УДК 517.518
DOI: 10.17277/vestnik.2020.03.pp.437-449

МЕТОДЫ ПОЛИНОМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Д. Нахман

Кафедра «Высшая математика», alextmb@mail.ru;
ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия

Ключевые слова: квазивыпуклые последовательности; ряды Фурье–Чебышева; суммируемость полунепрерывными методами.

Аннотация: Изучается класс полунепрерывных квазивыпуклых методов суммирования рядов Фурье–Чебышева. Получены верхние оценки норм соответствующих операторов в пространстве непрерывных функций. Установлена сходимость средних в метрике пространства. Рассмотрена также суммируемость в точках разрыва первого рода. Предложены процессы восстановления функций по заданной последовательности степенных моментов. Указаны пути обобщения результатов и их распространения на случай суммируемости в точках Лебега.

Введение

Вопросы представления функций действительного переменного бесконечными полиномами представляют значительный интерес как сами по себе, так и в связи с многочисленными приложениями [1]. Если ограничиться рассмотрением функций, непрерывных на некотором отрезке, то средством для таких разложений служат классические ортогональные полиномы [2]. В качестве наиболее простого «опосредованного» инструмента разложений могут быть использованы тригонометрические полиномы, которые простой заменой переменных трансформируются затем в суммы по системе многочленов Чебышева. Однако, в связи с известными примерами расходящихся тригонометрических рядов Фурье, здесь нельзя ограничиваться рассмотрением частичных сумм таких рядов. Поэтому на первый план выходит изучение методов суммирования. Многочисленные исследования в этом направлении (см. обзор [3] и библиографию в нем), по сути, сводились к расширению классов суммирующих последовательностей. Как показано в [4], задача «полиномизации» (то есть представления функции бесконечным полиномом) может быть решена, в частности, в терминах обобщенных сумм Фурье по ортогональным полиномам. В настоящей работе мы ограничиваемся разложениями по полиномам Чебышева первого рода. Изучается случай функций $f(x)$, суммируемых на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ (в частности, непрерывных на этом отрезке). Мы также показываем, как можно восстановить такую функцию, имея в наличии последовательность ее степенных моментов; соответствующая идея вытекает из результатов, полученных Б. П. Осиленкером (см., напр., [5]).

Настоящие результаты основаны на «тригонометрическом» подходе, и все необходимые оценки проводятся непосредственно (см. [4; 6, с. 489]). Кроме того, простейшее условие квазивыпуклости суммирующей последовательности используется лишь в целях краткости изложения, однако справедливы более общие результаты, анонсированные в разделе 7 настоящей работы

1. Постановка задачи о суммируемости рядов Фурье–Чебышева

Рассмотрим систему функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}};\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x)\right\},\ n=1,2,... \tag{1.1}$$

Нетрудно проверить, что данная система ортонормированна с весом $\rho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ на отрезке $[-1,1]$. Согласно представлению

$$\cos n\tau = 2^{n-1}\cos^n\tau+\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k\cos^k\tau,\ \ n=1,2,..., \tag{1.2}$$

в котором $\{\beta_k\}$ – последовательность некоторых коэффициентов, можно утверждать, что при каждом n

$$p_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x)$$

есть многочлен n-й степени. Последовательность (1.1) называется системой многочленов Чебышева первого рода [7, с. 40]. Как мы покажем ниже, (1.1) является средством полиномиальной аппроксимации функций в каждой точке непрерывности и равномерной полиномиальной аппроксимации в пространстве непрерывных функций.

Уточним постановку задачи. Рассмотрим произвольную функцию $f=f(x)$, суммируемую на $[-1,1]$ с весом $\rho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$, последовательность ее коэффициентов Фурье–Чебышева

$$a_n(f)=\int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)\rho(x)dx,\ \ n=0,1,...,$$

и ее ряд Фурье–Чебышева

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)p_n(x)\,. \tag{1.3}$$

С помощью замены переменных $y=\arccos x$ ряд (1.3) преобразуется в ряд Фурье по косинусам

$$f(\cos y)\sim\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(\cos t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\cos t)\cos nt\,dt\right)\cos ny. \tag{1.4}$$

Как известно, тригонометрический ряд Фурье может оказаться расходящимся в точке непрерывности функции f [8, т. 1, с. 470 – 476], в силу чего следует ставить вопрос о суммируемости ряда некоторыми методами. Соответственно, задача о суммируемости переносится на ряды Фурье–Чебышева. Рассмотрим бесконечную (вообще говоря) последовательность

$$\Lambda = \{\lambda_k(h),\ h > 0,\ k = 0, 1, ...;\ \lambda_0(h) = 1\} \tag{1.5}$$

и построим семейство Λ -средних ряда (1.4)

$$U_h(f) = U(f, x; \Lambda, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(h) a_k(f) p_k(x). \tag{1.6}$$

Если обратиться к представлению (1.4), то семейство (1.6) принимает вид

$$U_h(f) = U(f, \cos y; \Lambda, h) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos t)dt + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(h) \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos t)(\cos k(y+t) + \cos k(y-t))dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)dt + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(h) \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)\cos k(y-t)dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(y+t))dt + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(h) \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(y+t))\cos kt dt =$$
$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(y+t))\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(h)\cos kt\right\}dt \tag{1.7}$$

или

$$U_h(f) = U(f, \cos y; \Lambda, h) =$$
$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \big(f(\cos(y+t)) + f(\cos(y-t))\big)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(h)\cos kt\right\}dt. \tag{1.8}$$

Таким образом, Λ -средние (1.6) ряда Фурье–Чебышева могут быть представлены в тригонометрической форме (1.7) – (1.8), где $y = \arccos x$.

2. Вспомогательные представления и оценки

Рассмотрим ядра Дирихле и Фейера [8, с. 86, 148], соответственно:

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \cos \nu t = \frac{\sin(k + \frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t},$$

$$F_k(t) = \frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k} D_\nu(t) = \frac{\sin^2\frac{k+1}{2}t}{2(k+1)\sin^2\frac{1}{2}t}, \quad F_{-1}(t) \equiv 0.$$

Легко проверить, что при всех $k = 0, 1, ...$

$$D_k(t) = (k+1)F_k(t) - kF_{k-1}(t)\ .$$

Положим $\Delta\lambda_k(h) = \lambda_k(h) - \lambda_{k+1}(h),$ и $\Delta^2\lambda_k(h) = \Delta(\Delta\lambda_k(h))$, $k = 0, 1, ...$. В результате двукратного применения преобразования Абеля последовательно получаем

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(h)\cos kt = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(h)\big(D_k(t) - D_{k-1}(t)\big)\, dt =$$

$$=\lambda_N(h)D_N(t)+\sum_{k=0}^{N-1}\Delta\lambda_k(h)D_k(t)dt=\lambda_N(h)D_N(t)+$$

$$+\Delta\lambda_N(h)(N+1)F_N(t)+\sum_{k=0}^{N-1}\Delta^2\lambda_k(h)(k+1)F_k(t). \qquad (2.1)$$

Значит (см. (1.7)),

$$|U_h(f)|=|U(f,\cos y;\Lambda,h)|\le\frac{1}{\pi}\lim_{N\to+\infty}\left\{|\lambda_N(h)|\int_{-\pi}^{\pi}|f(\cos(y+t))|\,D_N(t)\,|dt+\right.$$

$$\left.+|\Delta\lambda_N(h)|(N+1)\int_{-\pi}^{\pi}|f(\cos(y+t))|F_N(t)dt\right\}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta^2\lambda_k(h)|(k+1)\int_{-\pi}^{\pi}|f(\cos(y+t))|F_k(t)dt. \qquad (2.2)$$

3. Оценки C-норм семейства средних

Обозначим через $\mathbf{C}_{[-1,1]}$ класс функций $f=f(x)$, непрерывных на $[-1,1]$. Положим

$$L_h(x)=\sup_{|f|\le1}|U(f,x;\Lambda,h)|.$$

Согласно (1.7) имеет место оценка $L_h(x)\le L_h$, где

$$L_h=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(h)\cos kt)|\,dt. \qquad (3.1)$$

Как известно [6, с. 486], в случае дискретного h (например, $h=\frac{1}{n+1}$, $n=0,1,...$) и «финитных» методов суммирования

$$\Lambda=\left\{\lambda_k^n,\ k=0,1,...;\ n=0,1,...;\ \lambda_0^n=1;\ \lambda_k^n=0,\ k=n+1,\ n+2,...\right\} \qquad (3.2)$$

семейство L_h превращается в последовательность констант Лебега

$$I_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^n\cos kt)|\,dt.$$

Для любой $f\in\mathbf{C}_{[-1,1]}$ в случае (3.2) необходимыми и достаточными условиями сходимости последовательности средних к $f(x)$ (при $n\to\infty$) в каждой точке x или равномерно по x являются (см. [6, с. 485]) следующие два условия:

а) равномерная ограниченность I_n;

б) сходимость (1.6) к $f(x)$ для каждой функции $f(x)$ из некоторой замкнутой в пространстве $\mathbf{C}_{[-1,1]}$ системы. Последнее условие равносильно равенству

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_k^n=1,\ k=0,1,....$$

Наш полунепрерывный случай осложняется необходимостью (в общем случае) обоснований предельных переходов под знаком интеграла, поэтому сходимость (1.6) при $h \to +0$ мы установим непосредственно, обобщив рассуждения [8, т. 1, с. 145–146], в частности, получим верхнюю оценку аналога констант Лебега (3.1). Положим

$$\Sigma(\lambda) = \sup_{h>0} \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta^2 \lambda_k(h)|(k+1).$$

Последовательность (1.5) называется квазивыпуклой, если выполнено условие

$$\Sigma(\lambda) < \infty. \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. Пусть суммирующая последовательность (1.5) удовлетворяет условиям квазивыпуклости (3.3) и

$$\lambda_k(h) = o\left(\frac{1}{\ln k}\right), \ k \to \infty \quad (h > 0). \tag{3.4}$$

Тогда оценка

$$L_h < 1 + 2\Sigma(\lambda) \tag{3.5}$$

выполняется равномерно по h.

Доказательство. Согласно (2.1) получаем

$$L_h \le \frac{1}{\pi} \lim_{N\to+\infty} \left\{ |\lambda_N(h)| \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt + |\Delta\lambda_N(h)|(N+1) \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta^2 \lambda_k(h)|(k+1) \int_{-\pi}^{\pi} F_k(t) dt. \tag{3.6}$$

Как известно [8, т. 1, с. 115, 148],

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt \le \mathrm{const} \ln(N+2), \quad \int_{-\pi}^{\pi} F_k(t) dt = \pi; \ N, k = 0, 1, \ldots$$

Тогда, в силу (3.4), оценка (3.6) приобретает вид

$$L_h \le \lim_{N\to+\infty} |\Delta\lambda_N(h)|(N+1) + \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta^2 \lambda_k(h)|(k+1). \tag{3.7}$$

Далее, с помощью преобразования Абеля, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{N} (k+1)\Delta^2 \lambda_k(h) = \lambda_0(h) - \lambda_{N+1}(h) - (N+1)\Delta\lambda_{N+1}(h), \ N = 0, 1, \ldots,$$

откуда, с учетом (3.4) и $\lambda_0(h) = 1$, получим

$$\lim_{N\to+\infty} |\Delta\lambda_N(h)|(N+1) \le 1 + \Sigma(\lambda). \tag{3.8}$$

Теперь оценка (3.5) вытекает из (3.7) и (3.8). Теорема доказана.

4. Суммируемость в точках разрыва первого рода и равномерная суммируемость

Пусть x_0 – точка непрерывности или разрыва первого рода. Положим

$$\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x \in (-1,1); \\ f(x+0), & x=-1; \\ f(x-0), & x=1. \end{cases}$$

Если $y = \arccos x$, то очевидно, что

$$\theta(\cos y) = \frac{f\big(\cos(y-0)\big)+f\big(\cos(y+0)\big)}{2}, \quad y \in [0, \pi].$$

Теорема 4.1. Пусть функция $f(x)$ суммируема на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, и для последовательности (1.5) выполнены условия (3.3), (3.4), а также

$$\lim_{h\to+0} \lambda_k(h) = 1, \; k = 0, 1, \ldots \tag{4.1}$$

Тогда во всякой точке x_0, в которой существует $\theta(x_0)$, имеет место соотношение

$$\lim_{h\to+0} U(f, x_0; \Lambda, h) = \theta(x_0). \tag{4.2}$$

В частности, равенство

$$\lim_{h\to+0} U(f, x_0; \Lambda, h) = f(x_0)$$

выполняется в каждой точке непрерывности функции *f*.

Кроме того, для всякой $f \in \mathbf{C}_{[-1,1]}$ соотношение

$$\lim_{h\to+0} U(f, x; \Lambda, h) = f(x) \tag{4.3}$$

имеет место равномерно на $[-1, 1]$.

Доказательство. Заметим, что

$$\theta(x_0) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\theta(x_0)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(h)\cos kt\right\}dt,$$

поэтому

$$U(f, x_0; \Lambda, h) - \theta(x_0) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{f(\cos(y_0+t)) + f(\cos(y_0-t)) - 2\theta(x_0)\}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(h)\cos kt\right\}dt. \tag{4.4}$$

Изменяя, если нужно, значение $f(\cos y_0)$, можно считать, что $f(\cos y_0) = \theta(\cos y_0) = \theta(x_0)$. В силу определения $\theta(x_0)$, получаем

$$\Psi(t, x_0) = \frac{f(\cos(y_0+t)) + f(\cos(y_0-t)}{2} - \theta(x_0) \to 0, \quad t \to 0.$$

Тогда, согласно (4.4), для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $|\Psi(t, x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{1 + 2\Sigma(\lambda)}$ при $|t| < \delta$ и

$$|U(f, x_0; \Lambda, h) - \theta(x_0)| \le$$

$$\le \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{\varepsilon}{1+2\Sigma(\lambda)}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(h)\cos kt\right|dt+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|\Psi(t,x_0)|\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(h)\cos kt\right|dt\right).$$

В силу оценки (3.5), будем иметь

$$|U(f, x_0; \Lambda, h) - \theta(x_0)| \le \lim_{N\to+\infty}\left(\varepsilon + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|\Psi(t,x_0)|\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(h)\cos kt\right|dt\right). \qquad (4.5)$$

Далее применим представление (2.1) и очевидные оценки ядер Дирихле и Фейера

$$|D_k(t)| \le \frac{\pi}{2t}, \quad |F_k(t)| \le \frac{\pi^2}{2(k+1)t^2}, \quad t > 0,\ k = 0, 1, \ldots .$$

В соответствии с (4.5) будем иметь

$$|U(f, x_0; \Lambda, h) - \theta(x_0)| \le$$

$$\le \varepsilon + \mathrm{const}\lim_{N\to+\infty}\int_{\delta}^{\pi}|\Psi(t,x_0)|\left(|\lambda_N(h)|\frac{1}{\delta}+|\Delta\lambda_N(h)|\frac{1}{\delta^2}+\sum_{k=0}^{N-1}|\Delta^2\lambda_k(h)|\frac{1}{\delta^2}\right)dt \le$$

$$\le \varepsilon + C_\delta \lim_{N\to+\infty}\left(|\lambda_N(h)|+|\Delta\lambda_N(h)|+\sum_{k=0}^{N-1}|\Delta^2\lambda_k(h)|\right)(\|f\|+|\theta(x_0)|);$$

при этом

$$\|f\| = \int_{-1}^{1}|f(x)|\rho(x)dx = \int_0^{\pi}|f(\cos t)|dt < \infty$$

– норма функции f в пространстве Лебега суммируемых функций; постоянные C здесь и в дальнейшем зависят лишь от явно указанных индексов.

Принимая во внимание условие (3.4), получим

$$|U(f, x_0; \Lambda, h) - \theta(x_0)| \le \varepsilon + C_\delta\,(\|f\|+|\theta(x_0)|)\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta^2\lambda_k(h)|, \qquad (4.6)$$

причем последний ряд сходится в силу условия (3.3). Для произвольного $\gamma > 0$ подберем теперь столь большой номер $N_0 = N_0(\gamma)$, что

$$\frac{\Sigma(\lambda)}{N_0+1} < \frac{\gamma}{1 + C_\delta(\|f\|+|\theta(x_0)|)}. \qquad (4.7)$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta^2\lambda_k(h)| = \sum_{k=0}^{N_0}|\Delta^2\lambda_k(h)| + \frac{1}{N_0+1}\sum_{k=N_0+1}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_k(h)| \le \sum_{k=0}^{N_0}|\Delta^2\lambda_k(h)| + \frac{\Sigma(\lambda)}{N_0+1}$$

и, в силу (4.6), (4.7),

$$|U(f, x_0; \Lambda, h) - \theta(x_0)| \le \varepsilon + C_\delta\,(\|f\|+|\theta(x_0)|)\sum_{k=0}^{N_0}|\Delta^2\lambda_k(h)| + \gamma .$$

Здесь, согласно условию (4.1), сумма $\sum_{k=0}^{N_0} |\Delta^2\lambda_k(h)|$ с фиксированным (по h) числом слагаемых стремится к нулю при $h \to +0$. Следовательно,

$$\lim_{h\to+0} |U(f, x_0; \Lambda, h) - \theta(x_0)| \le \varepsilon + \gamma.$$

Ввиду произвольности ε и γ последний предел равен нулю и соотношение (4.2) доказано. Осталось доказать равномерную сходимость (4.3), то есть установить, что

$$\lim_{h\to+0} \left(\max_{-1\le x\le 1} |U(f, x; \Lambda, h) - f(x)| \right) = 0 . \tag{4.8}$$

Как и в случае (4.4), получим

$$|U(f, x; \Lambda, h) - f(x)| \le$$

$$\le \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(|f(\cos(y+t)) - f(\cos y)| + |f(\cos(y-t)) - f(\cos y)|\right)\cdot$$

$$\left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(h)\cos kt\right| dt. \tag{4.9}$$

В силу непрерывности функции *f* для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$|f(\cos(y+t)) - f(\cos y)| + |f(\cos(y-t)) - f(\cos y)| < \frac{\varepsilon}{1 + 2\Sigma(\lambda)} \text{ при } |t| < \delta$$

равномерно по $y \in [0, \pi]$. Далее, аналогично (4.5), (4.6), из оценки (4.9) будет следовать, что

$$|U(f, x; \Lambda, h) - f(x)| \le \varepsilon + C_\delta \left(\max_{-1\le x\le 1} |f(x)| \right) \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta^2\lambda_k(h)| .$$

Для произвольного $\gamma > 0$ подберем теперь столь большой номер $N_0 = N_0(\gamma)$, что

$$\frac{\Sigma(\lambda)}{N_0 + 1} < \frac{\gamma}{1 + C_\delta \max_{-1\le x\le 1} |f(x)|} .$$

Значит

$$|U(f, x; \Lambda, h) - f(x)| \le \varepsilon + C_\delta \left(\max_{-1\le x\le 1} |f(x)| \right) \sum_{k=0}^{N_0} |\Delta^2\lambda_k(h)| + \gamma . \tag{4.10}$$

Поскольку правая часть (4.10) не зависит от x, то оценка сохраняется, если левую часть этого соотношения заменить на $\max_{-1\le x\le 1} |U(f, x; \Lambda, h) - f(x)|$. Как и выше, сумма $\sum_{k=0}^{N_0} |\Delta^2\lambda_k(h)|$ стремится к нулю при $h \to +0$. Значит,

$$\lim_{h\to+0} \left(\max_{-1\le x\le 1} |U(f, x; \Lambda, h) - f(x)| \right) \le \varepsilon + \gamma ,$$

откуда, в силу произвольности ε и γ, и следует утверждение (4.8). Теорема полностью доказана.

5. Класс $\mathbf{C}_{[-1,\,1]}$ функций и средние рядов Фурье–Чебышева

Через $\mathbf{C}_{[-1,\,1]}$ обозначим класс функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$. Будем говорить, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x) \tag{5.1}$$

принадлежит классу $\mathbf{C}_{[-1,\,1]}$, если существует функция $f \in \mathbf{C}_{[-1,\,1]}$, такая, что $\{a_n\}$ есть последовательность ее коэффициентов Фурье–Чебышева

$$a_n = a_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x) p_n(x) \rho(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots .$$

Следующий результат представляет собою обобщение и распространение на случай полиномиальных разложений теоремы 4.2 книги [8, т. 1, с. 222].

Теорема 5.1. Пусть для последовательности (1.5) выполнены условия (3.3), (3.4) и (4.1). Ряд (5.1) принадлежит классу $\mathbf{C}_{[-1,\,1]}$ тогда и только тогда, когда семейство

$$V(x; \Lambda, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(h) a_k \, p_k(x) \tag{5.2}$$

обладает равномерной сходимостью при $h \to +0$.

Доказательство. Если (5.2) есть ряд Фурье–Чебышева функции из класса $\mathbf{C}_{[-1,\,1]}$, то равномерная сходимость $V(x; \Lambda, h)$ установлена в теореме 4.1. Докажем обратное утверждение. Рассмотрим

$$\int_{-1}^{1} V(x;\, \Lambda, h) p_k(x) \rho(x) dx .$$

Ввиду равномерной сходимости $V(x;\, \Lambda, h)$ возможно почленное интегрирование ряда (5.2). С учетом ортонормированности (с весом $\rho(x)$) системы полиномов $\{p_k(x)\}$, получаем

$$\lambda_k(h) a_k = \int_{-1}^{1} V(x; \Lambda, h) p_k(x) \rho(x) dx , \quad k = 0, 1, \dots .$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $h \to +0$ будем, в силу (4.1), иметь

$$a_k = \int_{-1}^{1} \left(\lim_{h \to +0} V(x; \Lambda, h) \right) p_k(x) \rho(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots ,$$

так что (5.2) есть ряд Фурье–Чебышева непрерывной на $[-1, 1]$ функции $f(x) = \lim\limits_{h \to +0} V(x; \Lambda, h)$, что и требовалось доказать.

6. Восстановление функции по ее степенным моментам

Степенными моментами функции $f = f(x)$, суммируемой на $[-1, 1]$ с весом, называются числа

$$\mu_l = \mu_l(f) = \int_{-1}^{1} f(x)x^l \rho(x)dx, \quad l = 0, 1, \ldots \tag{6.1}$$

Одной из составляющих классической проблемы моментов [9, с. 215] является задача о нахождении функции f по заданным μ_l, $l = 0, 1, \ldots$. Пусть, например, известно, что $\{\mu_l\}$ есть бесконечная последовательность степенных моментов некоторой $f \in \mathbf{C}_{[-1, 1]}$. Ставится задача восстановить эту функцию.

Теорема 6.1. Предположим, что для последовательности (1.5) выполнены условия (3.3), (3.4), (4.1). Тогда равномерно по $x \in [-1, 1]$ имеет место равенство

$$f(x) = \lim_{h \to +0} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(h) \left(2^{k-1} \mu_k(f) + \sum_{l=0}^{k-1} \beta_l \mu_l(f) \right) p_k(x), \tag{6.2}$$

где коэффициенты β_l те же, что в разложении косинуса (1.2).

Соотношение (6.2) есть аналог (и обобщение) формулы Херглотца, построенной в случае тригонометрических моментов (см., напр., [9, с. 594]).

Доказательство теоремы. Согласно (6.1) и (1.2) сумма

$$2^{k-1} \mu_k(f) + \sum_{l=0}^{k-1} \beta_l \mu_l(f)$$

есть интеграл вида

$$\int_{-1}^{1} f(x) p_k(x) \rho(x) dx,$$

то есть k-й ($k = 0, 1, \ldots$) коэффициент Фурье–Чебышева искомой непрерывной функции f. Следовательно, под знаком предела в (6.2) записан оператор (1.6). Теперь утверждение теоремы 6.1 вытекает из результата (4.3) теоремы 4.1.

7. Примеры. Обобщения и распространения

7.1. Как показано в [10], важный класс последовательностей (1.5), удовлетворяющих условиям теорем пп.4 – 6, определяется экспоненциальной функцией

$$\lambda_k(h) = \lambda(x, h)\,|_{x=k}\,, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $\lambda(x, h) = \exp(-h\varphi(x))$; $\varphi(0) = 0$, функция $\varphi(x) \in C^2(0, +\infty)$ и возрастает к $+\infty$. Приведем примеры возможных $\varphi(x)$:

1) $\varphi(x) = \ln^{\alpha}(x+1), \quad x > 0, \alpha > 0$;

2) $\varphi(x) = x^{\alpha}, \quad x > 0, \alpha > 0$;

3) $\varphi(x) = P_n(x), x > 0$; $P_n(0) = 0$;

здесь $P_n(x)$ – любой полином с положительным старшим коэффициентом ($n = 1, 2, \ldots$).

Важнейшим примером является метод Пуассона–Абеля [8, т. 1, с. 160 – 165], соответствующий случаю $\lambda(x,h) = \exp(-hx)$.

7.2. Утверждение теоремы 4.1, относящееся к суммированию в точках непрерывности, может быть перенесено (с использованием аналогичной техники) на значительно более общий случай точек Лебега. Таким образом, результаты статьи [11] распространяются на средние рядов Фурье–Чебышева.

7.3. Представление средних $U(f, x; \Lambda, h)$ в тригонометрической форме (1.7) дает возможность обобщить условие (3.3), заменив $\Sigma(\lambda)$ на сумму типа Б. Надя [12]

$$\max_{k=0,1,...} |\lambda_k(h)| + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(|m-k|+1)}{m+k+1} \ln \frac{2(m+k+1)}{|m-k|+1} |\Delta^2 \lambda_k(h)|, \tag{7.1}$$

где $m \geq 0$ – произвольное целое число (m может зависеть от h). В свою очередь, использование (7.1) позволяет расширить класс методов суммирования; так, в «финитном» случае (3.2) результат теоремы 4.1 будет справедлив для методов Чезаро–Абеля

$$\Lambda = \{\lambda_k^m = \frac{A_{m-k}^{\alpha}}{A_m^{\alpha}};\ k = 0, 1, ..., m;\ m = 0, 1, ...;\ \lambda_k^m = 0, k > m\},$$

где $A_m^{\alpha} = \dfrac{(\alpha+1) \cdot ... \cdot (\alpha+m)}{m!}$, $\alpha > 0$.

7.4. Благодаря представлению (1.7) для средних (1.6) могут быть доказаны максимальные весовые оценки, подобные приведенным в работе [3], а также получены другие аналоги результатов [3].

Список литературы

1. Нахман, А. Д. Разложение функций в степенные и тригонометрические ряды : учебное пособие / А. Д. Нахман, Б. П. Осиленкер. – Saarbrucken : Palmarium Academic Publishing, 2017. – 124 с.

2. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. – 2-е изд., доп. – М. : Наука, 1979. – 416 с.

3. Осиленкер, Б. П. Задачи, ассоциированные с представлением Дирихле полугруппы операторов / Б. П. Осиленкер, А. Д. Нахман // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 492 – 511. doi: 10.17277/vestnik.2018.03.pp.492-511

4. Осиленкер, Б. П. О рядах Фурье по обобщенным собственным функциям дискретного оператора Штурма-Лиувилля / Б. П. Осиленкер // Функциональный анализ и его приложения. – 2018. – Т. 52, № 2. – С. 90 – 93. doi: 10.4213/faa3486

5. Осиленкер, Б. П. О линейных методах суммирования разложений Фурье по ортонормированным многочленам / Б. П. Осиленкер // Доклады Академии наук СССР. – 1973. – Т. 209, № 1. – С. 40 – 42.

6. Тиман, А. Ф. Теория приближений функций действительного переменного / А. Ф. Тиман. – М. :Физматгиз, 1960. – 624 с.

7. Алексич, Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов / Г. Алексич ; под ред. П. Л. Ульянова ; пер. с англ. А. В. Ефимова. – М. : Издательство иностранной литературы, 1963. – 359 с.

8. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : пер. с англ. : в 2 т. / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – 2 т.

9. Аткинсон, Ф. В. Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. В. Аткинсон ; пер. с англ. И. С. Иохвидова, Г. А. Каральник ; под ред. И. С. Каца, М. Г. Крейна. – М. : Мир, 1968. – 750 с.

10. Нахман, А. Д. Экспоненциальные методы суммирования рядов Фурье / А. Д. Нахман, Б. П. Осиленкер // Вестник Тамб. гос. техн. ун-та. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 101 – 109.

11. Осиленкер, Б. П. Поведение экспоненциальных средних рядов Фурье и сопряженных рядов Фурье в точках Лебега / Б. П. Осиленкер, А. Д. Нахман // Вестник МГСУ. – 2014. – № 10. – С. 54 – 63.

12. Nagy, B. Sz. Methodes de Sommation des Series de Fourier / B. Sz. Nagy// Acta Sci. Math. Szeged, XII, pars. B. – 1950. – P. 204 – 210.

Function Polynomization Methods and their Applications

A. D. Nakhman

Department of Higher Mathematics, alextmb@mail.ru; TSTU, Tambov, Russia

Keywords: quasiconvex sequences; Fourier – Chebyshev series; summability by semicontinuous methods.

Abstract: A class of semicontinuous quasiconvex methods of summation of Fourier – Chebyshev series is studied. Upper bounds are obtained for the norms of the corresponding operators in the space of continuous functions. The convergence of means in the metric of space is established. The summability at break points of the first kind is also considered. Processes for restoring functions from a given sequence of power moments are proposed. Ways of generalizing the results and extending them to the case of summability at Lebesgue points are indicated.

References

1. Nakhman A.D., Osilenker B.P. *Razlozheniye funktsiy v stepennyye i trigonometricheskiye ryady: uchebnoye posobiye* [Decomposition of functions in power and trigonometric series: a tutorial], Saarbrucken : Palmarium Academic Publishing, 2017, 124 p. (In Russ.)

2. Suyetin P.K. *Klassicheskiye ortogonal'nyye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials], Moscow: Nauka, 1979, 416 p. (In Russ.)

3. Osilenker B.P., Nakhman A.D. [Problems associated with the Dirichlet representation of a semigroup of operators], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 492-511, doi: 10.17277/ vestnik.2018.03.pp.492-511 (In Russ., abstract in Eng.)

4. Osilenker B.P. [On Fourier series in generalized eigenfunctions of the discrete Sturm-Liouville operator], *Funktsional'nyy analiz i yego prilozheniya* [Functional analysis and its applications], 2018, vol. 52, no. 2, pp. 90-93, doi: 10.4213/faa3486 (In Russ., abstract in Eng.)

5. Osilenker B.P. [On linear methods of summation of Fourier expansions in orthonormal polynomials], *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1973, vol. 209, no. 1, pp. 40-42. (In Russ.)

6. Timan A.F. *Teoriya priblizheniy funktsiy deystvitel'nogo peremennogo* [Theory of approximations of functions of a real variable], Moscow: Fizmatgiz, 1960, 624 p. (In Russ.)

7. Aleksich G., Ul'yanov P. L. [Ed.] *Problemy skhodimosti ortogonal'nykh ryadov* [Problems of convergence of orthogonal series], Moscow: Izdatel'stvo inostrannoy literatury, 1963, 359 p. (In Russ.)

8. Zygmund A. *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959.

9. Atkinson F.V., Kats I.S., Kreyn M.G. [Eds.] *Diskretnyye i nepreryvnyye granichnyye zadachi* [Discrete and continuous boundary problems], Moscow: Mir, 1968, 750 p. (In Russ.)

10. Nakhman A.D., Osilenker B.P. [Exponential methods of summation of Fourier series], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 101-109. (In Russ., abstract in Eng.)

11. Osilenker B.P., Nakhman A.D. [Behavior of exponential means of Fourier series and conjugate Fourier series at Lebesgue points], *Vestnik MGSU* [Bulletin of MGSU], 2014, no. 10, pp. 54-63. (In Russ., abstract in Eng.)

12. Nagy B.Sz. Methodes de Sommation des Series de Fourier, *Acta Sci. Math. Szeged,* XII., pars. B, 1950, pp. 204-210.

Polynomisierungsmethoden der Funktionen und ihre Anwendungen

Zusammenfassung: Eine Klasse halbstetiger quasikonvexer Summationsmethoden der Fourier–Chebyshev-Reihe wird untersucht. Es sind Obergrenzen für die Normen der entsprechenden Operatoren im Raum stetiger Funktionen erhalten. Es ist die Konvergenz der Mittel in der Raummetrik festgestellt. Es ist auch die Summierbarkeit in den Bruchpunkten der ersten Art betrachtet. Es sind Verfahren zum Wiederherstellen der Funktionen nach der gegebenen Reihenfolge der Potenzmomente vorgeschlagen. Es sind die Möglichkeiten angegeben, die Ergebnisse zu verallgemeinern und auf den Fall der Summierbarkeit in Lebesgue-Punkten auszudehnen.

Méthodes de polynomisation des fonctions et de leur application

Résumé: Est étudiée une classe des méthodes semi–continues de sommation de séries de Fourier–Tchebyshev. Sont obtenues les supérieures estimations des normes des opérateurs correspondant dans l'espace des fonctions continues. Est établie la convergence des moyennes dans la métrique de l'espace. Est également examinée la sommabilité aux points de rupture du premier ordre. Sont proposés des processus de la restauration des fonctions selon une séquence donnée des moments de puissance. Sont indiqués les moyens de la généralisation des résultats et leur application dans le cas de la sommabilité aux points de Lebesgue.

Автор: ***Нахман Александр Давидович*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.

Рецензент: ***Куликов Геннадий Михайлович*** **–** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий научно-исследовательской лабораторией, ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.