

**К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ
ДВУХВАЛКОВЫХ МОДУЛЕЙ**

Ш. Р. Хуррамов, Ф. С. Халтураев, Ф. З. Курбанова, М. У. Мусиров

*Лаборатория «Теория механизмов и машин»,
Научно-исследовательский институт механики
и сейсмостойкости сооружений имени М. Т. Уразбаева,
shavkat-xurramov59@mail.ru, АН РУз, г. Ташкент, Республика Узбекистан*

Ключевые слова: двухвалковый модуль; контактное взаимодействие; кривые контакта; углы контакта; уравнения кривых контакта валков.

Аннотация: Показано решение контактных задач двухвалковых модулей: определение контактных углов и аналитическое описание формы кривых контакта валков. Рассмотрен двухвалковый модуль, в котором валки расположены относительно вертикали наклоном справа, имеют разные диаметры и эластичные покрытия с различными жесткостями, слой материала подан наклоном вниз. Найдены выражения контактных углов двухвалкового модуля, в случаях, когда оба валка приводные и верхний валок свободный. Показаны формы кривых контакта валков. Проанализированы частные виды полученных зависимостей.

Введение

Валковые машины имеют широкое применение во многих отраслях промышленности. Основным рабочим органам валковых машин является валковая пара, которая вместе с обрабатываемым материалом образует двухвалковый модуль.

Технологические процессы в двухвалковых модулях осуществляются в результате контактного взаимодействия валков с обрабатываемым материалом. Процессы контактного взаимодействия в двухвалковых модулях технологических машин очень сложны и давно привлекали внимание многих исследователей. Многообразие назначений машин, различия в требованиях, предъявляемых к их параметрам, и свойств обрабатываемого материала обусловили появление большого количества работ, посвященных анализу контактного взаимодействия в двухвалковых модулях. Однако результаты этих работ пока не стали основой теории, объясняющей опыты и позволяющей прогнозировать показатели взаимодействия в двухвалковых модулях.

В двухвалковых модулях с валками, имеющими эластичные покрытия, валки погружаются в обрабатываемый материал до тех пор, пока не наступит равновесия между силами, действующими в месте контакта и приложенными к оси валков. Эти силы передаются на обрабатываемый материал по кривым, называемыми кривыми контакта валков.

Центральное место в теории контактного взаимодействия в двухвалковых модулях занимает задача определения аналитических уравнений, отражающих формы кривых контакта валков. Для решения данной задачи необходимы величины контактных углов (углов захвата и выхода), определяющие граничные условия задач контактного взаимодействия.

Цель работы – решение контактных задач двухвалковых модулей: первой – определение контактных углов; второй – аналитическое описание формы кривых контакта валков.

Двухвалковые модули относятся к основным рабочим органам валковой машины или выполняют вспомогательные функции. В связи с этим во многих машинах двухвалковые модули являются асимметричными, то есть в них происходит несимметричный процесс взаимодействия слоя материала с парами валков. При этом достаточно часто одновременно реализуется несколько видов несимметричности, например, два вида геометрической несимметричности (разные диаметры и наклон слоя материала относительно горизонтали), кинематическая несимметричность (один валок приводной, другой свободной) и трибологическая несимметричность (неодинаковые коэффициенты трения из-за разного материала покрытия валков). Контактные углы определяют на основе анализа условия захвата в двухвалковом модуле.

В настоящее время известно достаточно много работ, посвященных теоретическому анализу условий захвата в симметричном двухвалковом модуле. В работах [1 – 5] исследуются один или несколько видов несимметричности в двухвалковых модулях. Однако в настоящее время комплексное исследование, одновременно учитывающее все возможные виды несимметричности в определении контактных углов двухвалковых модулей, отсутствует.

В целях дальнейшего развития теоретических представлений определим контактные углы в двухвалковом модуле, в котором реализуются одновременно геометрические, кинематические и трибологические несимметричности.

В случае, когда валки имеют эластичные покрытия, происходят различные по величинам и направлениям деформации, как покрытия валков, так и обрабатываемого материала. Накоплено большое количество экспериментальных данных о закономерностях деформации кожи, тканей, хлопка, бумаги и других материалов, обрабатываемых в валковых машинах, а также, резин, шерсти, технических сукон и ряда других, используемых для покрытия валков. Анализ этих данных показал, что деформация таких материалов описывается либо эмпирическими зависимостями «напряжения – относительная деформация», либо реологическими моделями, состоящими из упругого тела Гука, вязкого тела Ньютона и пластического тела Сен-Венана. Поэтому контактные взаимодействия в двухвалковых модулях носят, как правило, экспериментальный характер, а для математического описания применяются или эмпирические зависимости или реологические модели. Однако сущность явлений отражают только аналитические уравнения, которые позволяют делать обобщения, прогнозировать показатели взаимодействия, проводить оптимизацию параметров.

Точная форма кривых контакта при взаимодействии валков, имеющих эластичные покрытия с деформируемым обрабатываемым материалом, пока не выяснена и поэтому до сих пор еще нет обоснованного вывода уравнения кривых контакта валков. В связи с этим в исследованиях в порядке допущения рассматривают симметричный контакт обрабатываемого материала с валками и принимают дугу окружности, эллипса или параболу [6].

Контактное взаимодействие волокнистого материала с валками, имеющими эластичные покрытия, можно рассматривать по аналогии с качением эластичного колеса по деформируемому грунту [6]. Вопросы взаимодействия эластичного колеса с деформируемым грунтом исследованы в работах [7 – 9], однако ряд

вопросов остался невыясненным. В одних работах по данному вопросу задняя часть кривой контакта изображается в виде прямой, в других – представляется в виде кривой, тем не менее, изменения кривой под действием сил и моментов, действующие на колеса, анализируются мало. Во многих работах считают что, линия контакта эластичного колеса с деформируемым грунтом является частью дуги окружности, однако, выявлено, что линия контакта эластичного колеса с деформируемым грунтом представляет собой сложную кривую, которая не является частью дуги окружности [7]. В работе [8] получены расчетные линии контакта пневматического колеса, представляющие собой произвольную кривую, форма которой может изменяться в зависимости от давления и других параметров взаимодействия. При анализе процесса взаимодействия деформируемого колеса с деформируемым грунтом полагают, что контакт колеса с грунтом делится на два участка – плоский (в средней и задней частях) и криволинейный (в передней части). Плоская часть чаще всего рассматривается как горизонтальная, криволинейная – как цилиндрическая с радиусом, равным свободному радиусу колеса, а также как параболическая или экспоненциальная. В работе [9] теоретически получены уравнения линии контакта эластичного колеса с деформирующейся опорной поверхности в виде моделей, состоящих из бесконечно большого числа элементов различной реологической природы, то есть параллельно расположенных тел Гука, Ньютона, Сен-Венана для эластичного колеса и Гука, Ньютона для опорной поверхности.

На сегодняшний день существует множество разнообразных моделей взаимодействия колеса с грунтом. Зачастую для проведения расчетов по данным моделям требуются данные, которые можно получить только в ходе сложных экспериментальных исследований.

Анализ литературных источников показал, что в настоящее время не существуют аналитические уравнения, отражающие формы кривых контакта валков в двухвалковом модуле.

Теоретическое исследование проблемы

Рассмотрим двухвалковый модуль, в котором валки расположены относительно вертикали наклоном справа на угол β , радиусы валков R_1, R_2 , валки имеют эластичные покрытия из различных материалов, слой материала равномерный, имеет начальную толщину δ_1 и подан наклоном вниз под углом γ_1 к оси O_1y' (линии центров), расстояние между центрами валков H (рис. 1).

Определим контактные углы в двухвалковом модуле.

В сечении C_1C_2 (контакт слоя материала с валками) имеют место равенства:

$$R_1 - R_1 \cos(\varphi_{11} + \beta) + R_2 - R_2 \cos(\varphi_{21} - \beta) + h = \delta_1 \cos \gamma_1; \quad (1)$$

$$R_2 \sin(\varphi_{21} - \beta) = R_1 \sin(\varphi_{11} + \beta) - \delta_1 \sin \gamma_1, \quad (2)$$

где h – расстояние между валками.

Приняв углы $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ и γ малыми, запишем равенства (1) и (2) в упрощенном виде:

$$R_1(\varphi_{11} + \beta)^2 + R_2(\varphi_{21} - \beta)^2 + \delta_1 \gamma^2 + 2(h_1 - \delta_1) = 0; \quad (3)$$

$$\varphi_{21} - \beta = \frac{R_1}{R_2}(\varphi_{11} + \beta) - \frac{\delta_1}{R_2} \gamma. \quad (4)$$

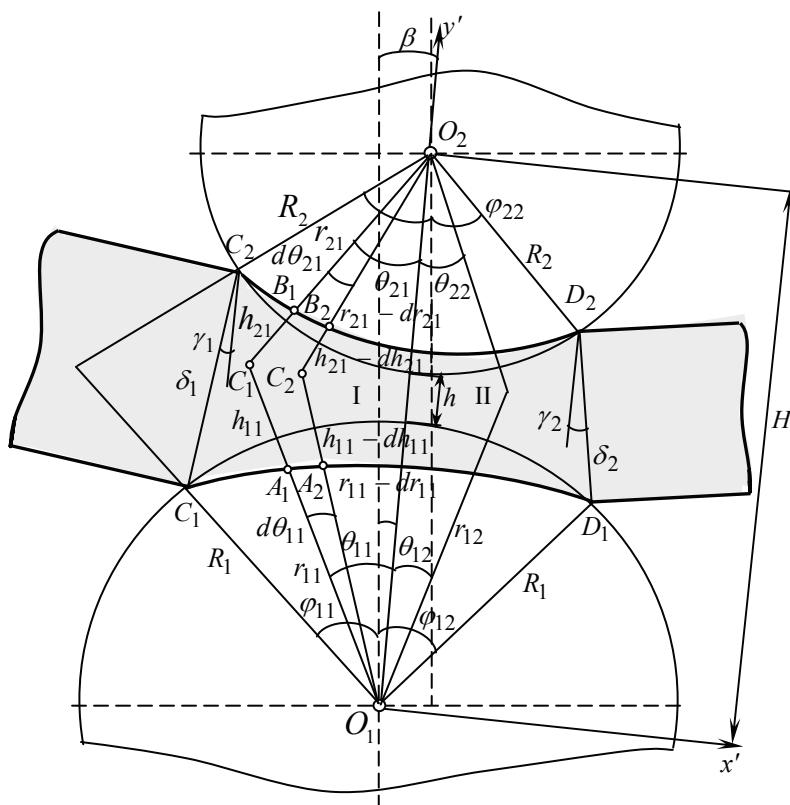


Рис. 1. Схема взаимодействия в двухвалковом модуле

Решая совместно уравнения (3) и (4), находим

$$\varphi_{11} + \beta = \frac{\delta_1 \gamma}{R_1 + R_2} + \sqrt{\frac{2R_2(\delta_1 - h)}{R_1(R_1 + R_2)} - \frac{R_2 \delta_1 (\delta_1 + R_1 + R_2) \gamma_1^2}{R_1(R_1 + R_2)^2}}. \quad (5)$$

Расчеты по формуле (5) свидетельствуют о том, что величина второго члена под радикалом мала по сравнению с первым. На этом основании вторым членом можно пренебречь, придав формуле для определения угла φ_{11} более простой вид

$$\varphi_{11} = \sqrt{\frac{2R_2(\delta_1 - h)}{R_1(R_1 + R_2)}} - \frac{(R_1 + R_2)\beta - \delta_1 \gamma_1}{R_1 + R_2}. \quad (6)$$

С учетом выражения (6) из равенства (4) находим формулу для определения угла φ_{21}

$$\varphi_{21} = \sqrt{\frac{2R_1(\delta - h)}{R_2(R_1 + R_2)}} + \frac{(R_1 + R_2)\beta - \delta_1 \gamma_1}{R_1 + R_2}. \quad (7)$$

Сложив выражений (6) и (7) после преобразований, находим сумму углов контакта φ_{11} и φ_{21}

$$\varphi_{11} + \varphi_{21} = \sqrt{\frac{2(R_1 + R_2)(\delta_1 - h)}{R_1 R_2}}. \quad (8)$$

Из выражения (8) следует, что сумма углов контакта не зависит от наклона подачи слоя материала к оси O_1y' и наклона верхнего валка относительно вертикали. Она увеличивается с увеличением начальной толщины обрабатываемого материала и уменьшением радиусов валков и расстояния между ними.

Пусть в двухвалковом модуле оба валка приводные. В этом случае сумма углов контакта в точках C_1 и C_2 равна сумме углов трения [11], то есть имеет место равенство

$$\varphi_{12} + \varphi_{22} = \nu_{12} + \nu_{22}. \quad (9)$$

С учетом равенства (9) выражения (8) примет вид

$$\nu_{11} + \nu_{21} = \sqrt{\frac{2(R_1 + R_2)(\delta_1 - h)}{R_1 R_2}}. \quad (10)$$

Откуда находим

$$\sqrt{2(\delta_1 - h)} = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} (\nu_{11} + \nu_{21}).$$

Подставляя данное выражение в формулы (6) и (7), находим

$$\varphi_{11} = \frac{1}{R_1 + R_2} (R_2 (\nu_{11} + \nu_{21}) - (R_1 + R_2)\beta + \delta_1 \gamma_1); \quad (11)$$

$$\varphi_{21} = \frac{1}{R_1 + R_2} (R_1 (\nu_{11} + \nu_{21}) + (R_1 + R_2)\beta - \delta_1 \gamma_1). \quad (12)$$

Углы выхода, то есть в сечении $B_1 B_2$, определяем аналогично:

$$\varphi_{12} = \frac{1}{R_1 + R_2} (R_2 (\nu_{12} + \nu_{22}) + (R_1 + R_2)\beta + \delta_2 \gamma_2);$$

$$\varphi_{22} = \frac{1}{R_1 + R_2} (R_1 (\nu_{12} + \nu_{22}) - (R_1 + R_2)\beta - \delta_2 \gamma_2),$$

где ν_{12}, ν_{22} – углы трения в точках D_1, D_2 соответственно.

Считаем, что $\delta_2 \gamma_2 = m \delta_1 \gamma_1$, где m – коэффициент пропорциональности, который определяется экспериментально, $0 \leq m \leq 1$.

С учетом равенства $\delta_2 \gamma_2 = m \delta_1 \gamma_1$ выражения для углов φ_{12} и φ_{22} примут вид:

$$\varphi_{12} = \frac{1}{R_1 + R_2} (R_2 (\nu_{12} + \nu_{22}) + (R_1 + R_2)\beta + m \delta_1 \gamma_2); \quad (13)$$

$$\varphi_{22} = \frac{1}{R_1 + R_2} (R_1 (\nu_{12} + \nu_{22}) - (R_1 + R_2)\beta - m \delta_1 \gamma_1). \quad (14)$$

Пусть в двухвалковом модуле один из валков свободный, например верхний. В этом случае для суммы углов контакта имеет место равенства вида [11]

$$\varphi_{12} + \varphi_{22} = \nu_1 - \nu_{ш} \frac{r_{ш}}{R_2}, \quad (15)$$

где $r_{ш}$ – радиус шейки свободного валка; $\nu_{ш}$ – угол трения в шейках.

С учетом (15) контактные углы при одном свободном верхнем валке имеют вид:

$$\varphi_{11} = \frac{1}{R_1 + R_2} \left(R_2 \left(v_{11} - v_{ш} \frac{r_{ш}}{R_2} \right) - (R_1 + R_2)\beta + \delta_1 \gamma_1 \right); \quad (16)$$

$$\varphi_{21} = \frac{1}{R_1 + R_2} \left(R_1 \left(v_{11} - v_{ш} \frac{r_{ш}}{R_2} \right) + (R_1 + R_2)\beta - \delta_1 \gamma_1 \right); \quad (17)$$

$$\varphi_{12} = \frac{1}{R_1 + R_2} \left(R_2 \left(v_{12} - v_{ш} \frac{r_{ш}}{R_2} \right) + (R_1 + R_2)\beta + m\delta_1 \gamma_1 \right); \quad (18)$$

$$\varphi_{22} = \frac{1}{R_1 + R_2} \left(R_1 \left(v_{12} - v_{ш} \frac{r_{ш}}{R_2} \right) - (R_1 + R_2)\beta - m\delta_1 \gamma_1 \right). \quad (19)$$

Таким образом, получены выражения, определяющие контактные углы двухвалкового модуля. Когда в двухвалковом модуле оба валка приводные, контактные углы определяются по формулам (11) – (14), если один из валков свободный – по формулам (16) – (19).

Найдем решение второй задачи, то есть аналитически опишем кривые контакта валков в двухвалковом модуле.

Согласно [10], зоны контакта валков относительно линии центров разделим на зоны I и II (см. рис. 1). Очевидно, в зоне I происходит одновременное сжатие взаимодействующих тел, в зоне II – восстановление.

О форме кривых контакта валков судят по изменению толщины слоя материала вдоль зоны контакта валков. Некоторые исследователи считают, что деформация слоя материала с валками в каждый момент времени происходит в радиальном направлении к оси валков [9, 10], другие – в вертикальном направлении к слою [7, 8].

Исследуем формы кривых контакта валков в двухвалковом модуле в случае, когда в процессе взаимодействия деформация слоя материала происходит в радиальном направлении к оси валков.

Рассмотрим контактное взаимодействие слоя материала с валками в зоне I, где окажутся бесконечно малые части взаимодействующих тел, подверженные сжатию. Выделим на кривой контакта нижнего валка элементарный сектор, определяемый углом $d\theta_{11}$, которому на кривой контакта верхнего валка соответствует элементарный сектор, определяемый углом $d\theta_{21}$.

Представив слой материала и валки состоящими из бесконечно большого числа таких секторов, рассмотрим происходящие с ними изменения при переходе из положения, соответствующего углу θ_{11} , в новое, определяемое углом $\theta_{11} - d\theta_{11}$.

Согласно рис. 1 для начала элементарного сектора, имеем

$$O_1 C_1 \cos \theta_{11} + O_2 C_1 \cos \theta_{21} = H, \quad O_1 C_1 \sin \theta_{11} = O_2 C_1 \sin \theta_{21}$$

или с учетом равенств $O_1 C_1 = O_1 A_1 + A_1 C_1 = r_{11} + h_{11}$, $O_2 C_1 = O_2 B_1 + B_1 C_1 = r_{21} + h_{21}$

$$(r_{11} + h_{11}) \cos \theta_{11} + (r_{21} + h_{21}) \cos \theta_{21} = H; \quad (20)$$

$$(r_{11} + h_{11}) \sin \theta_{11} - (r_{21} + h_{21}) \sin \theta_{21} = 0, \quad (21)$$

где H – расстояние между центрами валков.

На рис. 1 видно, что

$$H = R_1 \cos(\varphi_{11} + \beta) + R_2 \cos(\varphi_{21} - \beta) + \delta_1 \cos \gamma_1. \quad (22)$$

Аналогично для конца элементарного сектора имеем:

$$(r_{11} + h_{11} - (dr_{11} + dh_{11})) \cos(\theta_{11} - d\theta_{11}) + (r_{21} + h_{21} - (dr_{21} + dh_{21})) \cos(\theta_{21} - d\theta_{21}) = H; \quad (23)$$

$$(r_{11} + h_{11} - (dr_{11} + dh_{11})) \sin(\theta_{11} - d\theta_{11}) - (r_{21} + h_{21} - (dr_{21} + dh_{21})) \sin(\theta_{21} - d\theta_{21}) = 0. \quad (24)$$

После раскрытия скобок в них выполняем следующие преобразования. Принимаем что, $\cos d\theta_{11} \approx 1$; $\sin d\theta_{11} \approx d\theta_{11}$; $\cos d\theta_{21} \approx 1$; $\sin d\theta_{21} \approx d\theta_{21}$. Пренебрегаем членами, содержащими произведения $dr_{11}d\theta_{11}$, $dh_{11}d\theta_{11}$, $dr_{21}d\theta_{21}$ и $dh_{21}d\theta_{21}$, как бесконечно малыми высшего порядка малости. Учитываем выражения (20) и (21).

В результате получаем уравнения:

$$(dr_{11} + dh_{11}) \cos \theta_{11} - (r_{11} + h_{11}) \sin \theta_{11} d\theta_{11} + (dr_{21} + dh_{21}) \cos \theta_{21} - (r_{21} + h_{21}) \sin \theta_{21} d\theta_{21} = 0; \quad (25)$$

$$(dr_{11} + dh_{11}) \sin \theta_{11} + (r_{11} + h_{11}) \cos \theta_{11} d\theta_{11} - ((dr_{21} + dh_{21}) \sin \theta_{21} - (r_{21} + h_{21}) \cos \theta_{21}) d\theta_{21} = 0. \quad (26)$$

Умножая равенства (25) на $\sin \theta_{21}$, а (26) на $\cos \theta_{21}$ и суммируя их, после преобразований получим

$$(dr_{11} + dh_{11}) \sin(\theta_{11} + \theta_{21}) + (r_{11} + h_{11}) \cos(\theta_{11} + \theta_{21}) d\theta_{11} - (r_{21} + h_{21}) d\theta_{21} = 0. \quad (27)$$

По теореме синусов в треугольнике $\Delta O_1 C_1 O_2$ имеем

$$\frac{r_{11} + h_{11}}{\sin \theta_{21}} = \frac{r_{21} + h_{21}}{\sin \theta_{11}} = \frac{H}{\sin(\theta_{11} + \theta_{21})},$$

откуда находим:

$$r_{11} + h_{11} = H \frac{\sin \theta_{21}}{\sin(\theta_{11} + \theta_{21})}; \quad r_{21} + h_{21} = H \frac{\sin \theta_{11}}{\sin(\theta_{11} + \theta_{21})}. \quad (28)$$

С учетом выражения (28) равенство (27) после преобразований примет вид

$$dr_{11} + dh_{11} = H \frac{\sin \theta_{11} d\theta_{21} - \sin \theta_{21} \cos(\theta_{11} + \theta_{21}) d\theta_{11}}{\sin^2(\theta_{11} + \theta_{21})}. \quad (29)$$

Считаем, что $d\theta_{21} = k_{11} d\theta_{11}$ или $\theta_{21} = k_{11} \theta_{11} + n_{11}$.

Коэффициенты k_{11} и n_{11} находим по граничным условиям: при $\theta_{21} = 0$, $\theta_{11} = 0$ и $\theta_{21} = -\varphi_{21} - \beta$, $\theta_{11} = -\varphi_{11} + \beta$:

$$k_{11} = \frac{\varphi_{21} + \beta}{\varphi_{11} - \beta}; \quad n_{11} = 0. \quad (30)$$

Тогда имеем:

$$d\theta_{21} = k_{11}d\theta_{11}; \quad \theta_{21} = k_{11}\theta_{11}. \quad (31)$$

Преобразуем равенство (29) с учетом выражений (31)

$$dr_{11} + dh_{11} = \frac{2k_{11}H}{(1+k_{11})^2} d \sec\left(\frac{(1+k_{11})\theta_{11}}{2}\right). \quad (32)$$

Исследования показали, что формы кривых контакта валков в двухвалковом модуле зависят от соотношения скоростей деформации контактирующих тел [7, 10]. Следовательно,

$$m_{11} = \frac{\frac{dh_{11}}{dt}}{\frac{dr_{11}}{dt}} \quad \text{или} \quad m_{11} = \frac{dh_{11}}{dr_{11}},$$

где $\frac{dh_{11}}{dt}$, $\frac{dr_{11}}{dt}$ – скорости деформации слоя материала и покрытия нижнего валка при сжатии соответственно.

С учетом этого, равенство (32) примет вид

$$(1+m_{11})dr_{11} = \frac{2k_{11}H}{(1+k_{11})^2} d \sec\left(\frac{(1+k_{11})\theta_{11}}{2}\right)$$

или после интегрирования

$$r_{11} = \frac{2k_{11}H}{(1+k_{11})^2(1+m_{11})} \sec\left(\frac{(1+k_{11})\theta_{11}}{2}\right) + C_{11}.$$

Согласно рис. 1, имеем начальные условия: $\theta_{11} = -\varphi_{11} + \beta$, $r_{11} = R_1$. После подстановки значения постоянной интегрирования C_{11} , вычисленного по начальным условиям, получим уравнения кривой контакта нижнего валка в зоне сжатия

$$r_{11} = R_1 - \frac{2k_{11}H}{(1+k_{11})^2(1+m_{11})} \left(\sec\left(\frac{(1+k_{11})(\varphi_{11}-\beta)}{2}\right) - \sec\left(\frac{(1+k_{11})\theta_{11}}{2}\right) \right)$$

или после подстановки выражения k_{11} из (30)

$$r_{11} = R_1 - \frac{a_1}{1+m_{11}} \left(b_1 - \sec\left(\frac{(\varphi_{11}+\varphi_{21})\theta_{11}}{2(\varphi_{11}-\beta)}\right) \right), \quad -\varphi_{11} + \beta \leq \theta_{11} \leq 0, \quad (33)$$

где

$$a_1 = \frac{2H(\varphi_{11}-\beta)(\varphi_{21}+\beta)}{(\varphi_{11}+\varphi_{21})^2}; \quad b_1 = \sec\left(\frac{\varphi_{11}+\varphi_{21}}{2}\right). \quad (34)$$

Умножая равенства (25) на $(-\sin \theta_{21})$, а (26) на $\cos \theta_{21}$ и суммируя их, после аналогичных преобразований получим уравнения кривой контакта верхнего валка в зоне сжатия:

$$r_{21} = R_2 - \frac{a_1}{1+m_{21}} \left(b_1 - \sec\left(\frac{(\varphi_{11}+\varphi_{21})\theta_{21}}{2(\varphi_{21}+\beta)}\right) \right), \quad -\varphi_{21} - \beta \leq \theta_{21} \leq 0, \quad (35)$$

где $m_{21} = \frac{dh_{11}}{dr_{21}}$ – соотношение скоростей деформации слоя материала и покрытия верхнего валка при сжатии.

Аналогично уравнениям (33) и (35) находим уравнения кривых контакта нижнего и верхнего валков в зоне восстановления:

$$r_{12} = R_1 - \frac{a_2}{1+m_{12}} \left(b_2 - \sec \left(\frac{(\varphi_{12} + \varphi_{22})\theta_{12}}{2(\varphi_{12} - \beta)} \right) \right), \quad 0 \leq \theta_{12} \leq \varphi_{12} - \beta; \quad (36)$$

$$r_{22} = R_2 - \frac{a_2}{1+m_{22}} \left(b_2 - \sec \left(\frac{(\varphi_{12} + \varphi_{22})\theta_{22}}{2(\varphi_{22} + \beta)} \right) \right), \quad 0 \leq \theta_{22} \leq \varphi_{22} + \beta, \quad (37)$$

где

$$a_2 = \frac{2H(\varphi_{12} - \beta)(\varphi_{22} + \beta)}{(\varphi_{12} + \varphi_{22})^2}, \quad b_2 = \sec \left(\frac{\varphi_{12} + \varphi_{22}}{2} \right); \quad (38)$$

$m_{12} = \frac{dh_{12}}{dr_{12}}$, $m_{22} = \frac{dh_{12}}{dr_{22}}$ – соотношения скоростей деформации слоя материала и покрытия нижнего и верхнего валка при восстановлении соответственно.

Обобщая уравнения (33) и (36), найдем уравнения кривой контакта нижнего валка:

$$\begin{cases} r_{11} = R_1 - \frac{a_1}{1+m_{11}} \left(b_1 - \sec \left(\frac{(\varphi_{11} + \varphi_{21})\theta_{11}}{2(\varphi_{11} - \beta)} \right) \right), & -\varphi_{11} + \beta \leq \theta_{11} \leq 0; \\ r_{12} = R_1 - \frac{a_2}{1+m_{12}} \left(b_2 - \sec \left(\frac{(\varphi_{12} + \varphi_{22})\theta_{12}}{2(\varphi_{12} - \beta)} \right) \right), & 0 \leq \theta_{12} \leq \varphi_{12} - \beta. \end{cases} \quad (39)$$

Обобщая уравнения (35) и (37), найдем уравнения кривой контакта верхнего валка:

$$\begin{cases} r_{21} = R_2 - \frac{a_1}{1+m_{21}} \left(b_1 - \sec \left(\frac{(\varphi_{11} + \varphi_{21})\theta_{21}}{2(\varphi_{21} + \beta)} \right) \right), & -\varphi_{21} - \beta \leq \theta_{21} \leq 0; \\ r_{22} = R_2 - \frac{a_2}{1+m_{22}} \left(b_2 - \sec \left(\frac{(\varphi_{12} + \varphi_{22})\theta_{22}}{2(\varphi_{22} + \beta)} \right) \right), & 0 \leq \theta_{22} \leq \varphi_{22} + \beta. \end{cases} \quad (40)$$

Из систем (39) и (40) получим аналитические выражения, описывающие кривые контакта валков двухвалкового модуля:

$$\begin{cases} r_{i1} = R_i - \frac{a_1}{1+m_{i1}} \left(b_1 - \sec \left(\frac{(\varphi_{i1} + \varphi_{i\pm 11})\theta_{i1}}{2(\varphi_{i1} \mp \beta)} \right) \right), & -\varphi_{i1} \pm \beta \leq \theta_{i1} \leq 0; \\ r_{i2} = R_i - \frac{a_2}{1+m_{i2}} \left(b_2 - \sec \left(\frac{(\varphi_{i2} + \varphi_{i\pm 12})\theta_{i2}}{2(\varphi_{i2} \mp \beta)} \right) \right), & 0 \leq \theta_{i2} \leq \varphi_{i2} \mp \beta, \end{cases} \quad (41)$$

где $i = 1, 2$, когда $i = 1$ имеют место верхние знаки, $i = 2$ – нижние.

Система уравнений (41) описывает формы кривых контакта в двухвалковом модуле. Если в нем оба валка приводные, то контактные углы определяются выражениями (11) – (14); если один из валков, например верхний, свободный – выражениями (16) – (19).

Уравнения кривых контакта, определяемые системой уравнения (41), являются общими в том смысле, что применимы для частных случаев контактного взаимодействия в двухвалковых модулях.

Рассмотрим некоторые частные случаи двухвалкового модуля.

Пусть в двухвалковом модуле слой материала подается перпендикулярно к линии центров валков. В этом случае $\gamma_1 = 0$. Тогда в коэффициентах a_1 и a_2 системы (41) для выражения H имеет место равенство

$$H = R_1 \cos(\varphi_{11} + \beta) + R_2 \cos(\varphi_{21} - \beta) + \delta_1. \quad (42)$$

Пусть в двухвалковом модуле валки располагаются вертикально один над другим. В этом случае $\beta = 0$. Тогда из системы уравнений (41) найдем:

$$\begin{cases} r_{i1} = R_i - \frac{a_1}{1 + m_{i1}} \left(b_1 - \sec \left(\frac{(\varphi_{i1} + \varphi_{i\pm 11})\theta_{i1}}{2\varphi_{i1}} \right) \right), & -\varphi_{i1} \leq \theta_{i1} \leq 0; \\ r_{i2} = R_i - \frac{a_2}{1 + m_{i2}} \left(b_2 - \sec \left(\frac{(\varphi_{i2} + \varphi_{i\pm 12})\theta_{i2}}{2\varphi_{i2}} \right) \right), & 0 \leq \theta_{i2} \leq \varphi_{i2}, \end{cases} \quad (43)$$

где

$$a_1 = \frac{2H\varphi_{11}\varphi_{21}}{(\varphi_{11} + \varphi_{21})^2}; \quad a_2 = \frac{2H\varphi_{12}\varphi_{22}}{(\varphi_{12} + \varphi_{22})^2}; \quad H = R_1 \cos \varphi_{11} + R_2 \cos \varphi_{21} + \delta_1 \cos \gamma_1. \quad (44)$$

Пусть в двухвалковом модуле валки располагаются вертикально один над другим, слой материала подается перпендикулярно к линии центров валков. В этом случае $\gamma = 0$, $\beta = 0$.

Тогда кривые контакта описываются системой (43). Коэффициенты определяются системой (44), а расстояние между валками выражением $H = R_1 \cos \varphi_{11} + R_2 \cos \varphi_{21} + \delta_1$.

Проанализируем частные случаи данного двухвалкового модуля.

1. Двухвалковый модуль симметричный.

В этом случае $r_{11} = r_{21} = r_1$, $r_{12} = r_{22} = r_2$, $m_{11} = m_{21} = m_1$, $m_{12} = m_{22} = m_2$, $\varphi_{11} = \varphi_{21} = \varphi_1$, $\varphi_{12} = \varphi_{22} = \varphi_2$, $\theta_{11} = \theta_{21} = \theta_1$, $\theta_{12} = \theta_{22} = \theta_2$, $R_1 = R_2 = R$.

С учетом этих величин из системы (43) имеем:

$$\begin{cases} r_1 = R - \frac{H}{2(1 + m_1)} \left(\frac{1}{\cos \varphi_1} - \frac{1}{\cos \theta_1} \right), & -\varphi_1 \leq \theta_1 \leq 0; \\ r_2 = R - \frac{H}{2(1 + m_2)} \left(\frac{1}{\cos \varphi_2} - \frac{1}{\cos \theta_2} \right), & 0 \leq \theta_2 \leq \varphi_2, \end{cases} \quad (45)$$

где $H = 2R \cos \varphi_1 + \delta_1$.

2. Валки имеют недеформируемые покрытия, обрабатываемый материал упруго-пластичный. В этом случае $dr_{11} = 0$, $dr_{12} = 0$, $dr_{21} = 0$ и $dr_{22} = 0$. Поэтому $m_{11} = \infty$, $m_{12} = \infty$, $m_{21} = \infty$ и $m_{22} = \infty$.

С учетом данных величин из системы (43) имеем:

$$r_1 = R_1, \quad -\varphi_{11} \leq \theta_1 \leq \varphi_{12}, \quad r_2 = R_2, \quad -\varphi_{21} \leq \theta_2 \leq \varphi_{22}. \quad (46)$$

3. Валки имеют эластичные покрытия, обрабатываемый материал недеформируемый. В этом случае $dh_{11} = 0$ и $dh_{12} = 0$. Тогда $m_{11} = 0$, $m_{12} = 0$, $m_{21} = 0$ и $m_{22} = 0$. С учетом этих величин из системы (43) найдем:

$$\begin{cases} r_{i1} = R_i - \frac{H}{2} \left(\frac{1}{\cos \varphi_{i1}} - \frac{1}{\cos \theta_{i1}} \right), -\varphi_{i1} \leq \theta_{i1} \leq 0, \\ r_{i2} = R_i - \frac{H}{2} \left(\frac{1}{\cos \varphi_{i2}} - \frac{1}{\cos \theta_{i2}} \right), 0 \leq \theta_{i2} \leq \varphi_{i2}, \end{cases}$$

или после преобразований

$$r_i = \frac{R_i \cos \varphi_{i1}}{\cos \theta_{i1}}, -\varphi_{i1} \leq \theta_{i1} \leq \varphi_{i1}. \quad (47)$$

Заключение

В работе решены две задачи контактного взаимодействия в обобщенном двухвалковом модуле, в котором валки расположены относительно вертикали наклоном справа, их диаметры неодинаковы, валки имеют эластичные покрытия из различных материалов, слой материала подан наклоном вниз к линии центров.

На основе решения первой задачи получены зависимости для расчета величины контактных углов. Анализ результатов расчета полученных зависимостей показал следующее:

- с возрастанием радиуса верхнего валка и угла наклона слоя материала относительно линии центров угол контакта нижнего валка увеличивается, а угол контакта верхнего валка уменьшается;

- с увеличением радиуса нижнего валка и угла наклона линии центров относительно вертикали угол контакта нижнего валка уменьшается, а верхнего – увеличивается;

- закономерности изменения углов контакта верхнего и нижнего валков от расстояния между ними и толщины слоя материала одинаковые;

- сумма контактных углов не зависит от наклона подачи слоя материала к линии центров и наклона верхнего валка относительно вертикали.

На основе решения второй задачи получены аналитические выражения кривых контакта валков, представленные системой уравнения (41). Если в двухвалковом модуле оба валка приводные, то в систему добавляются выражения (11) – (14); если один из валков, например верхний, не приводной – (16) – (19).

Полученные уравнения кривых контакта валков являются общими в том смысле, что применимы для частных случаев контактного взаимодействия в двухвалковых модулях. Поэтому они могут быть использованы при проектировании технологических валковых машин в легкой, текстильной, химической и других отраслях промышленности.

Список литературы

1. Бородянский, В. П. Прокатка материала валками разных размеров при одинаковой скорости контактирующих поверхностей / В. П. Бородянский // Известия высших учебных заведений. Пищевая технология. – 2007. – № 4 (299). – С. 91 – 94.

2. Gudur, P. P. A Theoretical Study on the Application of Asymmetric Rolling for the Estimation of Friction / P. P. Gudur, M. A. Salunkhe, U. S. Dixit // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2008. – Vol. 50. – P. 315 – 327.

3. Нефедов, А. А. Особенности захвата и установившегося процесса при прокатке на станах с одним приводным валком / А. А. Нефедов, И. Ф. Калужный, В. В. Байдуж // *Теория прокатки (Материалы Всесоюзной научно-технической конференции «Теоретические проблемы прокатного производства»)*. – М. : Металлургия, 1975. – С. 213 – 216.

4. Nikolaev, V. A. Analysis of Strip Asymmetrical Cold Rolling Parameters / V. A. Nikolaev, A. A. Vasilyev // *Metallurgical and Mining Industry*. – 2010. – Vol. 2, No. 6. – P. 405 – 412.

5. Выдрин, А. В. Усилие при существенно несимметричной прокатке листов / А. В. Выдрин, Е. Е. Иванова // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Metallургия*. – 2008. – № 24 (124). – С. 51 – 54.

6. Кузнецов, Г. К. Исследование и методика проектирования валковых отжимных устройств текстильных машин : дис. ... д-ра техн. наук : 05.00.00 / Г. К. Кузнецов. – Кострома, 1970. – 287 с.

7. Хайлис, Г. А. Определение глубины колеи и силы сопротивления перекачиванию по почве свободного пневматического колеса / Г. А. Хайлис // *Достижения науки и техники АПК*. – 2006. – № 4. – С. 10 – 14.

8. Влияние величины давления воздуха в шинах колес на геометрические параметры пятна контакта при взаимодействии с опорной поверхностью / Ю. А. Ким [и др.] // *Труды БГТУ. Серия 1: Лесное хозяйство, природопользование и переработка возобновляемых ресурсов*. – 2018. – № 2 (210). – С. 308 – 312.

9. Моделирование процесса взаимодействия эластичного колеса с деформируемой опорной поверхностью / Л. Е. Пелевин [и др.] // *Горное оборудование и электромеханика*. – 2013. – № 7. – С. 10 – 16.

10. Хуррамов, Ш. Р. Математическая модель взаимодействия волокнистого материала с отжимными валами / Ш. Р. Хуррамов // *Сб. тр. XVI Междунар. науч. конф. «Математические методы в технике и технологиях»*. – Ростов-на-Дону, 2003. – С. 100 – 101.

11. Хуррамов, Ш. Р. Анализ геометрических условий двухвалкового модуля в установившемся режиме взаимодействия / Ш. Р. Хуррамов, Г. А. Бахадиров, А. Абдукаримов // *Докл. АН РУз. Ташкент*. – 2018. – № 5. – С. 10 – 12.

Solving Some Contact Problems of Two-Roll Modules

Sh. R. Khurramov, F. S. Khalturaev, F. Z. Kurbanova, M. U. Musirov

*Laboratory of Theory of Mechanisms and Machines,
M. T. Urazbaev Research Institute of Mechanics and Earthquake Resistance
of Facilities of Academy of Sciences of Uzbekistan, shavkat-xurramov59@mail.ru,
Tashkent, Republic of Uzbekistan*

Keywords: two-roll module; contact interaction; contact curves; contact angles; equations of roll contact curves.

Abstract: The solution of the contact problems of two-roll modules is shown; determination of contact angles and an analytical description of the shape of the contact curves of the rolls. We consider a two-roll module in which the rolls are located relative

to the vertical by an inclination to the right they, have different diameters and elastic coatings with different stiffnesses, the layer of material is fed downward. Expressions of the contact angles of the two-roll module are found in cases where both drive rolls and the upper roll are free. The contact curves of the rolls are shown. The particular types of the obtained dependencies are analyzed.

References

1. Borodyanskiy V.P. [Rolling of material by rolls of different sizes at the same speed of contacting surfaces], *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Pishchevaya tekhnologiya* [News of higher educational institutions. Food technology], 2007, no. 4 (299), pp. 91-94. (In Russ.)
2. Gudur P.P., Salunkhe M.A., Dixit U.S. A Theoretical Study on the Application of Asymmetric Rolling for the Estimation of Friction, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2008, vol. 50, pp. 315-327.
3. Nefedov A.A., Kalyuzhnyy I.F., Bayduzh V.V. *Teoriya prokatki (materialy Vsesoyuznoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Teoreticheskiye problemy prokatnogo proizvodstva»)* [Theory of rolling (materials of the All-Union scientific and technical conference "Theoretical problems of rolling production ")], Moscow: Metallurgiya, 1975, pp. 213-216. (In Russ.)
4. Nikolaev V.A., Vasilyev A.A. Analysis of Strip Asymmetrical Cold Rolling Parameters, *Metallurgical and Mining Industry*, 2010, vol. 2, no. 6, pp. 405-412. (In Eng., abstract in Russ.)
5. Vydrin A.V., Ivanova Ye.Ye. [Effort with essentially asymmetric sheet rolling], *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Metallurgiya* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Metallurgy], 2008, no. 24 (124), pp. 51-54. (In Russ.)
6. Kuznetsov G.K. *PhD Dissertation (Technical)*, Kostroma, 1970, 287 p. (In Russ.)
7. Khaylis G.A. [Determination of gauge depth and resistance to rolling over a free pneumatic wheel through the soil], *Dostizheniya nauki i tekhniki APK* [Achievements of Science and Technology of the AIC], 2006, no. 4, pp. 10-14. (In Russ.)
8. Kim Yu.A., Bobrovich V.A., Voytekhovskiy B.V., Isachenkov V.S. [The influence of the air pressure in the tire of the wheels on the geometric parameters of the contact spot during interaction with the supporting surface], *Trudy BGTU. Seriya 1: Lesnoye khozyaystvo, prirodnopol'zovaniye i pererabotka vozobnovlyayemykh resursov* [Transactions of BSTU. Series 1: Forestry, nature management and processing of renewable resources], 2018, no. 2 (210), pp. 308-312. (In Russ., abstract in Eng.)
9. Pelevin L.Ye., Abrashkevich Yu.D., Balaka M.N., Arzhayev G.A. [Modeling the process of interaction of an elastic wheel with a deformable support surface], *Gornoye oborudovaniye i elektromekhanika* [Mining equipment and electromechanics], 2013, no. 7, pp. 10-16. (In Russ., abstract in Eng.)
10. Khurramov Sh.R. *Sbornik trudov XYI Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Matematicheskiye metody v tekhnike i tekhnologiyakh»* [Proceedings of the XYI International Scientific Conference "Mathematical Methods in Engineering and Technology"], Rostov-on-Don, 2003, pp. 100-101. (In Russ.)
11. Khurramov Sh.R., Bakhadirov G.A., Abdugarimov A. [Analysis of the geometric conditions of the two-roll module in the steady-state interaction mode], *Doklady AN RUz. Tashkent* [Doklady AN RUz. Tashkent], 2018, no. 5, pp. 10-12. (In Russ.)

Zur Lösung einiger Kontaktaufgaben der Doppelwalzenmodule

Zusammenfassung: Es ist die Lösung der Kontaktprobleme von Doppelwalzenmodulen gezeigt: Bestimmung der Kontaktwinkel und analytische Beschreibung der Form der Kontaktkurven der Walzen. Betrachtet ist ein Zweiwalzenmodul, bei dem die Walzen durch eine Neigung nach rechts relativ zur Vertikalen angeordnet sind, unterschiedliche Durchmesser und elastische Beschichtungen mit unterschiedlichen Steifigkeiten haben, wobei die Materialschicht nach unten gefördert ist. Ausdrücke der Kontaktwinkel des Zweiwalzenmoduls sind in Fällen entdeckt, in denen beide Antriebsrollen und die obere Rolle frei sind. Die Kontaktkurven der Rollen sind angezeigt. Die besonderen Arten der erhaltenen Abhängigkeiten sind analysiert worden.

Sur la resolution de certains problèmes de contact des modules à deux étages

Résumé: Est indiquée la résolution des problèmes de contact des modules à deux rouleaux: définition des angles de contact et description analytique de la forme des courbes de contact des rouleaux. Est considéré un module à deux rouleaux dans lequel les rouleaux sont disposés par rapport à la verticale par une inclinaison vers la droite et ont des diamètres différents; sont aussi examinés des revêtements élastiques avec des rigidité différentes; la couche de matériau est inclinée vers le bas. Sont trouvées les expressions des angles de contact du module à deux arbres dans les cas où les deux rouleaux sont entraînés et le rouleau supérieur est libre. Sont montrées les formes de contacts courbes des rouleaux. Sont analysés les types particuliers des dépendances reçues.

Авторы: *Хуррамов Шавкат Рахматуллаевич* – кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории «Теория механизмов и машин»; *Халтураев Фархад Сафарович* – младший научный сотрудник лаборатории «Теория механизмов и машин»; *Курбанова Феруза Зариповна* – младший научный сотрудник лаборатории «Теория механизмов и машин»; *Мусиров Махмаражаб Уралович* – младший научный сотрудник лаборатории «Теория механизмов и машин», Научно-исследовательский институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М. Т. Уразбаева АН РУз, г. Ташкент, Республика Узбекистан.

Рецензент: *Бахадиров Гайрат Атаханович* – доктор технических наук, профессор, главный ученый секретарь АНРУз, г. Ташкент, Республика Узбекистан.