УДК 517.518
DOI: 10.17277/vestnik.2019.04.pp.644-659

НЕКАСАТЕЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ СРЕДНИХ СОПРЯЖЕННЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

А. Д. Нахман

Кафедра «Высшая математика», alextmb@mail.ru;
ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия

Ключевые слова: оценки слабого типа; сопряженный ряд Фурье; суммирующая последовательность.

Аннотация: Построен класс $\left\{\widetilde{U}_h(f)\right\}$ средних сопряженных рядов Фурье, порожденных периодическими функциями f, интегрируемыми по Лебегу. Семейство средних определяется полунепрерывными методами суммирования. Получены оценки слабого типа соответствующих максимальных операторов при выполнении обобщенного условия Б. Надя на суммирующую последовательность. Следствием оценок является сходимость средних к сопряженной функции $\widetilde{f}$ по любым некасательным направлениям. В основе результатов лежат максимальные оценки свертки произвольной функции f с сопряженным ядром Валле-Пуссена. В качестве возможных приложений указаны вопросы суммируемости рядов Фурье по системе многочленов Чебышева второго рода и вопросы суммируемости продифференцированных рядов Фурье. Установлена некасательная суммируемость степенных разложений аналитических функций классов Харди на границе единичного круга.

---

1. Введение. Постановка задачи

В работе [1] рассмотрены вопросы суммируемости рядов Фурье

$$s\left[f, y\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\exp(iky) \tag{1.1}$$

функций классов $L(Q)$, то есть 2π-периодических функций f, интегрируемых (по Лебегу) на $Q = (-\pi, \pi]$; здесь

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-ikt)\,dt\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{1.2}$$

– последовательность комплексных коэффициентов Фурье.

Методы суммирования при этом определялись членами бесконечной, вообще говоря, последовательности

$$\Lambda = \{\lambda_k(h),\ h > 0,\ k = 0, 1, ...;\ \lambda_0(h) = 1\}\,. \tag{1.3}$$

В настоящей статье подобные вопросы изучаются в случае средних

$$\widetilde{U}_h(f) = \widetilde{U}(f, y; \Lambda, h) = -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\operatorname{sgn} k)\lambda_{|k|}(h)\, c_k(f) \exp(iky) \tag{1.4}$$

сопряженного ряда Фурье

$$\widetilde{s}\,[f, y] = -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\operatorname{sgn} k) c_k(f) \exp(iky) \tag{1.5}$$

функции $f \in L(Q)$. Рассмотрение средних (1.4) не менее важно, чем в случае семейств средних «обычных» рядов Фурье по нескольким причинам; например (1.4) представляют интерес с точки зрения поведения аналитических функций на границе области сходимости; см. [2]. При этом наиболее интересны вопросы «нетангенциальной» (некасательной) сходимости, то есть поведения (1.4) при $(y, h) \to (x, 0)$, где $x \in Q$, а $\Gamma_d(x)$ – область, определяемая неравенством $\dfrac{|y - x|}{h} \le d$, $d = \text{const}$, $d > 0$. Мы обобщаем и распространяем на (1.4) результаты [3] в случае, когда суммирующая последовательность (1.3) удовлетворяет условиям типа Б. Надя [4].

Случай «финитных» суммирующих последовательностей, соответствующий дискретным значений параметра $h = h_m$, исследовался в работах разных авторов для рядов Фурье (1.1); он соответствует треугольной матрице

$$\Lambda = \{\lambda_k^m;\ k = 0, 1, ..., m;\ m = 0, 1, ...;\ \lambda_0^n = 1;\ \lambda_k^m = 0,\ k > m\}\,;$$

см., например, статью [5] и библиографию в ней. В этом случае, выполняя преобразование Абеля, получаем (1.4) в виде

$$\widetilde{U}_m(f, y; \Lambda) = \sum_{k=0}^{m} \Delta\lambda_k^m\ \widetilde{s}_k[f, y]\,,$$

где $\widetilde{s}_k[f, y]$ – последовательность частичных сумм k-го порядка $(k = 0, 1, ...)$ сопряженного ряда Фурье, а $\Delta\lambda_k^m = \lambda_k^m - \lambda_{k+1}^m$. Классический пример – суммы Фейера

$$\widetilde{\Theta}_m(f, y) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \widetilde{s}_k[f, y],\ m = 0, 1, ..., \tag{1.6}$$

интегральное ядро которых будет использовано в дальнейшем.

2. Максимальные операторы

В качестве основного средства исследования поведения семейства (1.4) рассматриваем оценки с помощью функций

$$f^* = f^*(x) = \sup_{\eta > 0} \frac{1}{\eta} \int_{x-\eta}^{x+\eta} |f(t)|\, dt \tag{2.1}$$

и

$$\widetilde{f}^{*}=\widetilde{f}^{*}(x)=\sup_{\eta>0}\Big|\int\limits_{\eta\le|x-t|\le\pi}\frac{f(t)}{\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}}dt\,\Big|\,. \tag{2.2}$$

Максимальные функции (2.1) и (2.2) определены ([6], т. 1, с. 60, 401-402, 442, 443) для всякой $f\in L(Q)$; кроме того, в этом случае почти всюду существует сопряженная функция

$$\widetilde{f}(x)=-\frac{1}{2}\lim_{\eta\to+0}\int\limits_{\eta\le|x-t|\le\pi}\frac{f(t)}{\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}}dt\,.$$

В свою очередь, для (2.1) и (2.2) имеют место так называемые оценки «слабого типа»

$$\mu\Big\{x\in Q\,|\,f^{*}(x)>\varsigma>0\Big\}\le C\,\frac{\|f\|_L}{\varsigma}\,,\ \mu\Big\{x\in Q\,|\,\widetilde{f}^{*}(x)>\varsigma>0\Big\}\le C\,\frac{\|f\|_L}{\varsigma}\,, \tag{2.3}$$

где μ – лебегова мера соответствующих множеств. Здесь и в дальнейшем через C обозначены положительные постоянные, различные, вообще говоря, в различных формулах и зависящие лишь от явно указанных индексов.

3. Интегральное ядро сопряженных средних Вале-Пуссена

Для любых неотрицательных целых k и m определим средние Валле-Пуссена ряда (1.4) в виде, аналогичном (1.6), следующим образом:

$$\begin{gathered}\widetilde{u}_{m,k}(f,y)=\frac{1}{m-k+1}\sum_{\nu=k}^{m}\widetilde{s}_{\nu}[f,y]\,,\ k=0,...,m;\\ \widetilde{u}_{m,k}(f,y)=\frac{1}{k-m-1}\sum_{\nu=m+1}^{k-1}\widetilde{s}_{\nu}[f,y],\ k=m+2,m+3,...\end{gathered} \tag{3.1}$$

Отметим, что случай $k=m+2,m+3,...$ в (3.1) ранее не рассматривался; он потребуется в связи со спецификой «нетангенциальной» суммируемости; случай $k=m+1$ нам не потребуется, но в целях полноты изложения о нем будет сказано ниже. Средние (3.1) включают в себя последовательности частичных сумм $\widetilde{s}_k[f,y]$ и сумм Фейера (1.6):

$$\widetilde{u}_{k,k}(f,y)=\widetilde{s}_k[f,y]\,,\quad k=0,1,...;\quad \widetilde{u}_{m,0}(f,y)=\widetilde{\Theta}_m(f,y)\,,\quad m=0,1,...$$

Дальнейшее рассмотрение будет опираться на интегральные формы $\widetilde{s}_k[f,y]$, $\widetilde{\Theta}_m(f,y)$ и $\widetilde{u}_{m,k}(f,y)$, к которым приходим на основании определений (3.1) и (1.2):

$$\widetilde{s}_k[f,y]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\widetilde{D}_k(y-t)\,dt\,; \tag{3.2}$$

$$\widetilde{\Theta}_m(f,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\widetilde{F}_m(y-t)\,dt\,; \tag{3.3}$$

$$\widetilde{u}_{m,k}(f,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\widetilde{V}_{m,k}(y-t)\,dt. \tag{3.4}$$

Здесь сопряженные ядра Дирихле, Фейера и Вале-Пуссена имеют, соответственно, вид:

$$\widetilde{D}_k(z) = \sum_{\nu=1}^{k} \sin \nu z = \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{2}} - \overline{D}_k(z)\text{, где } \overline{D}_k(z) = \frac{\cos(k+\frac{1}{2})z}{2\sin\frac{z}{2}},\ k = 1, 2, \ldots; \tag{3.5}$$

$$\widetilde{F}_m(z) = \frac{1}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m} \widetilde{D}_\nu(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{2}} - \overline{F}_m(z),\ \text{где}\ \overline{F}_m(z) = \frac{\sin(m+1)z}{4(m+1)\sin^2\frac{z}{2}},\ m = 0, 1, \ldots; \tag{3.6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{V}_{m,k}(z) = \frac{1}{m-k+1}\sum_{\nu=k}^{m} \widetilde{D}_\nu(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{2}} - \overline{V}_{m,k}(z),\ k = 0, 1, \ldots, m; \\ &\widetilde{V}_{m,k}(z) = \frac{1}{k-m-1}\sum_{\nu=m+1}^{k-1} \widetilde{D}_\nu(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{2}} - \overline{V}_{m,k}(z),\ k = m+2, m+3, \ldots \end{aligned}\right., \tag{3.7}$$

где

$$\overline{V}_{m,k}(z) = \frac{\sin\frac{m-k+1}{2}z\cos\frac{m+k+1}{2}z}{2(m-k+1)\sin^2\frac{z}{2}},\ k = 0, \ldots, m, m+2, \ldots . \tag{3.8}$$

Положим также по определению

$$\overline{V}_{m,m+1}(z) = \frac{z\cos(m+1)z}{4\sin^2\frac{z}{2}},\ m = 0, 1, \ldots .$$

Значения $z = y - t$, без ограничения общности, в равенствах (3.2) – (3.4) можно считать расположенными в Q ввиду 2π-периодичности подинтегральных выражений; например, при интегрировании по t таким, что $-2\pi \le y - t \le -\pi$, достаточно сделать в интеграле замену переменных $t = t' + 2\pi$.

Легко проверить, что при всех $k = 0, 1, \ldots$, $m = 0, 1, \ldots$ ядра (3.5) – (3.7) связаны следующими соотношениями:

$$\widetilde{D}_k(t) = (k+1)\widetilde{F}_k(t) - k\widetilde{F}_{k-1}(t)\,; \tag{3.9}$$

$$\widetilde{D}_k(t) = (m-k+1)\widetilde{V}_{m,k}(t) - (m-k)\widetilde{V}_{m,k+1}(t)\,. \tag{3.10}$$

Заметим, что (3.10) в случаях $k = m$ и $k = m+1$ принимает вид, соответственно $\widetilde{D}_m(t) = \widetilde{V}_{m,m}(t)$ и $\widetilde{D}_{m+1}(t) = \widetilde{V}_{m,m+2}(t)$.

Приведем теперь оценки ядер, которые потребуются в дальнейшем. Согласно (3.5) будем иметь

$$\left|\widetilde{D}_k(z)\right| \le \begin{cases} C(k+1), \\ \dfrac{C}{|\,t\,|},\ t \ne 0 \end{cases}. \tag{3.11}$$

Далее, в силу (3.7) и (3.8), справедливы неравенства

$$\left|\widetilde{V}_{m,k}(z)\right| \le \begin{cases} C(m+k+1), \\ \dfrac{C}{|t|}, \ 0<|t|\le \pi \end{cases} \tag{3.12}$$

и

$$\left|\overline{V}_{m,k}(z)\right| \le \frac{C}{(|m-k|+1)t^2}, \ \ 0<|t|\le \pi. \tag{3.13}$$

4. Максимальные оценки сопряженных средних Вале-Пуссена

Обозначим через m целую часть числа $\dfrac{1}{2dh}$; можно считать $0<h\le \dfrac{1}{2d}$, так что $m \ge 1$. В утверждениях п. 4 считаем $k \ne m+1$.

Лемма 4.1. 1) Пусть $k=1,\dots,2m-1$. Тогда при всех $(y,h)\in \Gamma_d(x)$ справедлива оценка

$$\left|\widetilde{u}_{m,k}(f,y)\right| \le C\left(\widetilde{f}^*(x)+\ln\frac{2(m+k+1)}{|m-k|+1} f^*(x)\right). \tag{4.1}$$

2) Если $k=2m, 2m+1, \dots$, то при всех $(y,h)\in\Gamma_d(x)$

$$\left|\widetilde{u}_{m,k}(f,y)\right| \le C\frac{m+k}{m} f^*(x). \tag{4.2}$$

Замечание. Объединяя оценки (4.1) и (4.2) получим при всех $k=1,2,\dots$, $k\ne m+1$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\widetilde{V}_{m,k}(y-t)\,dt\right| \le C\left(\widetilde{f}^*(x)+\frac{m+k+1}{m}\ln\frac{2(m+k+1)}{|m-k|+1} f^*(x)\right). \tag{4.3}$$

Отметим также, что оценка (4.3) имеет и самостоятельный интерес.

Доказательство леммы 4.1. Прежде всего заметим, что если $|x-t|\ge \dfrac{1}{m}$, то $|x-t|\ge 2dh$ (см. выбор m), и тогда из неравенства $|y-t|\ge|x-t|-|y-x|$ вытекает соотношение $|y-t|\ge|x-t|-dh\ge \dfrac{1}{2}|x-t|$ для всех $(y,h)\in\Gamma_d(x)$. Следовательно, оценка

$$|y-t|\ge\frac{1}{2}|x-t| \tag{4.4}$$

оказывается справедливой при всех x и t, удовлетворяющих условию $|x-t|\ge\dfrac{1}{m}$.

1) Если $1\le k\le 2m-1$, то

$$\frac{1}{|m-k|+1}\ge\frac{1}{m}.$$

Выберем натуральные числа $S_1 = S_1(k,m)$, $S_2 = S(k,m)$, $S_3 = S_3(k,m)$, так, что $\frac{2^{S_1-1}}{m} \le \frac{1}{|m-k|+1} < \frac{2^{S_1}}{m}$, $\frac{2^{S_2-1}}{|m-k|+1} \le 2\pi < \frac{2^{S_2}}{|m-k|+1}$ и $\frac{2^{S_3-1}}{m} \le 2\pi < \frac{2^{S_3}}{m}$.

Имеем, согласно (3.7) и (3.12),

$$\left| \widetilde{u}_{m,k}(f,y) \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \widetilde{V}_{m,k}(y-t)\, dt \right| \le$$

$$\le C \left((m+k) \int_{|x-t|\le \frac{1}{m}} |f(t)|\, dt + \left| \int_{\frac{1}{m}\le|x-t|\le\pi} \frac{f(t)}{\operatorname{tg}\frac{y-t}{2}} dt \right| + \int_{\frac{1}{m}\le|x-t|\le\pi} |f(t)| \cdot \left| \overline{V}_{m,k}(y-t) \right| dt \right) =$$

$$= C\big(J_1(x,m) + J_2(x,m) + J_3(x,m)\big). \tag{4.5}$$

При $1 \le k \le 2m-1$ очевидно, что

$$J_1(x,m) \le Cm \int_{|x-t|\le \frac{1}{m}} |f(t)|\, dt \le C f^*(x). \tag{4.6}$$

Далее,

$$J_2(x,m) = \left| \int_{\frac{1}{m}\le|x-t|\le\pi} f(t) \operatorname{ctg}\frac{x-t}{2} dt + \int_{\frac{1}{m}\le|x-t|\le\pi} f(t) \frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}\sin\frac{y-t}{2}} dt \right|.$$

Если принять во внимание (4.4), то

$$J_2(x,m) \le C \left(\widetilde{f}^*(x) + h \int_{\frac{1}{m}\le|x-t|\le\pi} |f(t)| \frac{1}{(x-t)^2} dt \right); \tag{4.7}$$

при этом

$$h \int_{\frac{1}{m}\le|x-t|\le\pi} |f(t)| \frac{1}{(x-t)^2} dt \le h \sum_{j=1}^{S_3} \frac{m}{2^j} \left(\frac{m}{2^j} \int_{\frac{2^{j-1}}{m}\le|x-t|\le\frac{2^j}{m}} |f(t)|\, dt \right) \le Cf^*(x). \tag{4.8}$$

Согласно (4.7), (4.8),

$$J_2(x,m) \le C\left(\widetilde{f}^*(x) + f^*(x) \right). \tag{4.9}$$

Слагаемое $J_3(x,m)$ в (4.5) оценим с помощью (3.12) и (3.13). Получим последовательно, с учетом (4.4)

$$J_3(x,m)\le C\left(\int\limits_{\frac{1}{m}\le|x-t|\le\frac{1}{|m-k|+1}}|f(t)|\frac{1}{|x-t|}dt+\int\limits_{\frac{1}{|m-k|+1}\le|x-t|\le 2\pi}|f(t)|\frac{1}{(|m-k|+1)(x-t)^2}dt\right)\le$$

$$\le C\sum_{j=1}^{S_1}\frac{m}{2^{j-1}}\int\limits_{\frac{2^{j-1}}{m}\le|x-t|\le\frac{2^j}{m}}|f(t)|\,dt+C\sum_{j=1}^{S_2}\frac{1}{2^{j-1}}\left(\frac{|m-k|+1}{2^{j-1}}\int\limits_{\frac{2^{j-1}}{|m-k|+1}\le|x-t|\le\frac{2^j}{|m-k|+1}}|f(t)|\,dt\right)\le$$

$$\le C(1+S_1)f^*(x)\le C\ln\frac{2(m+k+1)}{|m-k|+1}f^*(x). \qquad (4.10)$$

Теперь соотношение (4.1) при $k=1,...,2m-1$ вытекает из представления (4.5) и оценок (4.6), (4.9) (4.10).

2) Если же $k\ge 2m$, то $k-m\ge m$. В этом случае сохраняются соотношение (4.5) и оценка (4.9). Вместо (4.6), согласно (3.12), получим

$$J_1(x,m)\le C\frac{m+k}{m}m\int\limits_{|x-t|\le\frac{1}{m}}|f(t)|\,dt\le C\frac{m+k}{m}f^*(x). \qquad (4.11)$$

Далее,

$$J_3(x,m)\le C\int\limits_{\frac{1}{m}\le|x-t|\le\pi}|f(t)|\frac{1}{(|m-k|+1)(y-t)^2}dt\le\frac{C}{|m-k|+1}\int\limits_{\frac{1}{m}\le|x-t|\le\pi}|f(t)|\frac{1}{(x-t)^2}dt\le$$

$$\le\frac{Cm}{k-m+1}\sum_{j=1}^{S_3}\frac{1}{2^j}\frac{m}{2^j}\int\limits_{\frac{2^{j-1}}{m}\le|x-t|\le\frac{2^j}{m}}|f(t)|\,dt\ )\le C\,f^*(x). \qquad (4.12)$$

Тогда утверждение (4.2) следует из соотношений (4.9), (4.11), (4.12). Лемма 4.1 доказана.

Следствие 4.1. При всех $(y,h)\in\Gamma_d(x)$ и $k=0,1,...,m$ справедлива оценка

$$\left|\widetilde{\Theta}_k(f,y)\right|\le C\left(\widetilde{f}^*(x)+f^*(x)\right). \qquad (4.13)$$

Соотношение (4.13) вытекает из (4.1), поскольку $\widetilde{\Theta}_k(f,y)=\widetilde{u}_{k,0}(f,y)$. При этом в случае $k=0$ утверждение остается справедливым ввиду того, что левая часть (4.13) обращается в ноль.

5. Максимальные оценки Λ-средних сопряженных рядов Фурье

Пусть, как и выше, $m=[\frac{1}{2dh}]$,

$$\sum(h;\Lambda,d)=\max_{k=0,1,...}\left|\lambda_k(h)\right|+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(|m-k|+1)}{m}\ln\frac{2(m+k+1)}{|m-k|+1}\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|,$$

и

$$\widetilde{U}^*(f, x; \Lambda) = \sup_{(y,h)\in\Gamma_d(x)} |\widetilde{U}(f, y; \Lambda, h)|.$$

Теорема 5.1. Если члены последовательности (1.3) при каждом $h > 0$ удовлетворяют условию

$$|\lambda_N(h)|\ N + |\Delta\lambda_N(h)|\ N^2 = o(1),\ \ N \to \infty\ , \tag{5.1}$$

и существует постоянная $C_{\Lambda,d}$ такая, что

$$\sum(h; \Lambda, d) < C_{\Lambda,d}\ , \tag{5.2}$$

то для почти всех y ряд (1.4) сходится и имеет место оценка

$$\widetilde{U}^*(f, x; \Lambda) \le C_{\Lambda,d}\left(\widetilde{f}^*(x) + f^*(x)\right). \tag{5.3}$$

Доказательство. Перейдем к интегральной форме (1.4), воспользовавшись представлением (1.2) коэффициентов Фурье и преобразованием Абеля ([6], т. 1, с. 15). Получаем

$$\widetilde{U}(f, y; \Lambda, h) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(h)\sin k(y-t)\,dt =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\lambda_k(h)\left(\widetilde{D}_k(y-t) - \widetilde{D}_{k-1}(y-t)\right)\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{N\to+\infty}\left\{\lambda_N(h)\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\widetilde{D}_N(y-t)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=0}^{N-1}\Delta\lambda_k(h)\,\widetilde{D}_k(y-t)\,dt\right\}. \tag{5.4}$$

Первое слагаемое под знаком предела в правой части (5.4) стремится к нулю для всех y благодаря первой из оценок (3.11) и условию (5.1). Значит, согласно (5.4),

$$\widetilde{U}(f, y; \Lambda, h) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Delta\lambda_k(h)\widetilde{D}_k(y-t)dt. \tag{5.5}$$

Обозначим через ρ целую часть числа $\frac{m}{2}$. Из равенств (5.5), (3.9), (3.10) с помощью преобразования Абеля будем иметь

$$\widetilde{U}(f, y; \Lambda, h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\sum_{k=0}^{\rho}\Delta\lambda_k(h)\left((k+1)\widetilde{F}_k(y-t) - k\widetilde{F}_{k-1}(y-t)\right)\right\} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\sum_{k=\rho+1}^{N}\Delta\lambda_k(h)\left((m-k+1)\,\widetilde{V}_{m,k}(y-t) - (m-k)\,\widetilde{V}_{m,k+1}(y-t)\right)\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\Delta\lambda_\rho(h)(\rho+1)\widetilde{F}_\rho(y-t) + \sum_{k=0}^{\rho-1}\Delta^2\lambda_k(h)(k+1)\widetilde{F}_k(y-t)\right\} dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\Delta\lambda_{\rho+1}(h)(m-\rho)\widetilde{V}_{m,\rho+1}(y-t)\right\}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{-\Delta\lambda_N(h)(m-N)\widetilde{V}_{m,N+1}(y-t)-\sum_{k=\rho+1}^{N-1}\Delta^2\lambda_k(h)(m-k)\widetilde{V}_{m,k+1}(y-t)\right\}dt. \tag{5.6}$$

Применяя, далее, в равенстве (5.6) оценку (4.13) для случая подинтегрального ядра Фейера и оценку (4.1) для случая ядра Вале-Пуссена, получим при всех $(y,h)\in\Gamma_d(x)$

$$\left|\widetilde{U}(f,y;\Lambda,h)\right|\le C\left(\widetilde{f}^*(x)+f^*(x)\right)\left\{\left|\Delta\lambda_\rho(h)\right|(\rho+1)+\sum_{k=0}^{\rho-1}\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|(k+1)+\right.$$

$$+\left|\Delta\lambda_{\rho+1}(h)\right|(m-\rho)+\lim_{N\to\infty}\left\{|\Delta\lambda_N(h)|(|m-N|+1)\ln\frac{2(m+N+1)}{|m-N|+1}\right\}+$$

$$\left.+\sum_{k=\rho+1}^{N-1}|\Delta^2\lambda_k(h)|(|m-k|+1)\ln\frac{2(m+k+1)}{|m-k|+1}\right\}. \tag{5.7}$$

Члены $|\Delta\lambda_\rho(h)|(\rho+1)$ и $|\Delta\lambda_{\rho+1}(h)|(m-\rho)$ будут оценены сверху через $\sum(h;\Lambda,d)$ благодаря соотношению

$$(\rho+1)\Delta\lambda_{\rho+1}(h)=\lambda_0(h)-\lambda_{\rho+1}(h)+\sum_{k=0}^{\rho}(k+1)\Delta^2\lambda_k(h).$$

Осталось установить, что

$$\lim_{N\to\infty}\left|\Delta\lambda_N(h)\right|\left(|m-N|+1\right)\ln\frac{2(m+N+1)}{|m-N|+1}=0. \tag{5.8}$$

Доказывая (5.8), можно считать $N\ge 2m$, так что $N-m\ge\frac{N}{2}$ и

$$\left|\Delta\lambda_N(h)\right|\left(|m-N|+1\right)\ln\frac{2(m+N+1)}{|m-N|+1}\le C(N+1)\left|\Delta\lambda_N(h)\right|\le C\sum_{k=N}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|,$$

поскольку (согласно (5.1))

$$\Delta\lambda_N(h)=\sum_{k=N}^{\infty}\Delta^2\lambda_k(h).$$

Последняя сумма, в силу очевидной (при $k\ge 2m$) оценки

$$k+1\le C\frac{(k+1)(|m-k|+1)}{m}\ln\frac{2(m+k+1)}{|m-k|+1},$$

не превосходит

$$\sum_{k=N}^{\infty}\frac{(k+1)(|m-k|+1)}{m}\ln\frac{2(m+k+1)}{|m-k|+1}\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|, \tag{5.9}$$

а выражение (5.9) стремится к нулю при $N \to \infty$ согласно условию (5.2). Соотношение (5.8) установлено.

Условия (5.1) и (5.2), таким образом, обеспечивают сходимость ряда, записанного в правой части (5.7). Теперь ряд (5.6) (мажорируемый сходящимся рядом) сходится при всех y, таких что $(y,h) \in \Gamma_d(x)$ если, при этом, сумма $\widetilde{f}^*(x) + f^*(x)$ конечна. Последнее верно, как указано выше, для почти всех x, а значит сходимость (5.6) имеет место почти всюду.

Далее, получаем из соотношений (5.7), (5.8) утверждение (5.3). Теорема 5.1 полностью доказана.

6. Оценка слабого типа. Некасательная суммируемость

Теорема 6.1. 1) Пусть последовательность (1.3) при всех $h > 0$ удовлетворяет условиям (5.1) и (5.2). Тогда имеет место оценка

$$\mu\left\{ x \in Q \mid \widetilde{U}^*(f, x; \Lambda) > \varsigma > 0 \right\} \le C_{\Lambda,d} \frac{\| f \|_L}{\varsigma}. \tag{6.1}$$

2) Если, кроме того,

$$\lim_{h \to 0} \lambda_k(h) = 1; \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{6.2}$$

то почти всюду имеет место соотношение

$$\lim_{\substack{(y,h)\to(x,0)\\ (y,h)\in\Gamma_d(x)}} \widetilde{U}(f, y; \Lambda, h) = \widetilde{f}(x). \tag{6.3}$$

Доказательство. Оценка слабого типа (6.1) есть прямое следствие соотношений (5.3) и (2.3). Для доказательства (6.3) зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и представим данную функцию в виде $f = T + \varphi$, где тригонометрический полином T имеет столь высокий порядок, что выполнено неравенство $\| \varphi \|_L < \varepsilon^2$. Тогда [6, т. 1, с. 404] имеет место соотношение $\widetilde{s}\,[T, y] = s\,[\widetilde{T}, y]$, и, следовательно,

$$\left| \widetilde{U}(f, y; \Lambda, h) - \widetilde{f}(x) \right| = \left| \widetilde{U}(T, y; \Lambda, h) - \widetilde{T}(x) + \widetilde{U}(\varphi, y; \Lambda, h) - \widetilde{\varphi}(x) \right| \le$$

$$\le \left| U(\widetilde{T}, y; \Lambda, h) - \widetilde{T}(x) \right| + \sup_{(y,h)\in\Gamma_d(x)} \left| \widetilde{U}(\varphi, y; \Lambda, h) \right| + \left| \widetilde{\varphi}(x) \right|, \tag{6.4}$$

где через U обозначены Λ-средние ряда соответствующего ряда Фурье (1.1); см. [1]. Легко проверить, что вследствие условия (6.2) для всякой экспоненты $z_k(y) = \exp iky$ при $h \to 0$ имеет место соотношение $U(z_k, y; \Lambda, h) \to z_k(y)$. При этом $z_k(y) \to z_k(x)$, если точка (y, h) стремится к $(x, 0)$ по любому некасательному направлению. Тогда для тригонометрического полинома $\widetilde{T}$ и каждого x

$$\lim_{\substack{(y,h)\to(x,0)\\ (y,h)\in\Gamma_d(x)}} U(\widetilde{T}, y; \Lambda, h) = \widetilde{T}(x).$$

Значит, согласно (6.4),

$$\lim_{\substack{(y,h)\to(x,0)\\ (y,h)\in\Gamma_d(x)}} \left| U(f, y; \Lambda, h) - \widetilde{f}(x) \right| = \widetilde{U}^*(\varphi, x; \Lambda) + \left| \widetilde{\varphi}(x) \right|. \tag{6.5}$$

В то же время

$$\mu\left\{x\in Q \mid \widetilde{U}^*(\varphi,x;\Lambda)+|\widetilde{\varphi}(x)|>\varepsilon>0\right\}\le C_{\Lambda,d}\frac{\|\varphi\|_L}{\varepsilon}\le C_{\Lambda,d}\,\varepsilon\,,$$

если принять во внимание (2.3) и (6.1). Ввиду произвольности ε последнее соотношение означает, что правая часть (6.5) почти всюду равна нулю. Утверждение (6.3) доказано.

7. Аналог свойства локализации

Пусть теперь $\Phi(E)$ – счетно-аддитивная функция множеств, определенная для измеримых (по Лебегу) подмножеств $E\subset Q$, причем $\Phi(E)=\Phi(E^*)$, если E^* получено из E сдвигом на $2\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\ldots$. Ее коэффициенты Фурье определяются в виде [6, т. 2, с. 471]

$$c_k^{\#}(\Phi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(-ikt)\,\Phi(dt),\qquad k=0,1,\ldots\,.$$

Рассмотрим семейство Λ-средних

$$\widetilde{W}(\Phi,y;\Lambda,h)=-i\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\operatorname{sgn}k)\lambda_{|k|}(h)\,c_k^{\#}(\Phi)\exp(iky) \tag{7.1}$$

сопряженного ряда Фурье–Стильтьеса функции Φ и, в качестве приложения результатов п. 6, изучим вопрос об аналоге свойства локализации [6, т. 2, стр. 472] семейства (7.1). Как оказывается, свойство локализации здесь будет заменено следующим результатом.

Теорема 7.1. Пусть последовательность (1.3) удовлетворяет условиям (5.1), (5.2) и (6.2). Если $\Phi\,(E)$ равна нулю для всех $E\subset I$, где I – интервал вида $|x-x_0|\le b$, то почти во всех точках x из этого интервала имеет место соотношение

$$\lim_{\substack{(y,h)\to(x,0)\\(y,h)\in\Gamma_d(x)}}\left(\widetilde{W}(\Phi,y;\Lambda,h)-\frac{1}{\pi}\int_{Q\setminus I}\frac{\Phi(dt)}{2\operatorname{tg}\frac{y-t}{2}}\right)=0. \tag{7.2}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что (7.2) справедливо почти всюду на всяком интервале $I_{2\delta}$, определяемом неравенством $|x-x_0|\le b-2\delta$, где $\delta\in(0,\frac{b}{2})$ – произвольно и фиксировано. Рассмотрим соотношение (5.6), в котором будет записано (в подинтегральных выражениях) $\Phi(dt)$ вместо $f(t)dt$. Имеем для всех $(y,h)\in\Gamma_d(x)$

$$\widetilde{W}(\Phi,y;\Lambda,h)=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k(h)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2tg\frac{y-t}{2}}-\overline{D}_k(y-t)\right)\Phi(dt)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{Q}\frac{\Phi(dt)}{2\operatorname{tg}\frac{y-t}{2}}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\Delta\lambda_\rho(h)(\rho+1)\overline{F}_\rho(y-t)+\sum_{k=0}^{\rho-1}\Delta^2\lambda_k(h)(k+1)\overline{F}_k(y-t)\right\}\Phi(dt)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta\lambda_{\rho+1}(h)(m-\rho)\,\overline{V}_{m,\rho+1}(y-t)\Phi(dt)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{-\Delta\lambda_N(h)(m-N)\,\overline{V}_{m,N+1}(y-t)-\sum_{k=\rho+1}^{N-1}\Delta^2\lambda_k(h)(m-k)\,\overline{V}_{m,k+1}(y-t)\right\}\Phi(dt). \tag{7.3}$$

Ввиду равенства нулю функции Φ все интегралы по I в (7.3) равны нулю. На множестве $Q\setminus I$ выполняется неравенство $|x-t|\geq 2\delta$. Если считать h столь малым, что $0<dh\leq\delta$, то $2\delta\leq|x-t|\leq dh+|y-t|$, а поэтому на $Q\setminus I$ справедливо соотношение $|y-t|\geq\delta$.

С учетом второй из оценок в (3.12), из (7.3) будем иметь при $(y,h)\in\Gamma_d(x)$ и почти всех $x\in I_{2\delta}$

$$\left|\widetilde{W}(\Phi,y;\Lambda,h)-\frac{1}{\pi}\int_{Q\setminus I}\frac{\Phi(dt)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{y-t}{2}}\right|\leq\frac{C}{\delta}\int_{Q\setminus I}\left\{\left|\Delta\lambda_\rho(h)\right|+\sum_{k=0}^{\rho-1}\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|+\left|\Delta\lambda_{\rho+1}(h)\right|\right\}|\,\Phi(dt)\,|+$$

$$+\frac{C}{\delta}\lim_{N\to\infty}\int_{Q\setminus I}\left\{|\,\Delta\lambda_N(h)\,|+\sum_{k=\rho+1}^{N-1}|\,\Delta^2\lambda_k(h)\,|\right\}\left|\Phi(dt)\right|\leq$$

$$\leq\frac{C}{\delta}\left\{\left|\Delta\lambda_\rho(h)\right|+\sum_{k=0}^{\rho-1}\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|+\left|\Delta\lambda_{\rho+1}(h)\right|\right\}\int_{Q\setminus I}\left|\Phi(dt)\right|+\frac{C}{\delta}\sum_{k=\rho+1}^{\infty}\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|\int_{Q\setminus I}\left|\Phi(dt)\right|. \tag{7.4}$$

Правая часть (7.4) стремится к нулю при $h\to 0$, в чем можно убедиться, воспользовавшись (5.1) и рассуждениями [7, стр. 478]. Теперь из оценки (7.4) получаем равенство (7.2). Теорема 7.1 доказана.

8. Примеры

В работе [1] приведены примеры методов суммирования «обычных» рядов Фурье, удовлетворяющих условиям (5.1), (5.2), (6.2). Согласно теореме 6.1 сопряженный ряд Фурье (1.5) будет суммируем почти всюду к $\tilde{f}(x)$ по любым некасательным направлениям следующими методами.

1) Обобщенный метод суммирования Абеля–Пуассона

$$\lambda_k(h)=\exp(-hk^{\alpha}),\ \ \alpha\geq 1,\ k=0,1,....$$

2) Экспоненциально-полиномиальный метод суммирования

$$\lambda_k(h)=\exp(-h\,P_n(k)),\ \ k=0,1,\ldots,$$

где $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x,\ a=a_n>0$ – некоторый полином, $n=1,2,\ldots$

3) Метод, определяемый последовательностью

$$\lambda_k(h)=\frac{1}{k^h},\ \ k=1,2,\ldots;\ \lambda_0(h)=1.$$

4) Методы Чезаро, именуемые также (C,α), $\alpha > 0$, методами (см. [6, т. 1, с. 131]) и определямые элементами треугольной матрицы

$$\Lambda = \left\{ \lambda_k^m = \frac{A_{m-k}^{\alpha}}{A_m^{\alpha}};\ k = 0, 1, ..., m;\ m = 0, 1, ...;,\ \lambda_k^m = 0,\ k > m \right\},$$

где $A_m^{\alpha} = \dfrac{(\alpha+1)\cdot ... \cdot(\alpha+m)}{m!}$

9. Обзор некоторых приложений

1) Приложение к суммируемости рядов Фурье по системе многочленов Чебышева второго рода**.** Как известно [8, с. 104-105], система $\left\{ \hat{P}_k(x) \right\}$многочленов

$$\hat{P}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin((k+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ \ k = 0, 1, ...$$

ортонормирована с весом $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$. Рассмотрим ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\hat{P}_k(x)\,, \tag{9.1}$$

в котором $c_k(f)$ – коэффициенты Фурье–Чебышева функции $f(x)$, интегрируемой (по Лебегу) на $[-1, 1]$ с весом $\rho(x)$. После замены переменных $X = \arccos x$ ряд (9.1) превращается в сопряженный ряд Фурье функции $f(\cos X)$, и, следовательно, к нему применимы результаты п. 6 с соответствующими видоизменениями формулировок.

2) Приложения к суммированию продифференцированных рядов Фурье. Интегральные операторы с ядром

$$\frac{D_k'(t)}{k} = (1+\frac{1}{2k})\overline{D}_k(t) - \frac{1}{2k}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}D_k(t)\,, \quad k = 1, 2, ...,\tag{9.2}$$

где $D_k(t)$ – ядро Дирихле [6, т. 1, с. 86], лежат в основе исследования поведения продифференцированных рядов Фурье и их линейных средних в точках разрыва первого рода (см. [6, т. 1, с. 177-178], [9]). Представление ядра в форме (9.2) и результаты п.6, а также [9], дают возможность применить полунепрерывные методы суммирования (1.3) к указанному исследованию.

3) Приложение к суммируемости степенных разложений функций классов Харди. Пусть $H = H(Q)$ (см., например, [6, т. 1, с. 431]) – класс Харди функций $\Psi = \Psi(z)$ комплексного переменного $z = r\exp(ix),\ 0 < r < 1,\ x \in Q$, аналитических в круге $|z| < 1$, для каждой из которых $\operatorname{Im}\Psi(0) = 0.$ Исследование степенного ряда функции $\Psi \in H$ на границе круга сходимости может быть обобщено путем изучения поведения λ-средних

$$\theta_h(\Psi) = \theta(\Psi, y; \Lambda, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k(\Psi)\lambda_k(h)\exp(iky)$$

этого ряда при $(y,h) \to (x,0),\ \ (y,h) \in \Gamma_d(x)$;

здесь $\tau_k(\Psi)=\frac{1}{2\pi}\int_Q \Psi(\exp(it))\exp(-ikt)\,dt$, $k=0,1,...$

Результаты п. 6, относящиеся к поведению средних (1.4) и соответствующие результаты для Λ-средних ряда Фурье (см. [1]) позволяют получить следующее утверждение.

Теорема 9.1. Пусть последовательность (1.3) удовлетворяет условиям (5.1), (5.2) и (6.2). Тогда соотношение

$$\lim_{\substack{(y,h)\to(x,0)\\(y,h)\in\Gamma_d(x)}} \theta(\Psi,\, y;\, \Lambda, h)=\Psi(\exp(ix))$$

имеет место почти всюду для всякой $\Psi\in H$.

Список литературы

1. Осиленкер, Б. П. Задачи, ассоциированные с представлением Дирихле полугруппы операторов / Б. П. Осиленкер, А. Д. Нахман // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 492 – 511. doi: 10.17277/vestnik.2018.03.pp.492-511
2. Nakhman, A. D. Summation of Power Series of Functions of Classes H_ν^p on Boundary of the Convergence Circle / A. D. Nakhman // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 530 – 538.
3. Nakhman, A. D. Non-Tangential Convergence of the Generalized Poisson Integral / A. D. Nakhman, B. P. Osilenker // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2015. – Т. 21, № 4. – С. 660 – 668. doi: 10.17277/vestnik.2015.04.pp.660-668
4. Nagy, B. Sz. Methodes de Sommation des Series de Fourier / B. Sz. Nagy// Acta Sci. Math. Szeged, XII, pars. B. – 1950. – P. 204 – 210.
5. Ефимов, А. В. О линейных методах суммирования рядов Фурье / А. В. Ефимов // Изв. Акад. наук СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук. Сер. мат. – 1960. – № 24. – С. 743 – 756.
6. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : пер. с англ. : в 2 т. / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – 2 т.
7. Бари, Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 936 с.
8. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. – 2-е изд., доп. – М. : Наука, 1979. – 416 с.
9. Захаров, А. А. Поведение линейных средних продифференцированного ряда Фурье в точках скачка функции / А. А. Захаров // Сибирский математический журнал. – 1971. – Т. 12, № 1. – С. 134 – 146.

Non-Tangent Convergence of Middle Conjugate Fourier Series

A. D. Nakhman

Department of Higher Mathematics, alextmb@mail.ru; TSTU, Tambov, Russia

Keywords: conjugate Fourier series; summing sequence; weak type estimates.

Abstract: A class of middle conjugate Fourier series $\left\{\widetilde{U}_h(f)\right\}$generated by periodic Lebesgueintegrable functions f is constructed. The family of averages is determined by semi-continuous summation methods. Estimates of the weak type of the corresponding maximal operators are obtained under the generalized condition of B. Nadia on a summing sequence. The consequence of the estimates is the convergence of the means to the conjugate function $\widetilde{f}$ in any non-tangent directions. The results are based on the maximum convolution estimates for an arbitrary function f with the conjugate Valle-Poussin kernel. As possible applications, the questions of summability of Fourier series with respect to the system of Chebyshev polynomials of the second kind and questions of summability of differentiated Fourier series are indicated. The non-tangent summability of power expansions of analytic functions of Hardy classes on the boundary of the unit circle is established.

References

1. Osilenker B.P., Nakhman A.D. [Problems associated with the Dirichlet representation of a semigroup of operators], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 492-511, doi: 10.17277/vestnik.2018.03.pp.492-511 (In Russ., abstract in Eng.)

2. Nakhman A.D. [Summation of Power Series of Functions of Classes H_v^p on Boundary of the Convergence Circle], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 3, pp. 530-538. (In Eng., abstract in Russ.)

3. Nakhman A.D., Osilenker B.P. [Non-tangential Convergence of the Generalized Poisson Integral], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 660-668, doi: 10.17277/vestnik.2015.04.pp.660-668 (In Eng., abstract in Russ.)

4. Nagy B.Sz. Methodes de Sommation des Series de Fourier, *Acta Sci. Math. Szeged,* XII., pars. B, 1950, pp. 204-210.

5. Efimov A.V. [On Linear Methods of Summation of Fourier Series], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Otdelenie matematicheskikh i estestvennykh nauk. Seriya Matematicheskaya* [Izvestiya of the USSR Academy of Sciences. Branch of Mathematical and Natural Sciences. Mathematical Series], 1960, no. 24, pp. 743-756. (In Russ.)

6. Zygmund A. *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959.

7. Bari N.K. *Trigonometricheskiye ryady* [Trigonometric Series], Moscow: GIFML, 1961, 936 p. (In Russ.)

8. Suyetin P.K. *Klassicheskiye ortogonal'nyye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials], Moscow: Nauka, 1979, 416 p. (In Russ.)

9. Zakharov A.A. [Behavior of linear means of the differentiated Fourier series at points of a jump of a function], *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1971, vol. 12, no. 1, pp. 134-146. (In Russ.)

Nichttangentiale Konvergenz der mittleren konjugierten Fourier-Reihen

Zusammenfassung: Es ist eine Klasse von mittleren konjugierten Fourier-Reihen konstruiert, die durch periodische Lebesgue-integrierbare Funktionen f erzeugt werden. Die Familie der Mittelwerte wird durch halbkontinuierliche Summationsmethoden bestimmt. Schätzungen des schwachen Typs der entsprechenden Maximaloperatoren sind unter der verallgemeinerten Bedingung von B. Nadia für die Summierungssequenz erhalten. Die Folge der Schätzungen ist die Konvergenz der Mittelwerte mit der konjugierten Funktion $\widetilde{f}$ in allen nicht tangentialen Richtungen. Die Ergebnisse basieren auf den maximalen Faltungsschätzungen für eine beliebige Funktion f mit dem konjugierten Valle-Poussin-Kern. Als mögliche Anwendungen werden Fragen der Addierbarkeit der Fourier-Reihen nach dem Chebyshev-Polynomsystem der zweiten Art und Fragen der Addierbarkeit der differenzierten Fourier-Reihen angegeben. Die nicht-tangentiale Addierbarkeit der Potenzzerlegungen der analytischen Funktionen von Hardy-Klassen an der Grenze des Einheitskreises ist festgelegt.

Convergence non-tangente des séries de Fourier conjuguées moyennes

Résumé: Est construite une classe $\left\{\widetilde{U}_h(f)\right\}$ de séries conjuguées moyennes de Fourier générées par des fonctions périodiques f intégrées par Lebesgue. La famille des moyennes est définie par des méthodes semi-continues de la sommation. Sont obtenues des estimations du type faible des opérateurs maximaux correspondants lors de l'exécution de la condition généralisée de B. Nagi sur la cohérence de sommation. La conséquence des estimations est la convergence des moyennes à la fonction $\widetilde{f}$ conjuguée dans toutes les directions non-tangentes. Les résultats sont basés sur les estimations maximales de la convolution d'une function f arbitraire avec le noyau conjugué de Vallée Poussin. Comme applications possibles, sont indiquées les questions de sommabilité des séries de Fourier sur le système des polynômes de Chebyshev du second type et les questions de sommabilité non tangent des séries de Fourier différenciées. Est établie la sommation le pouvoir des extensions des fonctions d'analyse de classes Hardy à la frontière d'un seul cercle.

Автор: ***Нахман Александр Давидович*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.

Рецензент: ***Пучков Николай Петрович*** **–** доктор педагогических наук, профессор кафедры «Высшая математика», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.