УДК 517.518
DOI: 10.17277/vestnik.2021.03.pp.449-460

ОГРАНИЧЕННОСТЬ СЕМЕЙСТВ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ L^p

А. Д. Нахман

Кафедра «Высшая математика», alextmb@mail.ru;
ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия

Ключевые слова: квазивыпуклые коэффициенты; максимальные оценки; операторы свертки.

Аннотация: Изучается однопараметрическое семейство сверточных операторов, действующих в лебеговых пространствах L^p. Рассмотрен случай интегральных ядер, заданных коэффициентами Фурье. Установлено, что условие квазивыпуклости коэффициентов обеспечивает ограниченность соответствующих максимальных операторов. Изучено предельное поведение семейств в метриках пространств непрерывных функций, классов L^p, $p \geq 1$, а также получена сходимость почти всюду. Указаны пути возможных обобщений и распространений.

1. Введение

Пусть $Q = (-\pi, \pi]$ и $L^p(Q)$, $p > 0$ – пространство Лебега 2π-периодических функций с нормой

$$\| f \|_p = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} | f(x) |^p dx \Big)^{1/p} < \infty .$$

Обозначим $L(Q) = L^1(Q)$ и $\| f \| = \| f \|_1$.

Рассмотрим также семейство 2π-периодических четных функций $K_h(x)$, $h > 0$, каждая из которых формально определяется в виде

$$K_h(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{|k|}(h) \exp(ikx) . \quad (1.1)$$

Условия на последовательность коэффициентов $\{\lambda_k(h)\}$, которые будут предложены ниже, обеспечат, в частности, сходимость ряда (1.1) почти всюду и принадлежность его суммы пространству $L(Q)$.

Для произвольной функции $f(x) \in L(Q)$ построим семейство операторов свертки

$$(f * K_h)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_h(x - t) dt . \quad (1.2)$$

К изучению операторов свертки сводится, например, задача суммирования рядов Фурье функций $f(x) \in L(Q)$ линейными методами. Последней задаче посвящены работы [1 – 6] и другие, в которых рассматривались в первую очередь суммирующие финитные последовательности

$$\Lambda = \{\lambda_k^n;\ k = 0, 1, ..., n;\ n = 0, 1, ...;\ \lambda_0^n = 1,\ \lambda_k^n = 0,\ k > n\},$$

определяемые в (1.2) дискретными значениями параметра h. Отдельные примеры полунепрерывных методов $\{\lambda_k(h)\}$ имеются в [7, 8]. В частности, в [7] исследованы некоторые экспоненциальные методы суммирования. Соответствующая задача была в общем виде поставлена Б. П. Осилекером в связи с широким кругом применения таких методов в анализе Фурье; см., напр., [9, с. 561 – 565]. Различные подходы к ее решению представлены в [10, 11], а также более поздних работах тех же авторов.

Настоящая работа продолжает исследование [8] в терминах условий на коэффициенты $\lambda_k(h)$, $k = 0, 1, ...$, в (1.2). Рассматриваются вопросы ограниченности в пространствах Лебега и предельное поведение при $h \to +0$ семейств (1.2).

2. Вспомогательные утверждения

Положим $\Delta\lambda_k(h) = \lambda_k(h) - \lambda_{k+1}(h)$, $\Delta\lambda_k^2(h) = \Delta(\Delta\lambda_k(h))$, $k = 0, 1, ...$; здесь и в дальнейшем через C обозначаем постоянные, различные, вообще говоря, в различных формулах и зависящие лишь от явно указанных индексов. Пусть

$$\sum(\lambda, h) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|. \tag{2.1}$$

Последовательность $\{\lambda_k(h)\}$ называется квазивыпуклой, если существует постоянная $C = C_\lambda$, такая что

$$\sup_{h>0}\sum(\lambda, h) \le C_\lambda. \tag{2.2}$$

В соответствии с (1.1) в дальнейшем требуем, чтобы при каждом $h > 0$

$$\lim_{N\to+\infty}\lambda_N(h) = 0, \tag{2.3}$$

и для определенности считаем

$$\lambda_0(h) = 1. \tag{2.4}$$

Нам потребуются две числовые леммы, доказываемые стандартным образом.

Лемма 2.1. При выполнении (2.3) справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta\lambda_k(h)\right| \le \sum(\lambda, h). \tag{2.5}$$

Действительно, в силу (2.3)

$$\sum_{\nu=k}^{N}\Delta^2\lambda_\nu(h) = \Delta\lambda_k(h) - \Delta\lambda_{N+1}(h) \to \Delta\lambda_k(h) \text{ при } N \to \infty,$$

тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta\lambda_k(h)\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{\nu=k}^{\infty}\Delta^2\lambda_\nu(h)\right| \le \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\nu}\left|\Delta^2\lambda_\nu(h)\right| = \sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\left|\Delta^2\lambda_\nu(h)\right|,$$

чем и доказано (2.5), если принять во внимание определение (2.1).

В частности, квазивыпуклая последовательность, удовлетворяющая условию (2.3), имеет ограниченное изменение. Тогда ряд (1.1) сходится при каждом $t \neq 0$ и $h > 0$, а его сумма $K_h(x)$ измерима на $[-\pi, \pi]$ как предел последовательности измеримых функций.

Лемма 2.2. Если выполнены условия (2.2), (2.3), то при каждом $h > 0$

$$\lim_{N \to +\infty} N \left| \Delta\lambda_N(h) \right| = 0. \tag{2.6}$$

Результат (2.6) вытекает из (2.3) и соотношения

$$N \left| \Delta\lambda_N(h) \right| = N \left| \sum_{k=N}^{\infty} \Delta^2 \lambda_k(h) \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} k \left| \Delta^2 \lambda_k(h) \right|,$$

правая часть которого в силу (2.2) стремится к нулю при $N \to \infty$.

3. Оценки последовательностей сверток с ядром Фейера

В вопросах суммируемости рядов Фурье методом средних арифметических [12, т. 1, с. 148 – 151], возникают свертки функций $f(x) \in L(Q)$ с ядрами Дирихле

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \cos \nu t = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2} t}, \quad k = 1, 2, ...; \; D_0(t) = \frac{1}{2}, \quad ,$$

и Фейера

$$F_k(t) = \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} D_k(t) = \frac{\sin^2 \frac{k+1}{2} t}{2(k+1) \sin^2 \frac{1}{2} t}, \quad k = 0, 1, ...$$

Введем в рассмотрение функцию Стеклова

$$f_\eta = f_\eta(x) = \frac{1}{\eta} \int_{x-\eta}^{x+\eta} |f(t)| \, dt, \; \eta > 0, \; x \in Q,$$

и максимальную функцию Харди–Литтлвуда

$$f^* = f^*(x) = \sup_{\eta > 0} f_\eta(x), \quad x \in Q;$$

$f^*(x)$ существует почти всюду для всякой $f(x) \in L(Q)$, см. [12, т. 1, с. 55 – 61]. Для каждого $k = 0, 1, ...$ выберем натуральное $S = S(k)$ такое, что

$$\frac{2^{S-1}}{k+1} \leq \pi < \frac{2^S}{k+1}.$$

Лемма 3.1. Имеют место оценки

$$\int_{-\pi}^{\pi} | f(x+t) | F_k(t) dt \leq C \sum_{j=0}^{S} \frac{1}{2^j} f_{\frac{2^j}{k+1}}(x), \quad k = 0, 1, ..., \tag{3.1}$$

и

$$\sup_{k=0,1,...} \int_{-\pi}^{\pi} | f(x+t) | F_k(t) dt \leq C f^*(x). \tag{3.2}$$

Оценка (3.1) справедлива для всех $x \in Q$, а (3.2) для почти всех $x \in Q$ (именно в точках, где существует $f^*(x)$).

Доказательство. Очевидно, что

$$F_k(t) \le C(k+1), \ \ k = 0, 1, ..., \tag{3.3}$$

и

$$F_k(t) \le C\frac{1}{(k+1)t^2}, \ \ 0 < |t| \le \pi, \ \ k = 0, 1, ... \tag{3.4}$$

В силу (3.3) и (3.4), получаем оценку

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)|\, F_k(t)dt \le C\left((k+1)\int_{|t|\le \frac{1}{k+1}} |f(x+t)|\,dt + \sum_{j=1}^{S} \frac{k+1}{(2^{j-1})^2} \int_{\frac{2^{j-1}}{k+1} \le t \le \frac{2^j}{k+1}} |f(x+t)|\,dt \right) \le$$

$$\le C\left(f_{\frac{2^0}{k+1}}(x) + \sum_{j=1}^{S} \frac{1}{2^j}\frac{k+1}{2^j} \int_{|t| \le \frac{2^j}{k+1}} |f(x+t)|\,dt \right),$$

откуда и вытекает (3.1). В свою очередь, (3.2) есть следствие (3.1) и сходимости ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}.$$

Лемма 3.1 доказана.

4. Преобразование интегрального ядра

Лемма 4.1. Пусть $\delta > 0$ – произвольно малое фиксированное число и выполнены условия (2.2) – (2.4). Тогда при всех $t \in [-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta)$ имеет место соотношение

$$K_h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\Delta^2 \lambda_k(h)\, F_k(t), \tag{4.1}$$

причем ряд (4.1) сходится абсолютно и равномерно.

Доказательство. Запишем

$$K_h(t) = \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(h)\big(D_k(t) - D_{k-1}(t)\big) \right)$$

и применим к сумме по k преобразование Абеля

$$K_h(t) = \lim_{N \to +\infty} \left(\lambda_N(h)\, D_N(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \Delta\lambda_k(h) D_k(t) \right). \tag{4.2}$$

Для ядра Дирихле при $\delta \le |t| \le \pi$ очевидна оценка

$$|D_k(t)| \le \frac{C}{|t|} \le \frac{C}{\delta},$$

согласно которой равенство (4.2) принимает вид

$$K_h(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k(h)D_k(t)\,, \tag{4.3}$$

если учесть (2.3). При этом ряд (4.3), в силу (2.2) и (2.5), абсолютно и равномерно сходится при $\delta\le|t|\le\pi$.

Далее, легко проверить, что

$$D_k(t)=(k+1)F_k(t)-kF_{k-1}(t)\,,$$

а значит, применяя преобразования Абеля, будем иметь

$$K_h(t)\;=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\Delta\lambda_k(h)D_k(t)=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left((N+1)\Delta\lambda_N(h)F_N(t)+\sum_{k=0}^{N-1}(k+1)\Delta^2\lambda_k(h)F_k(t)\right).$$

Теперь, в силу оценки (3.4) и соотношения (2.6), получаем

$$K_h(t)\;=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2\lambda_k(h)\;F_k(t)\;,$$

причем, согласно (2.2), ряд абсолютно и равномерно сходится при $\delta\le|t|\le\pi$.

Лемма 4.1 доказана.

5. Оценки операторов свертки в общем случае

Теорема 5.1. Пусть выполнены условия (2.2) – (2.4). Тогда имеют место оценки

$$|(f*K_h)(x)|\le C\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|\left(\sum_{j=0}^{S}\frac{1}{2^j}f_{\frac{2^j}{k+1}}(x)\right) \tag{5.1}$$

и

$$\sup_{h>0}|(f*K_h)(x)|\le C_\lambda f^*(x). \tag{5.2}$$

Оценка (5.1) справедлива для всех $x\in Q$, а (5.2) для почти всех $x\in Q$ (именно, в точках, где существует $f^*(x)$).

Доказательство. Установим верхние оценки для мажорантного интеграла

$$J(f;x;h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\cdot\left|K_h(t)\right|dt\,. \tag{5.3}$$

Начнем рассмотрение со случая

$$J_\delta(f;x;h)=\frac{1}{\pi}\int_{\delta<|t|\le\pi}\left|f(x+t)\right|\cdot\left|K_h(t)\right|dt\,,$$

где произвольно малое $\delta>0$ фиксировано. Согласно (4.1)

$$J_\delta(f;x;h)\;\le\frac{1}{\pi}\int_{\delta<|t|\le\pi}\left|f(x+t)\right|\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|F_k(t)\,dt\,,$$

причем ряд, записанный под знаком интеграла, мажорируем числовым рядом (2.1), а значит, сходится равномерно. Тогда знак бесконечной суммы может быть вынесен за знак интеграла, после чего

$$J_\delta(f;x;h) \le \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\,F_k(t)\,dt .$$

Устремив δ к нулю в левой части последнего соотношения, получаем теперь оценку для (5.3)

$$J(f;x;h) \le \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\,F_k(t)\,dt . \tag{5.4}$$

Тогда, согласно (3.1),

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\left|K_h(t)\right|dt \le C\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|\left(\sum_{j=0}^{S}\frac{1}{2^j}f_{\frac{2^j}{k+1}}(x)\right). \tag{5.5}$$

Далее, принимая во внимание (3.2), будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\left|K_h(t)\right|dt \le C\,f^*(x)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right| . \tag{5.6}$$

Из оценок (5.5) и (5.6) вытекают теперь утверждения (5.1) и (5.2).

Теорема 5.1 доказана.

6. L^1-оценка операторов свертки

В настоящем параграфе ограничиваемся случаем L^1-пространств, поскольку для L^p, $p>1$ справедливы (как это будет следовать из результатов параграфа 7) более сильные оценки. В этом случае имеет место неравенство (см. [13])

$$\sup_{\eta>0}\int_Q f_\eta(x)dx \le C_p\int_Q|f(x)|\,dx . \tag{6.1}$$

Теорема 6.1. Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Тогда справедлива оценка

$$\sup_{h>0}\ \| f*K_h\| \le C_\lambda\int_Q|f(x)|\,dx . \tag{6.2}$$

Доказательство. Согласно (5.1) имеем

$$\| f*K_h\| \le C\int_Q\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|\left(\sum_{j=0}^{S}\frac{1}{2^j}f_{\frac{2^j}{k+1}}(x)\right)dx .$$

Частичные суммы $S_N(x;h)$ ряда в правой части (5.1) возрастают и их интегралы ограничены в совокупности, поскольку

$$\int_Q S_N(x;h)dx \le \sum_{k=0}^{N}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|\left(\sum_{j=0}^{S}\frac{1}{2^j}\int_Q f_{\frac{2^j}{k+1}}(x)dx\right)\le$$

$$\le C\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}\right)\int_Q|f(x)|\,dx \le C_\lambda\int_Q|f(x)|\,dx$$

согласно (2.2) и (6.1). Следовательно, можно применить теорему Б. Леви о предельном переходе под знаком интеграла, в результате чего

$$\| f*K_h \| \le C\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|\left(\sum_{j=0}^{S}\frac{1}{2^j}\int_Q f_{\frac{2^j}{k+1}}(x)dx\right) \le C_\lambda \int_Q |f(x)|\,dx . \quad (6.3)$$

Утверждение (6.2) вытекает из (6.3).

7. Максимальные оценки сильного и слабого типа

Положим

$$U_*(f;\lambda)=U_*(f;\lambda;x)=\sup_{h>0}\left|(f*K_h)(x)\right| .$$

Теорема 7.1. Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Тогда имеют место оценки:

$$\| U_*(f;\lambda)\|_p \le C_{p,\lambda}\,\|(f)\|_p,\quad p>1; \quad (7.1)$$

$$\| U_*(f;\lambda)\| \le C_\lambda(1+\| f(\ln^+|f|)\|) ; \quad (7.2)$$

$$\| U_*(f;\lambda)\|_p \le C_{p,\lambda}\,\|(f)\|,\quad 0<p<1 . \quad (7.3)$$

Кроме того, справедлива следующая оценка слабого типа:

$$| x\in Q \mid U_*(f;\lambda;x)>\varsigma>0| \le C_\lambda\,\frac{\| f\|}{\varsigma},\quad p\ge 1 . \quad (7.4)$$

Доказательство. Как известно ([12, т. 1, с. 54 – 61]), неравенства (7.1) – (7.4) имеют место, если в левой части каждого из них заменить $U_*(f;\lambda)$ на максимальную функцию $f^*(x)$. Остается применить оценку (5.6).

Замечание 7.1. Как следует из результатов работы [14] и свойств максимальной функции $f^*(x)$, оценка (7.1) неверна, вообще говоря, при $p=1$. В этом случае ее заменяют соотношения (7.2), (7.4), а также (6.2).

Замечание 7.2. При выполнении условий теоремы 5.1 из (7.1) и (6.2) следует, что

$$\sup_{h>0}\| f*K_h\|_p \le C_{p,\lambda}\,\| f\|_p ,\quad p\ge 1. \quad (7.5)$$

8. Сходимость по метрике и почти всюду

Обозначим через $\boldsymbol{C}(Q)$ пространство непрерывных на Q 2π-периодических функций.

Теорема 8.1. Пусть выполнены условия (2.2) – (2.4) и

$$\lim_{h\to+0}\lambda_k(h)=1,\quad k=0,1,\ldots . \quad (8.1)$$

Тогда соотношение

$$\lim_{h\to+0}(f*K_h)(x)=f(x) \quad (8.2)$$

выполнено

а) в метрике пространства $\boldsymbol{C}(Q)$;

б) в метрике каждого из пространств $L^p(Q)$, $p\ge 1$;

в) почти всюду в Q для любой $L^p(Q)$, $p\ge 1$.

Доказательство. Как вытекает из теоремы Банаха–Штейнгауза, сходимость (8.2) по метрике данного полного пространства имеет место, если она справедлива для каждой функции из некоторой полной системы, и при этом семейство норм операторов $(f * K_h)(x)$ равномерно ограничено. Легко проверить (см. также, напр., [1]), что первое условие для полной в $\boldsymbol{C}(Q)$ и $L^p(Q)$, $p \ge 1$ системы функций

$$\{1, \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, ...\}$$

равносильно требованию (8.1).

Второе условие в случае пространства $\boldsymbol{C}(Q)$ равносильно равномерной ограниченности констант Лебега

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_h(x-t)|\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_h(t)|\,dt ,$$

которая в свою очередь вытекает из (5.5) и (2.2) при $f \equiv 1$; отметим здесь же, что теперь можно утверждать принадлежность суммы ряда (1.1) пространству $L(Q)$.

В случае пространств $L^p(Q)$, $p \ge 1$, ограниченность норм есть следствие (7.5).

Сходимость почти всюду (8.2) стандартным образом вытекает из оценки слабого типа (7.4) и все того же условия (8.1); см. [12, т. 2, с. 464–465].

Замечание 8.1. Можно уточнить характер точек, в которых сходимость (8.2) имеет место для любой $f \in L^p(Q)$, $p \ge 1$ – это точки Лебега (см. напр., [12, т. 1, с. 111]).

9. Примеры

Как показано в статье [10], условию (2.2) удовлетворяет всякая кусочно-выпуклая последовательность $\{\lambda_k(h)\}$. Там же приведены примеры некоторых квазивыпуклых последовательностей:

$$\lambda_0(h) = 1, \ \lambda_k(h) = \lambda(x,h)|_{x=k}, \ k = 1, 2, ..., \ \text{где} \ \lambda(x,h) = \exp(-h\varphi(x)) .$$

А именно, рассмотрены случаи:

1) $\varphi(x) = \ln^{\alpha} x, \ x > 0, \ \alpha > 0$;

2) $\varphi(x) = x^{\alpha}, \ x > 0, \ \alpha > 0$;

3) $\varphi(x) = P_n(x)$, где $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0, \quad a = a_n > 0$ – произвольный многочлен n-й степени, $n = 1, 2, ...$.

Так, результаты пп. 5 – 8 настоящей работы верны для обобщенного интеграла Пуассона

$$(f * P_h)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,P_h(x-t)dt$$

с интегральным ядром

$$P_h(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-h\,|\,k\,|^{\alpha}\right)\exp(ikx), \ \alpha > 0 ;$$

классический интеграл Пуассона соответствует случаю $\alpha = 1$.

10. Обобщения и распространения

1) *Суммируемость рядов Фурье*. Пусть выполнено дополнительное условие

$$\lambda_k(h) = O\left(\frac{1}{\ln k}\right), \ k \to \infty. \tag{10.1}$$

Тогда (см. [10]) семейство

$$V_h(f) = V(f, x; \lambda, h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{|k|}(h) c_k(f) \exp(ikx)$$

λ-средних ряда Фурье произвольной функции $f(x) \in L(Q)$, обладающей коэффициентами Фурье $c_k(f)$, может быть представлено в виде (ср. (5.4))

$$V(f, x; \lambda, h) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \Delta^2 \lambda_k(h) \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_k(t)\, dt.$$

Следовательно, оценки пп. 5 – 7 и вытекающие из них теоремы о сходимости применимы к квазивыпуклым методам суммирования рядов Фурье, причем условие (10.1) является не только одним из достаточных, но и необходимым для суммируемости почти всюду (именно, в точках Лебега, см. [5]). Рассмотрение же семейств операторов сверток в виде (1.2) позволяет освободиться от требования (10.1).

2) *Двухвесовые оценки.* Оценка (7.5) и ее следствия могут быть перенесены на случай весовых L^p-пространств $(p \ge 1)$. Анонсируем соответствующий результат.

Пусть μ и ν – конечные на Q борелевские меры, инвариантные относительно сдвигов на 2π, $\omega(x)$ – производная абсолютно непрерывной части меры ν, I – произвольный замкнутый интервал с мерой $|I| \le 2\pi$. Положим

$$\| f \|_{\nu,p} = \left(\int_Q | f(t) |^p \, d\nu(t) \right)^{\frac{1}{p}}$$

и

$$A_{\mu,\nu}^{(p,q)} = \sup_I \frac{\mu^{\frac{1}{q}}(I)}{|I|} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega^{-\frac{1}{p-1}}(t) dt \right)^{\frac{p-1}{p}}, \quad q \ge 1, \ p \ge 1,$$

причем множитель

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega^{-\frac{1}{p-1}}(t) dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \text{ при } p = 1 \text{ считаем равным } \operatorname*{ess\,sup}_{x \in I} \frac{1}{\omega(x)}.$$

Считаем также $0 \cdot \infty = \infty$ и $(f * K_h) = \infty$, если f не суммируема на Q.

Теорема 10.1. Пусть выполнены условия (2.2) – (2.4). Тогда при всех $q \ge 1, \ p \ge 1$ имеет место оценка

$$\sup_{h>0} \| f * K_h \|_{\mu,q} \le C_{\lambda,p,q} A_{\mu,\nu}^{(p,q)} \| f \|_{\nu,p}.$$

3) *Многомерный случай.* Аналоги результатов настоящей работы могут быть получены и в случае функций нескольких переменных, чему автор надеется посвятить отдельную статью.

Список литературы

1. Никольский, С. М. О линейных методах суммирования рядов Фурье / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Серия математическая. – 1948. – Т. 12, № 3. – С. 259 – 278.
2. Nagy, B. Sz. Methodes de Sommation des Series de Fourier / B. Sz. Nagy // Acta Sci. Math. Szeged, XII, pars. B. – 1950. – P. 204 – 210.
3. Karamata, J. Sur la sommation des series de Fourier des functions continue / J. Karamata, M. Tomic // Publ. Inst. Math. Acad. Serbe scL. – 1955. – No. 8. – P. 123 – 138.
4. Ефимов, А. В. О линейных методах суммирования рядов Фурье / А. В. Ефимов // Изв. АН СССР. Серия математическая. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 743 – 756.
5. Баусов, Л. И. О линейных методах суммирования рядов Фурье / Л. И. Баусов // Математический сборник. – 1965. – Т. 68 (110), № 3. – С. 313 – 327.
6. Фомин, Г. А. О линейных методах суммирования рядов Фурье / Г. А. Фомин // Математический сборник. – 1964. – Т. 65 (107), № 1. – С. 144 – 152.
7. Нахман, А. Д. Экспоненциальные методы суммирования рядов Фурье / А. Д. Нахман // XI Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах : тезисы докладов, 26 – 30 мая 1986 г., Челябинск. – Челябинск, 1986. – Ч. 2. – С. 91.
8. Нахман, А. Д. Элементарные оценки весовых норм операторов свертки / А. Д. Нахман // Известия вузов. Математика. – 1989. – № 10. – С. 76 – 79.
9. Хилле, Е. Функциональный анализ и полугруппы : пер. с англ. / Е. Хилле, Р. Филлипс. – 2-е изд., перераб. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1962. – 829 с.
10. Нахман, А. Д. Экспоненциальные методы суммирования рядов Фурье / А. Д. Нахман, Б. П. Осиленкер // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 101 – 109.
11. Тригуб, Р. М. Обобщение метода Абеля–Пуассона суммирования тригонометрических рядов Фурье / Р. М. Тригуб // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 3. – С. 473 – 475.
12. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : пер. с англ. : в 2 т. / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – 2 т.
13. Muckenhoupt, B. Two Weight Function Norm Inequalities for the Poisson Integral / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – Vol. 210. – P. 225 – 231.
14. Nakhman, A. D. Weighted Norm Inequalities for the Convolution Operators / A. D. Nakhman // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2009. – Т. 15, № 3. – С. 653 – 660.

Restriction of Families of Conversion Operators in L^p Spaces

A. D. Nakhman

Department of Higher Mathematics, alextmb@mail.ru;
TSTU, Tambov, Russia

Keywords: quasiconvex coefficients; maximum marks; convolution operators.

Abstract: We study a one-parameter family of convolutional operators acting in Lebesgue L^p spaces. The case of integral kernels given by the Fourier coefficients is considered. It is established that the condition of the coefficients being quasiconvex ensures the boundedness of the corresponding maximal operators. The limiting behavior of families in the metrics of spaces of continuous functions and L^p, $p \geq 1$, classes is studied, and their convergence is obtained almost everywhere. The ways of possible generalizations and distributions are indicated.

References

1. Nikol'skiy S.M. [On linear methods of summability of Fourier series], *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya* [Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Mathematical series], 1948, vol. 12, no. 3, pp. 259-278. (In Russ.)

2. Nagy B.Sz. Methodes de Sommation des Series de Fourier, *Acta Sci. Math. Szeged,* XII, pars. B, 1950, pp. 204-210.

3. Karamata J., Tomic M. Sur la sommation des series de Fourier des functions continue*, Publ. Inst. Math. Acad. Serbe scL*, 1955, no. 8, pp. 123-138.

4. Yefimov A.V. [On linear methods of summation of Fourier series], *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya* [Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Mathematical series], 1960, vol. 24, no. 5, pp. 743-756. (In Russ.)

5. Bausov L.I. [On linear methods of summation of Fourier series], *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical collection], 1965, vol. 68 (110), no. 3, pp. 313-327. (In Russ.)

6. Fomin G.A. [On linear methods of summation of Fourier series], *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical collection], 1964, vol. 65 (107), no. 1, pp. 144-152. (In Russ.)

7. Nakhman A.D. [Exponential methods of summation of Fourier series], *XI Vsesoyuznaya shkola po teorii operatorov v funktsional'nykh prostranstvakh* [XI All-Union School on the Theory of Operators in Functional Spaces], Abstracts, 26 - 30 May, 1986, Chelyabinsk, 1986, Part 2, p. 91. (In Russ.)

8. Nakhman A.D. [Elementary estimates for the weighted norms of convolution operators], *Izvestiya vuzov. Matematika* [Izvestiya vuzov. Mathematics], 1989, no. 10, pp. 76-79. (In Russ.)

9. Khille Ye., Fillips R. *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional analysis and semigroups], Moscow: Izdatel'stvo inostrannoy literatury, 1962, 829 p. (In Russ.)

10. Nakhman A.D., Osilenker B.P. [Exponential methods of summation of Fourier series], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 101-109. (In Russ., abstract in Eng.)

11. Trigub R.M. [Generalization of the Abel–Poisson method of summation of trigonometric Fourier series], *Matematicheskiye zametki* [Math notes], 2014, vol. 96, no. 3, pp. 473-475. (In Russ.)

12. Zygmund A. *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959.

13. Muckenhoupt B. Two Weight Function Norm Inequalities for the Poisson Integral, *Trans. Amer. Math. Soc*., 1975, vol. 210, pp. 225-231.

14. Nakhman A.D. Weighted Norm Inequalities for the Convolution Operators, *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 653-660. (In Eng., abstract in Russ.)

Beschränktheit von Familien der Faltungsoperatoren in L^p-Räumen

Zusammenfassung: Es wird eine einzelparametrische Familie von Faltungsoperatoren, die in Lebesgue-Räumen L^p wirken, untersucht. Der Fall von integralen Kernen, gegeben durch die Fourier-Koeffizienten, ist betrachtet. Es ist festgestellt, dass die Bedingung der Quasikonvexität der Koeffizienten die Beschränktheit der entsprechenden maximalen Operatoren gewährleistet. Das Grenzverhalten von Familien in Metriken von Räumen stetiger Funktionen, der Klassen L^p, $p \geq 1$, ist untersucht, und Konvergenz ist fast überall erreicht. Die Wege möglicher Verallgemeinerungen und Verteilungen sind angegeben.

Contraintes des familles d'opérateurs de convolution dans les espaces L^p

Résumé: Est étudiée une famille d'opérateurs convolutifs à un seul paramètre agissant dans les espaces de Lebesgue. Est examiné le cas des noyaux intégraux donnés par les coefficients de Fourier. Est établi que la condition de quasi-bulle des coefficients permet de limiter les opérateurs maximaux correspondants. Est étudié le comportement marginal des familles dans les métriques des espaces de fonctions continues, des classes L^p, $p \geq 1$; est obtenue la convergence presque partout. Sont indiquées les voies de généralisations et de diffusion possibles.

Автор: ***Нахман Александр Давидович*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.

Рецензент: ***Лазарев Сергей Иванович*** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика и инженерная графика», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.