УДК 517.518
DOI: 10.17277/vestnik.2022.03.pp.496-506

ОБОБЩЕННЫЕ ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ РЯДОВ ФУРЬЕ

А. Д. Нахман

Кафедра «Высшая математика», alextmb@mail.ru;
ФГБОУ ВО «ТГТУ», Тамбов, Россия

Ключевые слова: дробное интегрирование; оценки сильного и слабого типа; экспоненциальные методы суммирования.

Аннотация: Введено в рассмотрение семейство комплекснозначных экспоненциальных методов суммирования рядов Фурье и сопряженных рядов. Получено представление соответствующих операторов в виде суммы средних и сопряженных средних, определяемых действительнозначными суммирующими последовательностями. Установлены L^p-оценки сильного и слабого типа и получены условия суммируемости почти всюду в терминах квазивыпуклости метода суммирования. Результаты включают в себя L^p-ограниченность дробных интегралов ряда Фурье.

1. Постановка задачи

Рассмотрим произвольную 2π-периодическую суммируемую на $Q=[-\pi,\pi]$ функцию $f(x)$, ее коэффициенты Фурье

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-ikt)\,dt\,, \tag{1.1}$$

ряд Фурье

$$s[f,x]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\exp(ikx) \tag{1.2}$$

и сопряженный ряд

$$\tilde{s}[f,x]=-i\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\operatorname{sgn} k)c_k(f)\exp(ikx)\,. \tag{1.3}$$

Будем считать, что среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ равно нулю, так что $c_0(f)=0$. В этом случае определены операторы

$$I_h:\quad f\mapsto I_h[f,x]=\sum_{|k|>0} c_k(f)\frac{\exp(ikx)}{(ik)^h}. \tag{1.4}$$

При $h=1$ ряд (1.4) представляет собою формально проинтегрированный ряд Фурье (точнее, одну из его первообразных), при $h=2,3,\ldots$ – результат двукратного, трехкратного, … интегрирования. При нецелых $h>0$ говорят, что $I_h[f,x]$ есть дробный интеграл ряда Фурье (см. [1, т. 1, с. 200–201]). Если при этом устремить h к нулю, то естественно ожидать, что в пределе будут получаться значения $f(x)$. Ряд (1.4) можно рассматривать как результат применения к (1.2) метода суммирования $\lambda=\{\lambda_k(h)\}$, определяемого последовательностью

$$\lambda_k(h)=\exp(-h\ln ik),\ \ k=1,2,\ldots. \tag{1.5}$$

Близкая задача об экспоненциальных методах суммирования рассматривалась в [2, 3]. А именно, изучались семейства средних

$$U_h\left(f,x;\lambda^{\#}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k^{\#}(h)c_k(f)\exp(ikx),\quad h>0 \tag{1.6}$$

ряда (1.2) и средних

$$\tilde{U}_h\left(f,x;\lambda^{\#}\right)=-i\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\operatorname{sgn}k)\lambda_k^{\#}(h)c_k(f)\exp(ikx),\ \ h>0 \tag{1.7}$$

сопряженного ряда Фурье (1.3) в случае $\lambda_k^{\#}(h)=\exp(-h\varphi(|k|))$. При этом функция $\varphi(x)$ с действительными значениями предполагалась непрерывной, возрастающей к $+\infty$ на $[0,+\infty)$, дважды дифференцируемой на $(0,+\infty)$ и $\varphi(0)=0$. Именно такие функции будем рассматривать на протяжении всей настоящей работы. В случае же (1.5) имеем комплексную экспоненту

$$\lambda_k(h)=\exp\left(-h\left(\ln|k|+i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}k\right)\right),\ \ k=\pm1,\ \pm2,\ldots. \tag{1.8}$$

Как установлено в [1, т. 2, с. 201], интегральное ядро средних (1.4) линейным образом выражается через интегральные ядра (1.6) и (1.7), где $\varphi(|k|)=\ln|k|$. Получим, прежде всего, аналогичный результат в более общем направлении, рассматривая

$$\lambda_k(h)=\exp\bigl(-h(\varphi(k)+i\psi(k)\bigr),\ \ k=\pm1,\ \pm2,\ldots \tag{1.9}$$

и ограничиваясь случаем четной φ и нечетной ψ, $\varphi(0)=\psi(0)=0$ (что выполнено, в частности, для (1.8)).

Следующим шагом будет получение L^p-оценок λ-средних сильного и слабого типа. Наконец, мы придем к утверждению о сходимости при $h\to+0$ семейства обобщенных дробных интегралов.

Отметим, что непосредственно ряд Фурье как аппарат аппроксимации функций, вообще говоря, не пригоден в силу известных примеров расходящихся рядов Фурье (см.[1, т. 1, гл. 8, с. 470 – 494]).

2. Редукция к исследованию средних ряда Фурье и сопряженного ряда

Положим $\mu=\{\mu_k(\varphi,\psi;h)\}$, $\nu=\{\nu_k(\varphi,\psi;h)\}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots;$ здесь

$$\mu_k(\varphi,\psi;h)=\cos(h\psi(k))\exp(-h\varphi(k)),\quad \nu_k(\varphi,\psi;h)=\sin(h\psi(k))\exp(-h\varphi(k)) \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. Пусть последовательность $\{\lambda_k(h)\}$ определена соотношением (1.9), среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ равно нулю и

$$J_h(f) = J_h(f, x; \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k(h) c_k(f) \exp(ikx)\,. \tag{2.2}$$

Тогда

$$J_h(f, x; \lambda) = U_h(f, x; \mu) + \tilde{U}_h(f, x; \nu)\,. \tag{2.3}$$

Доказательство. Согласно (1.1), (1.9) и в силу нечетности функции ψ, имеем (2.2) в виде

$$J_h(f, x; \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \exp i(kt - h\psi(k)) \exp(-h\varphi(k))\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-h\varphi(k)) \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\exp i(kt - h\psi(k)) + \exp i(-kt + h\psi(k))}{2} dt =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-h\varphi(k)) \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cos(kt - h\psi(k))\, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(h\psi(k)) \exp(-h\varphi(k)) \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cos kt\, dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(h\psi(k)) \exp(-h\varphi(k)) \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \sin kt\, dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Используя обозначения (2.1) и добавляя к сумме в правой части (2.4) нулевое слагаемое

$$\frac{\mu_0(\varphi, \psi, h)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, dt\,,$$

получим

$$\begin{aligned} J_h(f, x; \lambda) = \frac{\mu_0(\varphi, \psi; h)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(\varphi, \psi; h) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cos kt\, dt + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(\varphi, \psi; h) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \sin kt\, dt. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В правой части (2.5) мы узнаем сумму μ-средних ряда Фурье функции f и ν-средних сопряженного ряда (см. (1.6) и (1.7)), записанных в интегральной форме (см. также [2]), чем и завершается доказательство (2.3).

3. L^p-оценки

Пусть

$$\| f \|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} | f(x) |^p dx \right)^{1/p}$$

– норма в Лебеговом пространстве $L^p = L^p(Q)$ $\quad (p > 0; \quad L = L^1; \ \| f \| = \| f \|_1)$.

Для любой последовательности $\xi = \{\xi_k(h)\}$ рассмотрим ее первые и вторые конечные разности

$$\Delta\xi_k(h) = \xi_k(h) - \xi_{k+1}(h),\ \Delta\xi_k^2(h) = \Delta(\Delta\xi_k(h)),\ k = 0, 1, \dots .$$

Положим

$$\sum(\xi, h) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\xi_k(h)\right|, \quad \sum{}^*(\xi) = \sup_{h>0}\sum(\xi, h)$$

и

$$J_*(f, \lambda) = J_*(f, x; \lambda) = \sup_{h>0} | J_h(f, x; \lambda) | .$$

Теорема 3.1. Пусть

$$\left(|\,\mu_k(\varphi,\psi,h)\,| + |\,\nu_k(\varphi,\psi;h)\,|\right)\ln k = O_h(1),\ h > 0. \tag{3.1}$$

Тогда имеют место оценки

$$\| J_*(f; \lambda) \|_p \le C_p\left(\sum{}^*(\mu) + \sum{}^*(\nu)\right)\| (f) \|_p, \quad p > 1; \tag{3.2}$$

$$\| J_*(f; \lambda) \| \le C\left(\sum{}^*(\mu) + \sum{}^*(\nu)\right)\left(1 + \| f(\ln^+ | f |) \|\right); \tag{3.3}$$

$$\| J_*(f; \lambda) \|_p \le C_p\left(\sum{}^*(\mu) + \sum{}^*(\nu)\right)\| (f) \|,\ 0 < p < 1 . \tag{3.4}$$

Кроме того, справедлива следующая оценка слабого типа:

$$|\, x \in Q \,|\, J_*(f, x; \lambda) > \eta > 0 \,| \le C\left(\sum{}^*(\mu) + \sum{}^*(\nu)\right)\frac{\| f \|}{\eta}, \quad p \ge 1 . \tag{3.5}$$

Здесь и в дальнейшем через C обозначаем постоянные, различные, вообще говоря, в различных формулах и зависящие лишь от явно указанных индексов.

Доказательство. Согласно (2.3) рассмотрение сводится к верхним оценкам для $\sup\limits_{h>0} | U_h(f, x; \mu) |$ и $\sup\limits_{h>0} | \tilde{U}_h(f, x; \nu) |$. Можно считать $\sum{}^*(\mu) + \sum{}^*(\nu) < \infty$, иначе утверждения теоремы очевидны.

В работе [2] при условии (3.1) установлено, что

$$\sup_{h>0} | U_h(f, x; \mu) | \le C_\mu \sum{}^*(\mu) f^*(x) \tag{3.6}$$

и

$$\sup_{h>0} | \tilde{U}_h(f, x; \nu) | \le C_\nu \sum{}^*(\nu)\left(f^*(x) + Tf(x)\right), \tag{3.7}$$

где максимальные функции в правой частях неравенств (3.6), (3.7) определены соотношениями:

$$f^* = f^*(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} | f(t) | \, dt \tag{3.8}$$

и

$$Tf = Tf(x) = \sup_{h>0} \left| \int_{h \le |t| \le \pi} \frac{f(x+t)}{2tg\,\frac{t}{2}} dt \right| . \tag{3.9}$$

Известно [1, т. 1, с. 54 – 61 и с. 442–443], что для L^p -норм (3.8), (3.9) имеют место оценки типа (3.2) – (3.5) с постоянными C_p, зависящими только от соответствующих p (суммы $\sum^*(\mu)$ и $\sum^*(\nu)$ в оценках для f^* и Tf, очевидно, отсутствуют). Теперь утверждения (3.2) – (3.5) вытекают из (3.6) и (3.7). Теорема 3.1 доказана.

Интересно отметить следующее обстоятельство. Как известно [4, т. 1, с. 27 – 30], в гармоническом анализе важную роль играют операторы сдвига, определяемые для каждой $f \in L$ в виде

$$\tau_h(f): f(x) \mapsto f(x-h) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\exp(-ikh)\exp(ikx), \quad h>0. \tag{3.10}$$

Семейство операторов (2.2)

$$J_h(f): f(x) \mapsto J_h(f,x;\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\exp\big(-h\big(\varphi(k)+i\psi(k)\big)\big)\exp(ikx) \tag{3.11}$$

включает в себя (3.10) и может рассматриваться как обобщение класса операторов сдвига, что повышает интерес к исследованию поведения (3.11).

4. Оценки сильного и слабого типа: частный случай

Рассмотрим наиболее простой, но и наиболее интересный для наших целей случай $\psi(k) = \omega \operatorname{sgn} k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $\omega > 0$ – абсолютная постоянная. В этом случае утверждение леммы 2.1 принимает вид

$$J_h(f,x;\lambda) = \cos(h\omega)U_h(f,x;\xi) + \sin(h\omega)\,\tilde{U}_h(f,x;\xi), \tag{4.1}$$

где, как указано выше (см.(1.9)),

$$\lambda_k(h) = \exp(-h(\varphi(k) + i\omega \operatorname{sgn} k)), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4.2}$$

и

$$\xi_k(h) = \exp(-h\varphi(k)), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{4.3}$$

Отметим, что в интегральной форме (2.4) преобразуется к виду

$$J_h(f,x;\lambda) = \cos(h\omega)\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-h\varphi(k))\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\cos kt\,dt +$$

$$+\sin(h\omega)\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-h\varphi(k))\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\sin kt\,dt.$$

Из результата (4.1) вытекает теперь такой частный случай теоремы 3.1

Теорема 4.1. Пусть последовательности $\lambda = \{\lambda_k(h)\}$ и $\xi = \{\xi_k(h)\}$ определены соотношениями (4.2) и (4.3) соответственно. Тогда при условии

$$\xi_k(h)\ln k = O_h(1), \quad h > 0 \tag{4.4}$$

имеют место оценки:

$$\| J^*(f;\lambda)\|_p \le C_p \sum{}^*(\xi)\,\|(f)\|_p, \quad p>1; \tag{4.5}$$

$$\| J^*(f;\lambda)\| \le C\sum{}^*(\xi)\,(1+\| f(\ln^+|f|)\|); \tag{4.6}$$

$$\| J_*(f;\lambda) \|_p \le C_p \sum{}^*(\xi) \| (f) \|, \quad 0 < p < 1; \tag{4.7}$$

$$| x \in Q \mid J_*(f, x; \lambda) > \eta > 0 | \le C \sum{}^*(\xi) \frac{\| f \|}{\eta}, \quad p \ge 1. \tag{4.8}$$

5. Сходимость средних

Теорема 5.1. Пусть для последовательности (4.3) выполнены условия (4.4) и

$$\sum{}^*(\xi) < +\infty. \tag{5.1}$$

Тогда соотношение

$$\lim_{h \to +0} J_h(f) = f \tag{5.2}$$

имеет место почти всюду в Q для каждой $f \in L$ и в метрике $L^p = L^p(Q)$ при любом $p > 1$.

Доказательство. В работе [2] установлен следующий общий факт. Пусть произвольная последовательность действительных чисел $\xi = \{\xi_k(h)\}$ удовлетворяет условиям (4.4), (5.1) и

$$\xi_0(h) = 1, \quad \lim_{k \to +\infty} \xi_k(h) = 0 \ \ (h > 0), \quad \lim_{h \to 0} \xi_k(h) = 1, \quad k = 0, 1, \dots. \tag{5.3}$$

Тогда соотношения:

$$\lim_{h \to 0} U_h(f) = f; \tag{5.4}$$

$$\lim_{h \to 0} \tilde{U}_h(f) = \tilde{f} \tag{5.5}$$

справедливы почти всюду в Q для всякой $f \in L(Q)$ и в метрике каждого из пространств $L^p = L^p(Q)$, $p > 1$. Здесь

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\varepsilon \le |t| \le \pi} f(x+t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \tag{5.6}$$

– сопряженная функция; функция (5.6) существует почти всюду для каждой $f \in L$ ([1, т. 1, с. 402]).

Очевидно, что условия (5.3) выполнены в случае последовательности (4.3) с учетом условий на функцию $\varphi(x)$, наложенных выше.

Теперь утверждение (5.2) теоремы является прямым следствием соотношений (5.4), (5.5) и (4.1).

6. Случай выпуклых и кусочно-выпуклых последовательностей

В настоящем пункте речь пойдет о последовательностях $\xi = \{\xi_k(h)\}$, у которых вторые разности не меняют свой знак или меняют его конечное число раз. Обсудим, как в этом случае могут быть реализованы условия (5.1) и (4.4). В работе [3] установлено, что если равномерно по k и h имеет место соотношение

$$| \xi_k(h) | + k \, | \Delta \xi_k(h) | = O(1), \tag{6.1}$$

то выполнено условие (5.1). В частном же случае выпуклых (вогнутых) последовательностей ограничение (6.1) можно снять (см. [1, т. 1, с. 155–156]).

Для суммирующей последовательности (4.3) очевидно, что

$$\xi_k(h) = \frac{1}{\exp(h\varphi(k))} \le \frac{1}{\exp(h\varphi(0))} = 1 .$$

Далее, $k\Delta\xi_k(h)$ есть значение функции $x\exp(-h\varphi(x))(-h\varphi'(x))$, поэтому условие (6.1) теперь сведено к виду

$$hx\varphi'(x)\exp(-h\varphi(x)) = O(1) , \tag{6.2}$$

причем оценка (6.2) предполагается равномерной по x и h .

Проверка выпуклости (кусочной выпуклости) последовательности (4.3) в терминах функции $\varphi(x)$ сводится к исследованию знаков выражения (см. [2])

$$\left(\exp(-h\varphi(x))\right)'' = h\exp(-h\varphi(x))\left(h(\varphi'(x))^2 - \varphi''(x)\right). \tag{6.3}$$

Наконец, условие (4.4) принимает вид

$$\exp(-h\varphi(x))\ln x = O_h(1) . \tag{6.4}$$

В итоге, приходим к следующему результату. Если имеют место соотношения (6.2) и (6.4), а произведение (6.3) меняет знак конечное число раз, то справедливы утверждения разделов 4 и 5. Если же (6.3) знакопостоянно, то эти утверждения справедливы при одном лишь условии (6.4).

7. Предельное поведение дробных интегралов

Вернемся к случаю (1.5), рассматривая более общую последовательность

$$\lambda_k(h) = \exp\left(-h\left(\ln^{\alpha}|k| + i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} k\right)\right),\ k = \pm 1,\ \pm 2, ...,\quad \alpha > 0. \tag{7.1}$$

Установим, что для максимальных операторов $J_*(f,\lambda)$, определяемых последовательностью (7.1), имеют место L^p -оценки сильного и слабого типа (см. п. 4), а для $J_h(f,\lambda)$ справедливы утверждения о сходимости (5.2). Достаточно в случае $\varphi(x) = \ln^{\alpha} x$ исследовать знаки (6.3) и проверить условия (6.4) и (6.2).

Имеем

$$\begin{aligned} h(\varphi'(x))^2 - \varphi''(x) &= h\left(\frac{\alpha}{x}\ln^{\alpha-1} x\right)^2 - \left(-\frac{\alpha}{x^2}\ln^{\alpha-1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2}\ln^{\alpha-2} x\right) = \\ &= \frac{\alpha}{x^2}\ln^{\alpha-2} x\left(\alpha h\ln^{\alpha} x + \ln x - (\alpha-1)\right). \end{aligned} \tag{7.2}$$

При $0 < \alpha \le 1$ функция (7.2) сохраняет знак плюс; следовательно, последовательность $\xi = \{\exp(-h(\ln^{\alpha} k)\}$ выпукла. Если же $\alpha > 1$, то функция $\alpha h\ \ln^{\alpha} x - (\alpha-1) + \ln x$ возрастает с ростом x, а значит обращается в ноль ровно при одном значении x. Тогда последовательность ξ кусочно-выпукла. В обоих случаях проверяем (6.4), то есть

$$h\exp\left(-h\ln^{\alpha} x\right)\ln x = O_h(1),\quad x > 1 . \tag{7.3}$$

Согласно правилу Лопиталя, с ростом x левая часть (7.3) ведет себя как

$$\frac{hx^{-1}}{hx^{-1}\left(\ln^{\alpha-1} x\right)\exp\left(h\ln^{\alpha} x\right)} = \frac{\ln^{1-\alpha} x}{\exp\left(h\ln^{\alpha} x\right)} . \qquad (7.4)$$

Отношение (7.4) есть $o_h(1)$ при $\alpha \geq 1$. В случае $0 < \alpha < 1$ к правой части (7.4) снова применим правило Лопиталя и так поступаем ν раз, где ν – наименьшее натуральное число, для которого $1 - \nu\alpha \leq 0$. В результате

$$\frac{\ln^{1-\nu\alpha} x}{h\exp\left(h\ln^{\alpha} x\right)} \to 0, \quad x \to +\infty,$$

откуда и получаем требуемую оценку (7.3).

Для случая $\alpha > 1$ остается проверить (6.2), то есть

$$hx\left(\frac{\alpha}{x}\ln^{\alpha-1} x\right)\exp\left(-h\ln^{\alpha} x\right) = O(1)$$

или

$$\frac{h\alpha\ln^{\alpha-1} x}{\exp\left(h\ln^{\alpha} x\right)} = O(1) . \qquad (7.5)$$

Левая часть (7.5) очевидно ограничена по *h* (с ростом *h* достаточно применить правило Лопиталя, но на самом деле интересен лишь случай близких к нулю *h*). Если же $x \to +\infty$, то после применения правила Лопиталя получаем

$$\frac{(\alpha-1)\ln^{-1} x}{\exp\left(h\ln^{\alpha} x\right)} \to 0, \quad x \to +\infty.$$

Значит, ограниченность по x также установлена.

Условия теорем 4.1 и 5.1, таким образом, выполнены.

Частным случаем доказанного утверждения является L^p-ограниченность $\sup\limits_{h>0} | I_h[f, x] |$ и сходимость

$$\lim_{h\to+0} I_h[f, x] = f(x)$$

почти всюду в Q для каждой $f \in L$ и в метрике $L^p = L^p(Q)$ при любом $p > 1$.

Заметим, что близкий результат (а именно L^p-ограниченность семейства дробных интегралов ряда Фурье-Гегенбауэра) был получен другим способом в работе [5, с. 75, теорема 12].

Другим примером метода суммирования (4.3), удовлетворяющего условиям теорем 4.1 и 5.1, может служить метод

$$\lambda_k(h) = \exp\left(-h\left(|k|^{\alpha} + i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} k\right)\right), \quad k = \pm1, \pm 2, ..., \quad \alpha > 0. \qquad (7.6)$$

Здесь $\varphi(x) = x^{\alpha}$; очевидно, что выполнено (6.4):

$$\exp\left(-hx^{\alpha}\right)\ln x = O_h(1), \quad \text{если } x \to +\infty .$$

Далее (см. (6.3)),

$$h(\varphi'(x))^2-\varphi''(x)=\alpha x^{\alpha-2}\left(\alpha h\ x^{\alpha}-(\alpha-1)\right). \tag{7.7}$$

При $0<\alpha\le 1$ функция (7.7) сохраняет знак плюс; следовательно, последовательность $\xi=\{\exp(-h\,|\,k\,|^{\alpha})\}$ выпукла. Если же $\alpha>1$, то выражение (7.7), возрастая с ростом x, обращается в ноль ровно при одном значении x. Тогда последовательность ξ кусочно-выпукла.

Наконец (см. (6.2)), произведение $hx\varphi'(x)\exp(-h\varphi(x))=hx^{\alpha}\exp\left(-hx^{\alpha}\right)$ равномерно ограничено как выражение вида $t\exp(-t)$, $t>0$.

Таким образом, для метода суммирования (7.6) справедливы утверждения теорем 4.1 и 5.1.

8. Поведение дробных интегралов сопряженного ряда Фурье

Применим теперь метод суммирования (4.2) к сопряженному ряду Фурье (1.3), рассматривая семейство операторов $f\mapsto \tilde{J}_h(f)$, где

$$\tilde{J}_h(f)=\tilde{J}_h(f,x;\lambda)=-i\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\operatorname{sgn}k)\lambda_k(h)c_k(f)\exp(ikx). \tag{8.1}$$

Получим, прежде всего, соответствующий аналог утверждения леммы 2.1. С учетом (1.1) будем иметь следующее представление (8.1):

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_h(f,x;\lambda)&=-i\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\operatorname{sgn}k)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\exp i(kt-h\omega\operatorname{sgn}k)\exp(-h\varphi(k))\,dt=\\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-h\varphi(k))\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\frac{\exp i(kt-h\omega)-\exp i(-kt+h\omega)}{2i}dt=\\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-h\varphi(k))\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\sin(kt-h\omega)\,dt=\\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos(h\omega)\exp(-h\varphi(k))\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\sin kt\,dt-\\
&-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin(h\omega)\exp(-h\varphi(k))\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\cos kt\,dt=\\
&=\cos(h\omega)\tilde{U}_h(f,x;\xi)-\sin(h\omega)U_h(f,x;\xi),
\end{aligned} \tag{8.2}$$

где последовательность ξ определена соотношением (4.3). Положим

$$\tilde{J}_*(f,\lambda)=\tilde{J}_*(f,x;\lambda)=\sup_{h>0}|\,\tilde{J}_h(f,x;\lambda)\,|.$$

Принимая во внимание соотношение (8.2) и оценки (3.6), (3.7), получаем следующий аналог теоремы 4.1.

Теорема 8.1. Пусть выполнено условие (4.4). Тогда утверждения (4.5) – (4.8) имеют место с заменой $J_*(f, \lambda)$ на $\tilde{J}_*(f, \lambda)$.

Используя представление (8.2) и соотношения (5.4), (5.5), приходим к следующему аналогу теоремы 5.1.

Теорема 8.2. Пусть для последовательности (4.3) выполнены условия (4.4) и (5.1). Тогда соотношение

$$\lim_{h \to +0} \tilde{J}_h(f) = \tilde{f}$$

имеет место почти всюду в Q для каждой $f \in L$ и в метрике $L^p = L^p(Q)$ при любом $p > 1$.

Список литературы

1. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : в 2 томах / А. Зигмунд ; пер. с англ. – М. : Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с. ; Т. 2. – 537 с.

2. 10. Нахман, А. Д. Экспоненциальные методы суммирования рядов Фурье / А. Д. Нахман, Б. П. Осиленкер // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 101 – 109.

3. Осиленкер, Б. П. Задачи, ассоциированные с представлением Дирихле полугруппы операторов / Б. П. Осиленкер, А. Д. Нахман // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 492 – 511. doi: 10.17277/vestnik.2018.03.pp.492-511

4. Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении : в 2 томах / Р. Эдвардс ; пер. с англ. – М. : Мир, 1985. – Т. 1. – 264 с. ; Т. 2. – 400 с.

5. Muckenhoupt, B. Classical Expansions and Their Relation to Conjugate Harmonic Functions / B. Muckenhoupt, E. M. Stein // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – Vol. 118, No. 6. – P. 17 – 92. doi: 10.1090/S0002-9947-1965-0199636-9

Generalized Fractional Integrals of the Fourier Series

A. D. Nakhman

Department of Higher Mathematics, alextmb@mail.ru;
TSTU, Tambov, Russia

Keywords: fractional integration; estimates of strong and weak type; exponential summation methods.

Abstract: A family of complex-valued exponential summation methods for Fourier series and conjugate series is introduced. A representation of the corresponding operators as a sum of means and conjugate means determined by real-valued summing sequences is obtained. The L^p-estimates of strong and weak types were establish and conditions for summability almost everywhere in terms of the quasi-convexity of the summation method were found. The results include the L^p-boundedness of the fractional integrals of the Fourier series.

References

1. Zygmund A. *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959.

2. Nakhman A.D., Osilenker B.P. [Exponential methods of summation of Fourier series], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 101-109. (In Russ., abstract in Eng.)

3. Osilenker B.P., Nakhman A.D. [Problems associated with the Dirichlet representation of a semigroup of operators], *Transactions of the Tambov State Technical University,* 2018, vol. 24, no. 3, pp. 492-511, doi: 10.17277/vestnik.2018.03.pp.492-511 (In Russ., abstract in Eng.)

4. Edwards R.E. *Fourier Series: A Modern Introduction*, Springer-Verlag, 1979, vol. 1, 1982, vol. 2.

5. Muckenhoupt B., Stein E.M. Classical Expansions and Their Relation to Conjugate Harmonic Functions, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1965, vol. 118, no. 6, pp.17-92, doi: 10.1090/S0002-9947-1965-0199636-9

Verallgemeinerte Bruchintegrale von Fourier-Reihen

Zusammenfassung: Eine Familie komplexer exponentieller Methoden zur Summierung von Fourier-Reihen und verknüpften Reihen ist in Betracht gezogen. Es ist eine Darstellung der entsprechenden Operatoren als Summe der Mittelwerte und konjugierter Mittelwerte erhalten, die durch tatsächliche Summensequenzen definiert werden. L^p-Bewertungen des starken und schwachen Typs sind festgelegt und die Summierbarkeitsbedingungen sind fast überall in Bezug auf die Quasikonvexität der Summierungs-Methode erhalten. Die Ergebnisse umfassen die L^p-Limitierung von Bruchintegralen der Fourier-Reihe.

Intégrales fractionnaires généralisées des séries de Fourier

Résumé: Est introduite dans l'examination la famille des méthodes exponentielles complexes de sommation des séries de Fourier et des séries conjuguées. Est obtenue une représentation des opérateurs correspondants sous la forme d'une somme des moyennes et des moyennes conjuguées définies par des séquences de sommation à valeur réelle. Sont établies les valeurs L^p des types fort et faible sommabilité; sont obtenues presque partout les conditions de sommabilité sont obtenues en termes de quasi-bulle de la méthode de sommation. Les résultats incluent la limite L^p des intégrales fractionnaires de la série de Fourier.

Автор: ***Нахман Александр Давидович*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», ФГБОУ ВО «ТГТУ», Тамбов, Россия.