говоря, различные и зависящие лишь от указанных явно индексов или же (при отсутствии индексов) абсолютные постоянные.

Для (1.4), как последовательности коэффициентов Фурье функций (2.3), естественно потребовать, чтобы при каждом $h > 0$

$$\lim_{N \to +\infty} \lambda_N(h) = 0. \tag{2.6}$$

Будем также для определенности считать, что

$$\lambda_0(h) = 1. \tag{2.7}$$

3. Преобразования интегральных ядер

Выразим интегральные ядра (2.3), (2.4) через стандартные ядра:
– ядро Фейера

$$F_k(t) = \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} D_\nu(t) = \frac{\sin^2 \frac{k+1}{2} t}{2(k+1)\sin^2 \frac{1}{2} t};$$

– сопряженное ядро

$$\tilde{F}_k(t) = \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} \tilde{D}_\nu(t) = \frac{1}{2tg \frac{1}{2} t} - \approx{F}_k(t), \tag{3.1}$$

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \cos \nu t = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t}{2\sin \frac{1}{2} t};$$

– ядро Дирихле

$$\tilde{D}_k(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \sin \nu t = \frac{1}{2tg \frac{1}{2} t} - \frac{\cos\left(k + \frac{1}{2}\right) t}{2\sin \frac{1}{2} t}; \tag{3.2}$$

– сопряженное ядро Дирихле, $D_0(t) = \tilde{D}_0(t) \equiv 0$ и

$$\overset{\approx}{F}_k(t) = \frac{\sin(k+1)t}{4(k+1)\sin^2 \frac{1}{2} t}, \tag{3.3}$$

где $k = 0, 1, \ldots$, (см. [7, т. 1, с. 86, 148, 153]).

Лемма 3.1. Пусть $\delta > 0$ – произвольно малое фиксированное число и выполнены условия (2.5) – (2.7). Тогда при всех $t \in [-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta)$ и $h > 0$ имеют место соотношения:

$$K_h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \Delta^2 \lambda_k(h)\ F_k(t)\ ; \tag{3.4}$$

$$\tilde{K}_h(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2\lambda_k(h)\,\tilde{F}_k(t)\,, \tag{3.5}$$

причем ряды (3.4), (3.5) сходятся абсолютно и равномерно.

Утверждение (3.4) установлено в [8], докажем (3.5). Запишем (см. (3.2))

$$\tilde{K}_h(t) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(h)(\tilde{D}_k(t)-\tilde{D}_{k-1}(t))\right)$$

и применим к сумме под знаком предела преобразование Абеля

$$\tilde{K}_h(t) = \lim_{N\to+\infty}\left(\lambda_N(h)\tilde{D}_N(t)+\sum_{k=0}^{N-1}\Delta\lambda_k(h)\tilde{D}_k(t)\right). \tag{3.6}$$

Согласно (2.6) и очевидному при $\delta\le|t|\le\pi$ неравенству

$$|\tilde{D}_k(t)|\le\frac{C}{|t|}\le\frac{C}{\delta}\,,\ \ k=0,1,...,$$

(3.6) при каждом $h>0$ принимает вид

$$\tilde{K}_h(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k(h)\tilde{D}_k(t)\,. \tag{3.7}$$

Далее, в силу известной оценки ([6, т. 1, с. 135–136; 8])

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta\lambda_k(h)|\le\sum(\lambda,h)\,,$$

ряд (3.7) абсолютно и равномерно сходится при $\delta\le|t|\le\pi$.

Легко проверить, что (см. (3.1), (3.3))

$$\tilde{D}_k(t)=(k+1)\tilde{F}_k(t)-k\tilde{F}_{k-1}(t)\ ,\ \ k=0,1,...,$$

а значит, применяя преобразования Абеля, будем иметь

$$\tilde{K}_h(t) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\Delta\lambda_k(h)\,\tilde{D}_h(t) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left((N+1)\Delta\lambda_N(h)\tilde{F}_N(t)+\sum_{k=0}^{N-1}(k+1)\Delta^2\lambda_k(h)\tilde{F}_k(t)\right). \tag{3.8}$$

При этом, согласно (3.1) и (3.3), справедливо неравенство

$$|\tilde{F}_k(t)|\le\frac{C}{|t|}\le\frac{C}{\delta},\ \ k=0,1,...:\ \ \delta\le|t|\le\pi\,. \tag{3.9}$$

Далее

$$\lim_{N\to+\infty}(N+1)\Delta\lambda_N(h)=0 \tag{3.10}$$

при каждом $h>0$, поскольку последовательность (1.4) квазивыпукла (см. (2.5) и [6, т. 1, с. 135–136]).

Теперь, в силу (3.9) и (3.10), в соотношении (3.8) предел первого слагаемого равен нулю, и приходим к утверждению (3.5); условие (2.5) обеспечивает при $\delta \le |t| \le \pi$ абсолютную и равномерную сходимость ряда в (3.5). Ввиду произвольной малости $\delta > 0$ можно также утверждать сходимость почти всюду в Q.

Лемма 3.1 доказана.

4. Максимальные оценки операторов свертки

В настоящем параграфе мы получаем оценки (2.1) и (2.2) в терминах стандартных максимальных функций

$$f^* = f^*(x) = \sup_{\eta>0} \frac{1}{\eta} \int_{x-\eta}^{x+\eta} |f(t)|\,dt \tag{4.1}$$

и

$$Tf = Tf(x) = \sup_{\eta>0} \left| \int_{\eta\le|t|\le\pi} \frac{f(x+t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} dt \right|, \tag{4.2}$$

где $f \in L(Q)$. В этом случае функции (4.1), (4.2) существуют для почти всех x.

Удобно будет записать (2.2) в виде

$$(f * \tilde{K}_h)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\tilde{K}_h(x-t)dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\tilde{K}_h(t)dt,$$

что возможно ввиду нечетности (см. (3.1) и (3.2)) ядра $\tilde{K}_h(t)$ и 2π-периодичности подинтегральной функции.

Лемма 4.1. Если выполнены условия (2.5) – (2.7), то при каждом $0 < \delta < \pi$ и почти всех $x \in Q$ (а именно, где соответствующие максимальные функции существуют) имеют место оценки

$$\int_{\delta\le|t|\le\pi} |f(x+t)||K_h(t)|\,dt \le C{\sum}^*(\lambda)\big(f^*(x)\big); \tag{4.3}$$

$$\left| \int_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\tilde{K}_h(t)dt \right| \le C{\sum}^*(\lambda)\big(f^*(x) + Tf(x)\big) \tag{4.4}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от x и $\delta \in (0, \pi)$.

Доказательство. Докажем (4.4); доказательство (4.3) аналогично (и даже проще) (см. [8]).

Воспользуемся представлением (3.5) ядра в интеграле (4.4) и выполним почленное интегрирование, что возможно по причине равномерной сходимости ряда (3.5) при $\delta \le |t| \le \pi$. Получим

$$\left| \int_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\tilde{K}_h(t)dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\Delta^2\lambda_k(h) \int_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\tilde{F}_k(t)dt \right| \le \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta^2\lambda_k(h)|(k+1) \left| \int_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\tilde{F}_k(t)dt \right|. \tag{4.5}$$

Достаточно теперь установить, что

$$|\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\tilde{F}_k(t)dt|\le C(f^*(x)+Tf(x)) \tag{4.6}$$

с постоянной $C>0$, не зависящей от x, $k=0,1,...$ и $\delta\in(0,\pi)$. Возможны следующие два случая.

Случай 1: $0<\delta\le\dfrac{1}{k+1}$. Тогда

$$|\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\tilde{F}_k(t)dt|=$$

$$=|\int\limits_{\delta\le|t|\le\frac{1}{k+1}} f(x+t)\tilde{F}_k(t)dt+\int\limits_{\frac{1}{k+1}\le|t|\le\pi} f(x+t)\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt+\int\limits_{\frac{1}{k+1}\le|t|\le\pi} f(x+t)\tilde{\tilde{F}}_k(t)dt|=$$

$$=|J_1+J_2+J_3|. \tag{4.7}$$

Далее

$$|J_1|\le\int\limits_{0\le|t|\le\frac{1}{k+1}}|f(x+t)||\tilde{F}_k(t)|dt\le Cf^*(x); \tag{4.8}$$

$$|J_2|\le\sup_{h>0}|\int\limits_{h\le|t|\le\pi} f(x+t)\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt|=Tf(x); \tag{4.9}$$

$$|J_3|\le\int\limits_{\frac{1}{k+1}\le|t|\le\pi}|f(x+t)||\tilde{\tilde{F}}_k(t)|dt\le Cf^*(x); \tag{4.10}$$

здесь оценки (4.8) и (4.10) известны (см., напр., [9]), а оценка (4.9) очевидна.

Итак, в рассматриваемом случае результат (4.6) следует из соотношений (4.7) – (4.10).

Случай 2: $\dfrac{1}{k+1}\le\delta<\pi$. Имеем в силу (4.10)

$$|\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\tilde{F}_k(t)dt|=$$

$$=|\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\frac{1}{2}ctg\frac{t}{2}dt+\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\tilde{\tilde{F}}_k(t)dt|\le Tf(x)+\int\limits_{\frac{1}{k+1}\le|t|\le\pi}|f(x+t)||\tilde{\tilde{F}}_k(t)|dt\le$$

$$\le Tf(x)+Cf^*(x),$$

и снова приходим к (4.6).

Утверждение (4.4) леммы теперь вытекает из (4.5), (4.6).

Лемма 4.2. Если выполнены условия (2.5) – (2.7), то для почти всех $x\in Q$ имеют место оценки:

$$\int_Q | f(x+t)|\,| K_h(t) |\, dt \le C \sum{}^*(\lambda)\big(f^*(x)\big); \tag{4.11}$$

$$\left| \int_Q f(x+t)\, \tilde{K}_h(t) dt \right| \le C \sum{}^*(\lambda)\big(f^*(x) + Tf(x)\big). \tag{4.12}$$

Для доказательства (4.11) и (4.12) достаточно перейти в соотношениях (4.3) и (4.4) соответственно к пределу при $\delta \to +0$.

Заметим, в частности, что при выполнении условий (2.5) – (2.7) каждая из функций $K_h(t)$, $h > 0$, принадлежит классу $L(Q)$, в чем легко убедиться, если взять в (4.11) $f \equiv 1$ на Q.

5. Весовые оценки операторов свертки

Положим

$$(f * K)_* = (f * K)_*(x) = \sup_{h>0} | (f * K_h)(x) |;$$

$$(f * \tilde{K})_* = (f * \tilde{K})_*(x) = \sup_{h>0} | (f * \tilde{K}_h)(x) |.$$

Поскольку правые части (4.11) и (4.12) не зависят от h, то для почти всех $x \in Q$ будут справедливы неравенства:

$$(f * K)_*(x) \le C \sum{}^*(\lambda)\big(f^*(x)\big); \tag{5.1}$$

$$(f * \tilde{K})_*(x) \le C \sum{}^*(\lambda)\big(f^*(x) + Tf(x)\big). \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. Пусть элементы последовательности (1.4) удовлетворяют условиям (2.5) – (2.7).

1) если $\nu \in A_p$, $p > 1$, то имеют место оценки:

$$\| (f * K)_* \|_{\nu,\, p} \le C_{\nu,\, p} \| f \|_{\nu,\, p}; \tag{5.3}$$

$$\| (f * \tilde{K})_* \|_{\nu,\, p} \le C_{\nu,\, p} \| f \|_{\nu,\, p}. \tag{5.4}$$

2) если $\nu \in A_p$, $p \ge 1$, то справедливы соотношения:

$$\mu\{x \in Q \,|\, (f * K)_*(x) > \varsigma > 0\} \le C_{\nu,\, p} \left(\frac{\| f \|_{\nu, p}}{\varsigma} \right)^p; \tag{5.5}$$

$$\mu\{x \in Q \,|\, (f * \tilde{K})_*(x) > \varsigma > 0\} \le C_{\nu,\, p} \left(\frac{\| f \|_{\nu,\, p}}{\varsigma} \right)^p. \tag{5.6}$$

Доказательство. Согласно результатам [2, 10], каждая из оценок «сильного типа»:

$$\| f^* \|_{\nu,\, p} \le C_{\nu,\, p} \| f \|_{\nu,\, p}; \tag{5.7}$$

$$\| Tf \|_{\nu,\, p} \le C_{\nu,\, p} \| f \|_{\nu,\, p} \tag{5.8}$$

для максимальных функций (4.1) и (4.2) равносильна условию $\nu \in A_p$, если $p > 1$. Кроме того, каждая из оценок «слабого типа»:

$$\mu\{x \in Q \mid f^*(x) > \varsigma > 0\} \le C_{\nu,p}\left(\frac{\| f \|_{\nu,p}}{\varsigma}\right)^p; \tag{5.9}$$

$$\mu\{x \in Q \mid Tf(x) > \varsigma > 0\} \le C_{\nu,p}\left(\frac{\| f \|_{\nu,p}}{\varsigma}\right)^p \tag{5.10}$$

также равносильна $\nu \in A_p$, $p \ge 1$.

Теперь утверждения (5.3) – (5.6) следуют из оценок (5.1) – (5.2) и результатов (5.7) – (5.10).

6. Вопросы сходимости. Аппроксимативные единицы

Теорема 6.1. Пусть элементы последовательности (1.4) удовлетворяют условиям (2.5) – (2.7) и

$$\lim_{h \to +0} \lambda_k(h) = 1, \qquad k = 0, 1, \ldots . \tag{6.1}$$

Тогда соотношения:

$$\lim_{h \to +0} f * K_h = f \tag{6.2}$$

и

$$\lim_{h \to +0} f * \tilde{K}_h = \tilde{f}$$

имеют место:

а) в метрике каждого из пространств $L_\nu^p(Q)$, $\nu \in A_p$, $p > 1$;

б) μ-почти всюду для любой $f \in L_\nu^p(Q)$, $\nu \in A_p$, $p \ge 1$.

Кроме того, соотношение (6.2) справедливо также в метрике $L_\nu^1(Q)$, $\nu \in A_1$.

Доказательство. Утверждение пункта а) вытекает стандартным образом из теоремы Банаха–Штейнгауза, если воспользоваться условием (6.1) и оценками сильного типа (5.3)–(5.4). Сходимость (6.2) в метрике $L_\nu^1(Q)$ устанавливается рассуждениями, аналогичными [2, теорема 10; 8].

Утверждение пункта б) вытекает также стандартным образом из (6.1) и оценок слабого типа (5.5), (5.6) (см. [7, т. 2, с. 464–465]).

Результат теоремы 6.1 может быть интерпретирован следующим образом. При $\nu \in A_p$, $p \ge 1$, операторы (2.1) и (2.2) задают на $L_\nu^p(Q)$, две $*$-алгебры. В частности, алгебра, порожденная на L оператором $f * K_h$, коммутативна, поскольку каждая $K_h(x) \in L(Q)$ (см. замечание к лемме 2.2).

В случае $f * K_h$ соответствующая алгебра на $L_\nu^p(Q)$, $p \ge 1$, не содержит, вообще говоря, единицы относительно операции свертки (этот факт для пространств $L^p(Q)$, $p \ge 1$ (см. [6, т. 1, с. 68, 75])). Поэтому повышается интерес к так называемым аппроксимативным единицам, то есть семействам операторов, которые аппроксимируют единичный оператор E: $Ef = f$. Согласно (6.2), при выполнении условий (2.5) – (2.7) и (6.1), семейство $\{f * K_h\}$, $h > 0$, служит аппроксимативной единицей (аппроксимация E в метрике $L_\nu^p(Q)$ и μ-почти всюду).

7. Средние рядов Фурье и сопряженных рядов

Уточним анонсированные выше (в п. 2, где речь шла о формальном почленном интегрировании рядов) связи средних (1.5) рядов Фурье с операторами свертки (2.1) и сопряженных средних (1.6) с (2.2).

Для квазивыпуклой последовательности (1.4), согласно формуле Парсеваля [3 – 5], имеют место соотношения:

$$U_h(f, x; \lambda) = (f * K_h)(x); \tag{7.1}$$

$$\tilde{U}_h(f, x; \lambda) = (f * \tilde{K}_h)(x); \tag{7.2}$$

при этом условие

$$|\lambda_k(h)| \ln(k+1) \le C_h, \qquad h > 0, \tag{7.3}$$

является необходимым и достаточным для сходимости почти всюду рядов, записанных в левых частях (7.1) и (7.2). Значит, при дополнительном условии (7.3), теоремы 5.1 и 6.1 можно переформулировать в терминах средних (1.5), (1.6).

Впрочем, соответствующие результаты могут быть установлены непосредственно, то есть без использования (7.1), (7.2) [11].

Более того, справедлива

Теорема 7.1. Пусть элементы последовательности (1.4) удовлетворяет условиям (2.5) – (2.7). Пусть также $\nu \in A_p$.

1) Следующие оценки сохраняются с заменой $\left(f * K\right)_*$ на $\sup\limits_{h>0} |U_h(f, x; \lambda)|$:

1а) оценка сильного типа (5.3) при $p > 1$;

1б) оценка слабого типа (5.4) при $p = 1$ и выполнении условия (7.3).

2) Если, кроме того, элементы последовательности (1.4) удовлетворяют условию (6.1) и $f \in L^p_\nu(Q)$, то соотношение

$$\lim_{h \to +0} U_h(f) = f$$

имеет место:

2а) в метрике $L^p_\nu(Q)$ и μ-почти всюду при $p > 1$;

2б) μ-почти всюду при $p = 1$ и выполнении условия (7.3).

Замечание. В рассматриваемом круге вопросов при $p = 1$ условие (7.3), вообще говоря, снять нельзя. Покажем это в случае $\nu \equiv 1$. Пусть $\Upsilon \subset Q$ – множество всех точек λ-суммируемости (о которых идет речь в теореме 7.1) ряда Фурье функции $f \in L$, а $\Lambda \subset Q$ – множество всех точек Лебега этой функции. Тогда $\Upsilon \cap \Lambda$ расположено почти всюду в Q, и в каждой из точек $\Upsilon \cap \Lambda$, согласно теореме 7.1, ряд Фурье λ-суммируем к $f(x)$. В этих же точках ([5], случай дискретных значений параметра h, $h \to +0$) условие (7.3) оказывается необходимым и достаточным для такой суммируемости, что и утверждалось.

В случае средних сопряженного ряда Фурье справедлива

Теорема 7.2. Пусть элементы последовательности (1.4) удовлетворяют условиям (2.5) – (2.7) и (7.3). Пусть также $\nu \in A_p$.

1) Оценки сильного типа (5.4) при $p > 1$ и слабого типа (5.6) при $p \ge 1$ имеют место с заменой $(f * \tilde{K})_*$ на $\sup\limits_{h>0} |\tilde{U}_h(f, x; \lambda)|$.

2) Если, кроме того, выполнено условие (6.1), то соотношение

$$\lim_{h\to+0} \widetilde{U}_h(f) = \widetilde{f}$$

имеет место:

2а) в метрике $L_\nu^p(Q)$, $p>1$;

2б) μ-почти всюду для любой $f \in L_\nu^p(Q)$, $p \ge 1$.

Доказательство теоремы 7.1. Достаточно установить оценку (аналогичную (5.1))

$$\sup_{h>0} |U_h(f, x; \lambda)| \le C \sum{}^*(\lambda)\big(f^*(x)\big); \tag{7.4}$$

в остальном повторяются рассуждения, примененные в доказательствах теорем 5.1 и 6.1. Используя (1.5), ядра Дирихле и Фейера, введенные в п. 3, и дважды преобразование Абеля, получаем

$$U_h(f, x; \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{|k|}(h) c_k(f) \exp(ikx) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \Bigg\{ \lambda_N(h) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t)\, dt + N\Delta\lambda_{N-1}(h) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_{N-1}(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-2} (k+1)\Delta^2 \lambda_k(h) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_k(t)\, dt \Bigg\}. \tag{7.5}$$

Далее, записанные в правой части (7.5) свертки функции f с ядрами Дирихле и Фейера представляют собою, соответственно, последовательности частичных сумм $\{s_k[f, x]\}$ ряда (1.2) и его средних Фейера $\{\sigma_k[f, x]\}$ [7, т. 1, с. 86, 143, 148]. Следовательно,

$$|U_h(f, x; \lambda)| \le \lim_{N\to+\infty} \Bigg\{ |\lambda_N(h)| \sup_{k=0,1,\dots} |s_k[f, x]| + \bigg(|N\Delta\lambda_{N-1}(h)| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-2} (k+1) |\Delta^2 \lambda_k(h)| \bigg) \sup_{k=0,1,\dots} |\sigma_k[f, x]| \Bigg\}. \tag{7.6}$$

Как установлено в работе [12], для $s^*(f) = s^*(f, x) = \sup\limits_{k=0,1,\dots} |s_k[f, x]|$ имеет место оценка

$$\| s^*(f) \|_{\nu,p} \le C_{\nu,p} \| f \|_{\nu,p}, \text{ если } \nu \in A_p \text{ и } p > 1.$$

В частности, функция $s^*(f, x)$ конечна почти всюду, а значит, в силу (2.6), предел (при $N \to +\infty$) первого слагаемого в правой части (7.6) равен нулю для почти всех $x \in Q$. Хорошо известно (см., напр., [2]) также соотношение

$$\sup_{k=0,1,\dots} |\sigma_k[f, x]| \le Cf^*(x),$$

выполненное почти всюду в Q. Теперь, согласно (3.10), неравенство (7.6) для почти всех $x \in Q$ принимает вид

$$|U_h(f, x; \lambda)| \le C\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,|\Delta^2\lambda_k(h)|\right) f^*(x),$$

чем и доказано (7.4).

Доказательство теоремы 7.2 вытекает из оценки

$$\sup_{h>0}\left|\tilde{U}_h(f, x; \lambda)\right| \le C\sum{}^*(\lambda)\big(f^*(x) + Tf(x)\big),$$

справедливой (см. [9], соотношение (3.2)) для почти всех $x \in Q$ при выполнении условий (2.5) – (2.7) и (7.3). Дальнейшие рассуждения опираются на оценки (5.7), (5.8) и аналогичны рассуждениям, использованным в доказательстве теорем 5.1 и 6.1.

8. Случай экспоненциальной суммирующей последовательности

В настоящем пункте ограничимся случаем

$$\lambda_k(h) = \exp(-h\varphi(k)),\ k = 1, 2, \ldots. \tag{8.1}$$

При этом функция $\varphi(x)$ с действительными значениями предполагается возрастающей к $+\infty$ на $[0, +\infty)$, дважды дифференцируемой на $(0, +\infty)$ и $\varphi(0) = 0$.

Теорема 8.1. Если функция

$$h(\varphi'(x))^2 - \varphi''(x)) \tag{8.2}$$

меняет свой знак на $[0, +\infty)$ конечное число раз и имеет место соотношение

$$hx\varphi'(x)\exp(-h\varphi(x)) \le C_\varphi, \tag{8.3}$$

то последовательность (8.1) равномерно квазивыпукла. Если же (8.2) не меняет знака на $[0, +\infty)$, то условие (8.3) является достаточным для ее равномерной квазивыпуклости.

В обоих для (8.1) случаях имеют место утверждения теорем 5.1, 6.1 и 7.1 (утверждения 1а) и 2а).

При выполнении на $[0, +\infty)$ дополнительного условия

$$\exp(-h\varphi(x))\ln(x+1) \le C_h\,,\quad h > 0\,, \tag{8.4}$$

справедливы утверждения 1б) и 2б) теоремы 7.1 и 2а) и 2б) теоремы 7.2.

Для доказательства теоремы 8.1 достаточно проверить в первую очередь условие (2.5), тогда как (2.6) и (2.7), а также (6.1) очевидным образом выполнены.

Заметим, что если функция (8.2) меняет на $[0, +\infty)$ свой знак конечное число раз, то последовательность (8.1) кусочно-выпукла, а если знак сохраняет, то (8.1) выпукла или вогнута; сказанное вытекает из равенства

$$(\exp(-h\varphi(x)))'' = h\exp(-h\varphi(x))(h(\varphi'(x))^2 - \varphi''(x)).$$

Далее, в работе [13] установлено, что если суммирующая последовательность (1.4) кусочно-выпукла, то достаточным условием для ее равномерной квазивыпуклости является требование

$$|\lambda_k(h)| + k\,|\Delta\lambda_k(h)| \le C_\lambda, \quad k = 0, 1, ..., \quad h > 0\,; \tag{8.5}$$

в частном же случае выпуклых (вогнутых) последовательностей ограничение (8.5) выполнено (см. [7, т. 1, с. 155–156].

Поскольку, $k\Delta\lambda_k(h)$ есть значение функции $x\exp(-h\varphi(x))(-h\varphi'(x))$, то условие (8.5) будет сведено к виду (8.3).

Наконец, условие (7.3) (там, где оно требуется) выполнено при ограничении (8.4).

Примерами экспоненциальных суммирующих последовательностей (8.1), удовлетворяющих условиям теоремы 8.1, служат [9]:

$$1)\ \lambda_k(h) = \exp(-h(\ln^\alpha k)), \quad k = 1,\ 2, ..., \quad \alpha > 0\,;$$

$$2)\ \lambda_k(h) = \exp(-h(k^\alpha)), \quad k = 1, 2, ..., \quad \alpha > 0\,.$$

В частности, при $\alpha = 1$ во втором примере узнаем классический метод суммирования Пуассона–Абеля (см. [7, т. 1, с. 160]).

9. Предельное поведение обобщенных дробных интегралов

В настоящем параграфе будем считать, что среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ равно нулю, так что $c_0(f) = 0$. В этом случае определены операторы

$$\Upsilon_h: \quad f \mapsto \Upsilon_h[f, x] = \sum_{|k|>0} c_k(f)\frac{\exp(ikx)}{(ik)^h}. \tag{9.1}$$

Если $h = \vartheta$, где ϑ – натуральное число, то ряд (9.1) представляет собой формально проинтегрированный ϑ раз ряд Фурье (точнее, одну из возможных первообразных). При нецелых $h > 0$ говорят, что $\Upsilon_h[f, x]$ есть дробный интеграл ряда Фурье (см. [7, т. 1, с. 200–201]). Если устремить h к нулю, то естественно ожидать, что предел $\Upsilon_h[f, x]$ (например, при почти всех x) будет равен $f(x)$. Получение соответствующего результата и его обобщений и составляет задачу настоящего параграфа.

Ряд (9.1) можно также рассматривать как результат применения к (1.2) метода суммирования $\lambda = \{\lambda_k(h)\}$, определяемого последовательностью

$$\lambda_k(h) = \exp(-h\ln ik),$$

или, что то же самое,

$$\lambda_k(h) = \exp\left(-h(\ln|k| + i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} k)\right), \ k = \pm 1,\ \pm 2, ...$$

Как установлено в [7, т. 2, с. 201], интегральное ядро средних (9.1) линейным образом выражается через интегральные ядра (1.5) и (1.6), где в роли суммирующей последовательности (1.4) выступает последовательность $\{\exp(-h\ln k\}$, $k = 1,\ 2, ...$ Получим, прежде всего, аналогичный результат в более общем направлении, рассматривая

$$\lambda_k(h) = \exp\left(-h\left(\varphi(|k|) + i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} k\right)\right),\ k = \pm 1,\ \pm 2, \dots, \quad h > 0, \tag{9.2}$$

причем будем считать, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в начале параграфа 8.

Положим $\tau = \{\tau_k(h)\}$, где

$$\tau_k(h) = \exp(-h\varphi(|k|)), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad h > 0. \tag{9.3}$$

Лемма 9.1. Пусть последовательность $\{\lambda_k(h)\}$ определена соотношением (9.2), среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ равно нулю,

$$V_h(f) = V_h(f, x; \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k(h) c_k(f) \exp(ikx) \tag{9.4}$$

и

$$\tilde{V}_h(f) = \tilde{V}_h(f, x; \lambda) = -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\operatorname{sgn} k) \lambda_k(h) c_k(f) \exp(ikx).$$

Тогда имеют место представления:

$$V_h(f, x; \lambda) = U_h(f, x; \tau) \cos h\frac{\pi}{2} + \tilde{U}_h(f, x; \tau) \sin h\frac{\pi}{2} \tag{9.5}$$

и

$$\tilde{V}_h(f, x; \lambda) = \tilde{U}_h(f, x; \tau) \cos h\frac{\pi}{2} - U_h(f, x; \tau) \sin h\frac{\pi}{2}. \tag{9.6}$$

Доказательство. Докажем (9.5), доказательство (9.6) аналогично. Согласно (9.2), имеем (9.4) в виде

$$V_h(f, x; \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \exp i\left(kt - h\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} k\right) \exp(-h\varphi(k))\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-h\varphi(k)) \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\exp i\left(kt - h\frac{\pi}{2}\right) + \exp i\left(-kt + h\frac{\pi}{2}\right)}{2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-h\varphi(k)) \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cos\left(kt - h\frac{\pi}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{\cos h\frac{\pi}{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-h\varphi(k)) \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cos kt\, dt +$$

$$+ \frac{\sin h\frac{\pi}{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-h\varphi(k)) \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \sin kt\, dt. \tag{9.7}$$

Добавляя к сумме в правой части (9.7) нулевое слагаемое

$$\frac{\cos h\frac{\pi}{2}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,dt\,,$$

и пользуясь интегральной формой τ-средних (см. (9.3)) ряда Фурье функции f и τ-средних сопряженного ряда (см., напр., [9]), получаем, что соотношение (9.7) равносильно представлению (9.5), чем и завершается доказательство леммы 9.1.

Положим:

$$V_*(f) = V_*(f, x; \lambda) = \sup_{h>0} | V_*(f, x; \lambda)|$$

и

$$\tilde{V}_*(f) = \tilde{V}_*(f, x; \lambda) = \sup_{h>0} | \tilde{V}_*(f, x; \lambda)|\,,$$

где, по-прежнему, последовательность $\{\lambda_k(h)\}$ определена соотношением (9.2).

Теорема 9.1. Пусть функция (8.2) не меняет своего знака на $[0,+\infty)$ или меняет его конечное число раз и (в этом случае) выполнено условие (8.3). Пусть также (в обоих случаях) выполнено требование (8.4). Тогда:

1) если $\nu \in A_p$, $p > 1$, то имеют место оценки:

$$\| V_*(f) \|_{\nu,\, p} \le C_{\nu,\, p} \, \| f \|_{\nu,\, p}\,; \tag{9.8}$$

$$\| \tilde{V}_*(f) \|_{\nu,\, p} \le C_{\nu,\, p} \, \| f \|_{\nu,\, p}\,; \tag{9.9}$$

2) если $\nu \in A_p$, $p \ge 1$, то справедливы соотношения:

$$\mu\{x \in Q \,|\, V_*(f, x; \lambda) > \varsigma > 0\} \le C_{\nu,\, p} \left(\frac{\| f \|_{\nu,\, p}}{\varsigma} \right)^p; \tag{9.10}$$

$$\mu\{x \in Q \,|\, \tilde{V}_*(f, x; \lambda) > \varsigma > 0\} \le C_{\nu,\, p} \left(\frac{\| f \|_{\nu,\, p}}{\varsigma} \right)^p. \tag{9.11}$$

3) для всякой функции $f \in L_\nu^p(Q)$ и $\nu \in A_p$ равенства:

$$\lim_{h \to +0} V_h(f) = f \tag{9.12}$$

и

$$\lim_{h \to +0} \tilde{V}_h(f) = \tilde{f} \tag{9.13}$$

имеют место:

а) в метрике $L_\nu^p(Q)$ при $p > 1$;

б) μ-почти всюду при $p \ge 1$.

Доказательство. Из представлений (9.5) и (9.6) очевидным образом вытекают неравенства:

$$\| V_*(f) \|_{\nu,\, p} \le \| U_*(f) \|_{\nu,\, p} + \| \tilde{U}_*(f) \|_{\nu,\, p}$$

и

$$\| \tilde{V}_*(f) \|_{\nu,\, p} \le \| U_*(f) \|_{\nu,\, p} + \| \tilde{U}_*(f) \|_{\nu,\, p}.$$

Оценки (9.8) – (9.11) теперь следуют из утверждений теорем 7.1 1а) и 1б) и 7.2 – 1), если учесть равномерную квазивыпуклость (см. теорему 8.1) последовательности (9.3).

Далее, соотношения утверждения (9.12) и (9.13) о сходимости вытекают из утверждений теорем 7.1 (п. 2) и 7.2 (п. 2) , если снова воспользоваться теоремой 8.1.

Теорема 9.1. доказана.

Список литературы

1. Rozenblum, M. Summability of Fourier Series in $L^p(d\mu)$ / M. Rozenblum // Transactions of the American Mathematical Society. – 1962. – Vol. 105, No. 2. – P. 32 – 42.
2. Muckenhoupt, B. Weighted Norm Inequalities for the Hardy Maximal Function / B. Muckenhoupt // Transactions of the American Mathematical Society. – 1972. – Vol. 165. – P. 207 – 226.
3. Karamata, J. Sur la Sommation des Series de Fourier des Functions Continue / J. Karamata, M. Tomic // Publ. Inst. Math. Acad. Serbe scL. – 1955. – No. 8. – P. 123 – 138.
4. Karamata, J. Suite de Fonctionelles Lineaires et Facteurs de Convergence des Series de Fourier / J. Karamata // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1956. – Vol. 35, No. 1. – P. 87 – 95.
5. Баусов, Л. И. О линейных методах суммирования рядов Фурье / Л. И. Баусов // Мат. сб. – 1965. – Т. 68 (110), № 3. – С. 313 – 327.
6. Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении. В 2-х томах / Р. Эдвардс ; пер. с англ. В. А. Скворцова. – М. : Мир, 1985. – Т. 1. – 260 с.
7. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : в 2-х томах / А. Зигмунд ; пер. с англ. – М. : Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с. ; Т. 2. – 537 с.
8. Нахман, А. Д. Ограниченность семейств операторов свертки в пространствах L^p / А. Д. Нахман // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2021. – Т. 27, № 3. – С. 449 – 460. doi: 10.17277/vestnik.2021.03.pp.449-460
9. Нахман, А. Д. Экспоненциальные методы суммирования рядов Фурье / А. Д. Нахман, Б. П.Осиленкер // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 101 – 109.
10. Hunt, R. A. Weighted Norm Inequalities for Conjugate Function and Hilbert Transform / R. A. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden // Transactions of the American Mathematical Society. – 1973. – Vol. 176. – P. 227 – 251.
11. Nakhman, A. D. Regular Semi-Continuous Methods of Summation of Fourier Series / A. D. Nakhman, B. P. Osilenker // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2017. – Т. 23, № 1. – С. 135 – 148. doi: 10.17277/vestnik.2017.01.pp.135-148
12. Hunt, R. A. Weighted Norm Inequality for Fourier Series / R. A. Hunt, Wo-Sang Young // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1974. – Vol. 80, No. 2. – P. 274 – 277.
13. Осиленкер, Б. П. Задачи, ассоциированные с представлением Дирихле полугруппы операторов / Б. П. Осиленкер, А. Д. Нахман // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 492 – 511. doi: 10.17277/vestnik.2018.03.pp.492-511

Two Classes of Convolution Operators in Weighted Lebesgue Spaces

B. P. Osilenker, A. D. Nakhman

Department of Higher Mathematics, alextmb@mail.ru; TSTU, Tambov, Russia

Keywords: approximate units; maximum marks; convolution operators; means of Fourier series and conjugate series.

Abstract: Two classes of convolution operators generated by functions from weighted Lebesgue spaces are considered. In terms of conditions on the Fourier coefficients of families of integral kernels, the maximum estimates for the weight L^p-norms of convolution operators of strong ($p > 1$) and weak ($p \geq 1$) types are established. Convergence theorems are proposed; approximative units are constructed in the corresponding *-algebra. The results obtained are extended to families of linear mean Fourier series and conjugate series. In particular, exponential summation methods and their applications to generalized fractional integrals are considered.

References

1. Rozenblum M. Summability of Fourier Series in $L^p(d\mu)$, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1962, vol. 105, no. 2, pp. 32-42.

2. Muckenhoupt B. Weighted Norm Inequalities for the Hardy Maximal Function, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1972, vol. 165, pp. 207-226.

3. Karamata J., Tomic M. Sur la Sommation des Series de Fourier des Functions Continue, *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe scL.*, 1955, no. 8, pp. 123-138.

4. Karamata J. Suite de Fonctionelles Lineaires et Facteurs de Convergence des Series de Fourier, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1956, vol. 35, no. 1, pp. 87-95.

5. Bausov L.I. [On linear methods of summation of Fourier series], *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical collection], 1965, vol. 68 (110), no. 3, pp. 313-327. (In Russ.)

6. Edvards R. *Ryady Fur'ye v sovremennom izlozhenii. V 2-kh tomakh* [Fourier series in modern presentation. In 2 volumes], Moscow: Mir, 1985, vol. 1, 260 p. (In Russ.)

7. Zygmund A. *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959.

8. Nakhman A.D. [Boundedness of families of convolution operators in spaces], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 449-460, doi: 10.17277/vestnik.2021.03.pp.449-460 (In Russ., abstract in Eng.)

9. Nakhman A.D., Osilenker B.P. [Exponential summation methods for Fourier series], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 101-109. (In Russ., abstract in Eng.)

10. Hunt R.A., Muckenhoupt B., Wheeden R. Weighted Norm Inequalities for Conjugate Function and Hilbert Transform, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1973, vol. 176, pp. 227-251.

11. Nakhman A.D., Osilenker B.P. Regular Semi-Continuous Methods of Summation of Fourier Series, *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 135-148, doi: 10.17277/vestnik.2017.01.pp.135-148 (In Eng., abstract in Russ.)

12. Hunt R.A., Young Wo-Sang Weighted Norm Inequality for Fourier Series, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1974, vol. 80, no. 2, pp. 274-277.

13. Osilenker B.P., Nakhman A.D. [Problems associated with the Dirichlet representation of a semigroup of operators], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 492-511, doi: 10.17277/vestnik.2018.03.pp.492-511 (In Russ., abstract in Eng.)

Zwei Klassen von Faltungsoperatoren in gewichteten Lebesgue-Räumen

Zusammenfassung: Es sind zwei Klassen von Faltungsoperatoren betrachtet, die durch Funktionen aus gewichteten Lebesgue-Räumen erzeugt sind. In Bezug auf die Bedingungen für die Fourier-Koeffizienten von Integralkernfamilien sind die maximalen Schätzungen für die L^p-Gewichtungsnormen von Faltungsoperatoren vom starken ($p > 1$) und schwachen ($p \geq 1$) Typ festgelegt. Konvergenztheoreme sind vorgeschlagen; approximative Einheiten sind in der entsprechenden *-Algebra konstruiert. Die erhaltenen Ergebnisse sind auf Familien von linearen gemittelten Fourier-Reihen und konjugierten Reihen erweitert. Insbesondere sind exponentielle Summationsmethoden und ihre Anwendung auf verallgemeinerte Bruchintegrale untersucht.

Deux classes d'opérateurs de convolution dans les espaces de poids lebesgue

Résumé: Sont examinées deux classes d'opérateurs de convolution générés par des fonctions à partir des espaces de poids de lebesgue. En termes de conditions sur les coefficients de Fourier des familles de noyaux intégraux, sont établies les estimations maximales des poids-normes L^p des opérateurs de convolution de type fort ($p > 1$) et faible ($p \geq 1$). Sont proposées des théorèmes de convergence des unités approximatives; sont construites les unites approximatives dans l'algèbre* correspondante. Les résultats obtenus sont transférés aux familles de séries moyennes linéaires de Fourier et de séries conjuguées. En particulier, sont examinées les méthodes exponentielles de sommation et leur application à l'intégrale fractionnaire généralisée.

Авторы: ***Осиленкер Борис Петрович*** – доктор физико-математических наук, профессор; ***Нахман Александр Давидович*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», ФГБОУ ВО «ТГТУ», Тамбов, Россия.