

## О ВОЗМОЖНОСТИ НАБЛЮДЕНИЯ ИССЛЕДУЕМОГО ПАРАМЕТРА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИКИ В НЕКОТОРОЙ СТРУКТУРЕ ВРЕМЕННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Е. И. Алгазин

*Кафедра «Электроника и электротехника», evgeniialgazin@gmail.com;  
ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет»,  
Новосибирск, Россия*

**Ключевые слова:** линейная система автоматики; поворотный множитель; структуры временных соотношений.

**Аннотация.** Исследованы вопросы возможности наблюдения параметра  $U_C$  (напряжения на конденсаторе), сформированного в любой из трех структур времени. Показаны варианты формирования мгновенного значения исследуемого параметра как для цепей с обычным резистивным элементом, так и с элементом, обладающим отрицательным сопротивлением. Используются подходы и понятия электротехники и математический аппарат теории функции комплексной переменной, применительно к линейным системам автоматики.

---

### Введение

В данной работе исследуемым параметром является напряжение на конденсаторе  $U_C$  в цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора и емкости, предварительно заряженной до напряжения  $U_0$  [1].

Существует несколько форм представления исследуемого параметра: экспоненциальная, тригонометрическая и алгебраическая. Еще одна форма, получаемая из экспоненциальной формы исследуемого параметра, называется *мгновенные значения параметра*.

Имея электрическую цепь линейной системы автоматики (ЛСА), можно получить аналитическое выражение исследуемого параметра в требуемой структуре временных соотношений [2]. Выражение, полученное с учетом такой структуры, позволяет сформировать конечное аналитическое выражение исследуемого параметра  $U_C$ , реализованное в вещественной структуре.

Получить в расчетном виде требуемые аналитические выражения инструментально – не очень сложная задача. Она сводится к использованию формулы Эйлера, с помощью которой экспонента с мнимым показателем сводится к сумме тригонометрических функций. Более сложной задачей является построение электрической схемы, формирующей требуемый закон изменения исследуемого параметра. В этом случае целесообразно начать с качественного решения задачи, заключающегося в нахождении конфигурации электрической ЛСА, обеспечивающей формирование требуемого либо близкого к требуемому закону изменения напряжения  $U_C$ .

Следует отметить важный аспект – в мнимой структуре времени при наличии резистора имеет место отсутствие диссипации, так как в показателе экспоненты корень, умноженный на мнимое время тождественен мнимому корню, умноженному на вещественное время. А мнимый корень обуславливает незатухающие процессы, свойственные исследуемому параметру.

Цель работы – найти аналитические выражения мгновенных значений  $U_C$  в пилотной цепи с учетом структуры временных соотношений, с использованием методов и подходов, свойственных электротехнике и понятных большинству технических специалистов, а также положений теории комплексных чисел и функций комплексного переменного.

### Постановка задачи

Дана пилотная цепь, состоящая из последовательно соединенных резистора, обладающего сопротивлением  $R$ , и конденсатора, обладающего емкостью  $C$ . Конденсатор предварительно заряжен до напряжения  $U_0$ . В дальнейшем такая цепь будет называться  $R-C-0-U_0$ .

Приняты следующие допущения:

- все элементы рассматриваемой цепи сосредоточенные и линейны;
- существует мнимая, комплексная и вещественная структуры времени.

Необходимо:

1. Использовать выражение исследуемого параметра  $U_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$  для формирования и анализа выражения мгновенного значения  $U_C$  во всех трех структурах.
2. Для полноты оценки структур времени дополнить описание  $U_C$  выражением мгновенного значения в цепи  $R-C-0-U_0$  в каждой структуре времени.
3. Используя энергетический критерий вида

$$\frac{CU_0^2}{2} - R \int_0^{T_{\text{дисс}}} i^2(t) dt = \epsilon ps,$$

где  $\epsilon ps$  – константа порядка  $10^{-3} \dots 10^{-5}$ , позволяющая качественно оценить время диссипации  $T_{\text{дисс}}$  в каждой структуре времени.

### Пути решения

Сформируем выражения для мгновенных значений исследуемого параметра во всех трех структурах времени.

В структуре  $jt$ :

$$U_C(jt) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}jt} = U_0 \cos\left(\frac{1}{RC}t\right) - jU_0 \sin\left(\frac{1}{RC}t\right) = a(t) + jb(t),$$

где  $a(t)$ ,  $b(t)$  – соответственно вещественная и мнимая части  $U_C(jt)$ ;

$$U_m(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}, \quad \varphi(t) = \arctg\left(-\frac{b(t)}{a(t)}\right),$$

где  $U_m(t)$  – модуль;  $\varphi(t)$  – фаза исследуемого параметра.

Выражение мгновенного значения  $U_C$  для пилотной цепи  $R-C-0-U_0$  в структуре  $jt$ , сформированное в вещественном времени  $t$ , примет вид

$$U_C(jt) = U_m(t) \sin\left(\frac{1}{RC}t - \varphi(t)\right).$$

В структуре  $t + jt$ :

$$U_C(t + jt) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t - j\frac{1}{RC}t} = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \cos\left(\frac{1}{RC}t - jU_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \sin\left(\frac{1}{RC}t\right)\right) = e^{-\frac{1}{RC}t} (a(t) - jb(t)),$$

где  $a(t)$ ,  $b(t)$  – соответственно вещественная и мнимая части  $U_C(t + jt)$ ;

$$U_m(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}, \quad \varphi(t) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b(t)}{a(t)}\right).$$

Выражение для мгновенного значения  $U_C$  для пилотной цепи R–C–0– $U_0$  в структуре  $t + jt$ , сформированное в вещественном времени, следующее:

$$U_C(t + jt) = U_m(t) e^{-\frac{1}{RC}t} \sin\left(\frac{1}{RC}t - \varphi(t)\right).$$

В структуре  $t$  выражение для мгновенного значения  $U_C$  для пилотной цепи R–C–0– $U_0$ , сформированное в вещественном времени, имеет вид

$$U_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Следует различать вещественную структуру временных соотношений  $t$  и параметр  $t$  под знаком  $\sin$ . Такой параметр измеряется независимым временем  $t$  хронометра независимого наблюдателя. В вещественной структуре  $t$  время описывается вещественной переменной  $t$ , которая измеряется аналогично.

Сформируем окончательные выражения для мгновенных значений исследуемого параметра  $U_C$ , находящегося в структурах  $jt$ ,  $t + jt$  или  $t$  в виде функции, зависящей от  $t$ . Обычно в качестве такой функции используют тригонометрическую функцию  $\sin\left(\frac{1}{RC}t\right)$ .

В структуре  $jt$ :

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b(t)}{a(t)}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sin\left(\frac{1}{RC}t\right)}{\cos\left(\frac{1}{RC}t\right)}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{RC}t\right)\right) = -\frac{1}{RC}t;$$

$$U_m(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)} = \sqrt{U_0^2 \cos^2\left(\frac{1}{RC}t\right) + U_0^2 \sin^2\left(\frac{1}{RC}t\right)} = \sqrt{U_0^2 \left(\cos^2\left(\frac{1}{RC}t\right) + \sin^2\left(\frac{1}{RC}t\right)\right)} = \sqrt{U_0^2 \cdot 1} = U_0.$$

Таким образом, требуемое представление для исследуемого параметра в структуре  $jt$  будет иметь следующий вид:

$$U_C(jt) = U_m(t) \sin\left(\frac{1}{RC}t - \varphi(t)\right) = U_0 \sin\left(\frac{1}{RC}t - \frac{1}{RC}t\right) = U_0 \sin(0) = 0.$$

На рисунке 1 изображен исследуемый параметр  $U_C(jt)$ .

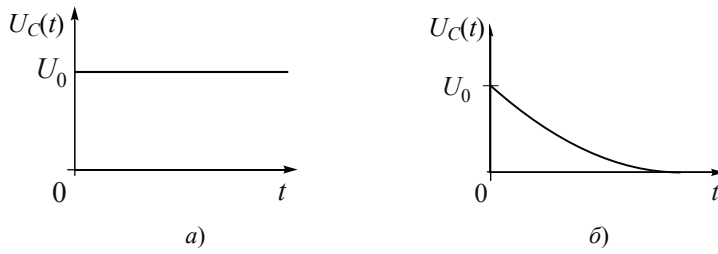


Рис. 1. Мгновенные значения  $U_C(jt)$ ,  $U_C(t+jt)$  (а) и  $U_C(t)$  (б) в структуре  $t$

В структуре  $t+jt$ :

$$\varphi(t) = \arctg\left(-\frac{b(t)}{a(t)}\right) = \arctg\left(-\frac{\sin\left(\frac{1}{RC}t\right)}{\cos\left(\frac{1}{RC}t\right)}\right) = -\arctg\left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{RC}t\right)\right) = -\frac{1}{RC}t;$$

$$U_m(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)} = \sqrt{U_0^2 \cos^2\left(\frac{1}{RC}t\right) + U_0^2 \sin^2\left(\frac{1}{RC}t\right)} =$$

$$= \sqrt{U_0^2 \left(\cos^2\left(\frac{1}{RC}t\right) + \sin^2\left(\frac{1}{RC}t\right)\right)} = \sqrt{U_0^2 \cdot 1} = U_0.$$

Таким образом, требуемое представление для исследуемого параметра в структуре  $t+jt$  будет иметь следующий вид:

$$U_C(t+jt) = U_m(t) e^{-\frac{1}{RC}t} \sin\left(\frac{1}{RC}t - \varphi(t)\right) =$$

$$= U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \sin\left(\frac{1}{RC}t - \frac{1}{RC}t\right) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \sin(0) = 0.$$

Исследуемый параметр  $U_C(t+jt)$  имеет такую же картину что и для  $U_C(jt)$  (см. рис. 1, а).

В структуре  $t$

$$U_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

На рисунке 1, б, изображена затухающая экспонента.

Таким образом, можно использовать поворотный множитель, чтобы перевести  $U_C$  в требуемую структуру времени.

Необходимо также получить выражение для мгновенного значения  $U_C$ , находящегося в структуре  $jt$  или  $t+jt$  в вещественном времени.

Для мгновенных значений и для  $U_C$  в структурах  $jt$ ,  $t+jt$  и  $t$  должно выполняться равенство: при  $t=0$   $U_C = U_0$ .

В структуре  $jt$ :

$$U_C(jt) = U_0 e^{-jt \frac{1}{RC}};$$

при  $t=0$

$$U_C(jt) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}j \cdot 0} = U_0 \cdot 1 = U_0.$$

В структуре  $t + jt$ :

$$U_C(t + jt) = U_0 e^{-\frac{(t+jt)}{RC}};$$

при  $t = 0$

$$U_C(t + jt) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}(0+j0)} = U_0 \cdot 1 = U_0.$$

В структуре  $t$ :

$$U_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t};$$

при  $t = 0$

$$U_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}0} = U_0 \cdot 1 = U_0.$$

Следовательно, при выборе представления мгновенного значения  $U_C$ , находящегося в структуре  $jt$  и  $t + jt$ , необходимо выбирать функцию косинус, а не синус.

Тогда получим:

В структуре  $jt$

$$U_C(jt) = U_0 \cos\left(\frac{1}{RC}t - \frac{1}{RC}t\right) = U_0 \cos(0) = U_0 \cdot 1 = U_0.$$

В структуре  $t + jt$

$$U_C(t + jt) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \cos\left(\frac{1}{RC}t - \frac{1}{RC}t\right) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \cos(0) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \cdot 1 = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

В структуре  $t$

$$U_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Графики исследуемого параметра, находящегося в структурах  $jt$ ,  $t + jt$  и  $t$  совпадают (см. рис 1, 2). При этом в структуре  $jt$  отсутствует диссипация, а  $t + jt$  и  $t$  – имеет место быть. Параметр представлен мгновенными значениями в структуре  $t$ .

Сформируем поворотный множитель для структуры  $jt$ . Воздействуя им на исследуемый параметр  $U_C$  в структуре  $t$ , получим  $U_C(t) = U_0$  без затухания при всех значениях  $t \in [0, \infty]$ , при этом наблюдаем мгновенные значения  $U_C(jt)$  в структуре  $t$ .

Сформируем поворотный множитель для структуры  $t + jt$ . Воздействуя им на исследуемый параметр  $U_C$  в структуре  $t$ , получим  $U_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$  с затуханием при всех значениях  $t \in [0, \infty]$ , при этом наблюдаем мгновенные значения  $U_C(t + jt)$  в структуре  $t$ .

В структуре  $t$  наблюдаем параметр  $U_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$  непосредственно.

Как видим, в структуре  $jt$  отсутствует свободная составляющая исследуемого параметра  $U_C$  в цепи  $R-C-0-U_0$ . Поэтому переходного процесса нет.

Длительность функционирования равна либо от момента включения до  $\infty$ , либо от момента включения  $t_0$  до времени выключения ключа  $t_{\text{выкл}}$ .

Рассмотрим вышеописанные аналитические выражения при условии  $R < 0$  как для синусного, так и косинусного представления мгновенных значений исследуемого параметра  $U_C$ , сформированного во всех трех структурах временных соотношений.

В структуре  $jt$ :

$$R(t) = U_0;$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \left( \frac{1}{RC} t \right) \right) = \frac{1}{RC} t;$$

$$U_C(jt) = R(t) \sin \left( \frac{1}{RC} t + \frac{1}{RC} t \right) = U_0 \sin \left( \frac{2}{RC} t \right)$$

либо

$$R(t) = U_0; \quad \varphi(t) = \frac{1}{RC} t;$$

$$U_C(jt) = R(t) \cos \left( \frac{1}{RC} t + \frac{1}{RC} t \right) = U_0 \cos \left( \frac{2}{RC} t \right).$$

В структуре  $t + jt$ :

$$R(t) = U_0 e^{\frac{1}{RC} t}; \quad \varphi(t) = \frac{1}{RC} t;$$

$$U_C(t + jt) = U_0 e^{\frac{1}{RC} t} \sin \left( \frac{2}{RC} t \right)$$

либо

$$R(t) = U_0 e^{\frac{1}{RC} t}; \quad \varphi(t) = \frac{1}{RC} t;$$

$$U_C(t + jt) = U_0 e^{\frac{1}{RC} t} \cos \left( \frac{2}{RC} t \right).$$

В структуре  $t$

$$U_C(t) = U_0 e^{\frac{1}{RC} t}.$$

Используя энергетический критерий вида  $\frac{CU_0^2}{2} - R \int_0^{T_{\text{дисс}}} i^2(t) dt = 0$ , оценим

$T_{\text{дисс}}$  во всех трех структурах.

В структуре  $jt$  – нет диссипации при наличии  $R$ . Такое возможно лишь в случае, когда  $T_{\text{дисс}} = 0$ , то есть время диссипации никогда не начинается, и

$$R \int_0^{T_{\text{дисс}}=0} i^2(t) dt = 0$$

как в вещественной, так и мнимой частях  $U_C(jt)$ .

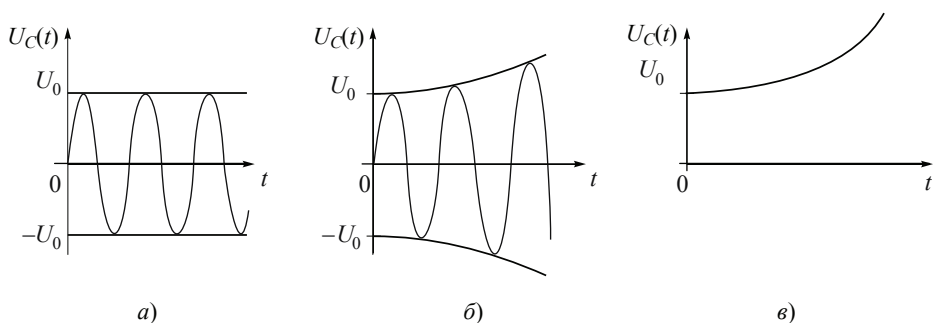


Рис. 2. Мгновенные значения  $U_C$  структур  $jt$  (а),  $t + jt$  (б) и  $t$  (в) в структуре  $t$

В структуре  $t + jt$ : за счет убывающей экспоненты  $e^{-\frac{1}{RC}t}$  исследуемый параметр  $U_C(t + jt)$  убывает в обеих частях  $U_C(t + jt)$ . Время полной диссипации энергии  $T_{\text{дисс}} \neq 0$ . Но  $T_{\text{дисс}}$  конечно, так как нет источника питания. Оценка  $T_{\text{дисс}}$  осуществляется отдельно в рассматриваемых частях  $U_C(t + jt)$ .

В структуре  $t$ : за счет убывающей экспоненты  $e^{-\frac{1}{RC}t}$  исследуемый параметр убывает в вещественной части  $U_C(t)$ . Мнимая часть  $U_C(t)$  равна нулю. Время полной диссипации энергии  $T_{\text{дисс}} \neq 0$ . Но  $T_{\text{дисс}}$  конечно, так как нет источника питания. Оценка  $T_{\text{дисс}}$  осуществляется только в вещественной части  $U_C(t)$ .

В структуре  $jt$ : нет диссипации при наличии  $-R$ . Возможно при  $T_{\text{дисс}} = 0$ .

В структуре  $t + jt$ : за счет возрастающей экспоненты  $e^{\frac{1}{RC}t}$  исследуемый параметр  $U_C$  возрастает.

В структуре  $t$ : за счет возрастающей экспоненты  $e^{\frac{1}{RC}t}$  исследуемый параметр  $U_C$  возрастает.

На рисунке 2 изображены графики исследуемого параметра, находящегося в структурах  $jt$ ,  $t + jt$  и  $t$ . Во всех трех случаях диссипация отсутствует. Использовано синусное представление  $U_C$ . Параметр представлен мгновенными значениями в структуре  $t$ .

## Результаты

В настоящей работе в ходе исследования получены следующие результаты.

1. Получены аналитические выражения мгновенных значений  $U_C(t)$  для цепи  $R-C-0-U_0$  при всех трех структурах временных соотношений.

2. Проведена оценка длительности времени полной диссипации энергии  $T_{\text{дисс}}$  для предложенного энергетического критерия в цепи  $R-C-0-U_0$  во всех трех структурах временных соотношений.

3. Прежде чем получить мгновенные значения  $U_C(jt)$  или  $U_C(t + jt)$ , необходимо повернуть  $U_C(t)$  с помощью поворотного множителя в структуру  $jt$  или  $t + jt$ , после чего формировать мгновенные значения  $U_C$  в данных структурах.

4. Все операции п. 3 необходимо выполнить на протяжении интервала  $T_{\text{дисс}}$  – времени полной диссипации энергии в рассматриваемой структуре.

5. Следует также рассмотреть вариант непосредственного формирования мгновенных значений исследуемого параметра в требуемой структуре.

## Выводы

Дополнен набор инструментов, позволяющих проводить анализ ЛСА и использовать их для решения поставленной в данной работе задачи. Предложенный набор инструментов можно использовать в дополнение к уже существующим инструментам. Увеличение порядка пилотной цепи не ведет к качественно новым результатам исследования, а только лишь усложняет получение результата. Поэтому рассмотрены только цепи ЛСА первого и второго порядка без потери общности.

Дальнейшее развитие инструментов анализа состояния ЛСА заключается в формировании и моделировании структурных схем, обеспечивающих нахождение исследуемого параметра в требуемой структуре времени либо перевод этого параметра из текущей структуры в требуемую, что позволяет перейти к формированию и синтезу электрических принципиальных схем. Наблюдатель, находящийся в вещественной структуре времени, может измерять мгновенные значения  $U_C$  как функции от  $t$ , тогда как  $U_C$  находится в структуре  $jt$  или  $t + jt$ .

### Список литературы

1. Веселовский, О. Н. Основы электротехники и электротехнические устройства радиоэлектронной аппаратуры : учеб. пособие для вузов / О. Н. Веселовский, Л. М. Браславский. – М. : Высш. школа, 1977. – 312 с.
2. Алгазин, Е. И. Особенности описания линейных систем автоматики при различных структурах временных соотношений / Е. И. Алгазин // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2020. – Т. 26, № 3. – С. 388 – 392. doi: 10.17277/vestnik.2020.03.pp.388-392

---

## On the Possibility of Observing the Investigated Parameter of Linear Automation Systems in a Certain Structure of Time Relations

E. I. Algazin

*Department of Electronics and Electrical Engineering, evgenialgazin@gmail.com;  
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

**Keywords:** linear automation system; rotary multiplier; timing structures.

**Abstract:** The issues of the possibility of observing the  $U_C$  parameter (capacitor voltage) formed in any of the three time structures are investigated. Variants of forming the instantaneous value of the parameter under study are shown both for circuits with an ordinary resistive element and with an element with negative resistance. The approaches and concepts of electrical engineering and the mathematical apparatus of the theory of the function of a complex variable are used, as applied to linear automation systems.

### References

1. Veselovskiy O.N., Braslavskiy L.M. *Osnovy elektrotehniki i elektrotekhnicheskoye ustroystva radioelektronnoy apparatury: uchebnoye posobiye dlya vuzov* [Fundamentals of electrical engineering and electrical devices of electronic equipment: a textbook for high schools], Moscow: Vysshaya shkola, 1977, 312 p. (In Russ.)



2. Algazin Ye.I. [Features of the description of linear automation systems with different structures of temporal relationships], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 388-392, doi: 10.17277/vestnik.2020.03.pp.388-392 (In Russ., abstract in Eng.)

---

### **Über die Möglichkeit der Beobachtung des zu untersuchenden Parameters der linearen Automatisierungssysteme in einer bestimmten Struktur von Zeitverhältnissen**

**Zusammenfassung:** Es sind Fragen zur Beobachtungsmöglichkeit des in jeder der drei Zeitstrukturen gebildeten Parameters  $U_C$  (Kondensatorspannung) untersucht. Es sind Optionen für die Bildung eines momentanen Werts des zu untersuchenden Parameters sowohl für Schaltungen mit einem herkömmlichen Widerstandselement als auch für ein Element mit einem negativen Widerstand gezeigt. Die Ansätze und Konzepte der Elektrotechnik und der mathematische Apparat der Theorie der Funktionen der komplexen Variablen sind in Bezug auf lineare Automatisierungssysteme verwendet.

---

### **Sur la possibilité d'observation du paramètre étudié des systèmes d'automatisation linéaires dans une certaine structure des rapports temporels**

**Résumé:** Est étudiée la possibilité d'observer le paramètre  $U_C$  (tension aux bornes du condensateur) formé dans l'une des trois structures temporelles. Sont présentées les options pour la formation de la valeur instantanée du paramètre étudié pour les circuits avec un élément résistif ordinaire et ceux avec un élément ayant une résistance négative. Sont utilisés les approches et les concepts de l'Ingénierie électrique et l'appareil mathématique de la théorie des fonctions d'une variable complexe appliqués aux systèmes linéaires d'automatisation.

---

**Автор:** *Алгазин Евгений Игоревич* – доктор технических наук, профессор кафедры «Электроника и электротехника», ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет», Новосибирск, Россия.