УДК 517.518
DOI: 10.17277/vestnik.2019.03.pp.475-485

СУММИРОВАНИЕ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫМИ МЕТОДАМИ

А. Д. Нахман

Кафедра «Механика и инженерная графика», alextmb@mail.ru,
ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия

Ключевые слова: квазивыпуклые последовательности; оценки слабого типа; средние Марцинкевича.

Аннотация: Построены средние типа Марцинкевича двойных рядов Фурье, порождаемые линейными полунепрерывными методами суммирования. Установлено, что условие квазивыпуклости суммирующей последовательности обеспечивает регулярность метода суммирования. Для максимальных операторов, определенных на классах суммируемых периодических функций, установлены оценки слабого типа. Следствием указанных оценок является сходимость средних почти всюду. Уточнен характер точек суммируемости и установлены аппроксимативные свойства средних. Получены приложения к экспоненциальным методам суммирования двойных рядов Фурье.

---

1. Постановка задачи

Обозначим $Q=[-\pi,\pi]^2$ и рассмотрим класс $L=L(Q)$ функций $f=f(x,y)$, 2π-периодических по каждой переменной и суммируемых на Q. Пусть

$$c_{kl}(f)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,z)\exp(-i(kt+lz))\,dtdz\,,\qquad k,l=0,\pm 1,\pm 2,... \tag{1.1}$$

– коэффициенты Фурье любой такой функции f и

$$s[f;x,y]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{kl}(f)\exp(i(kx+ly)) \tag{1.2}$$

– ее двойной ряд Фурье. В связи с известными примерами расходящихся рядов Фурье оказывается, что уже в одномерном случае такие ряды, вообще говоря, не пригодны в качестве аппарата представления произвольной 2π-периодической суммируемой на $[-\pi,\pi]$ функции. «Исправление» ситуации возможно путем введения некоторого мультипликатора, обеспечивающего сходимость полученной конструкции. Так возникают задачи о мультипликаторах сходимости и методах суммирования рядов Фурье (см., напр., [1, т. 1, с. 126; 2]).

Переход к многомерному случаю вносит значительное своеобразие в формулировки и методы доказательств результатов. Так, само определение частичных сумм ряда (1.2) можно вводить по-разному. Например, можно строить «квадратные» частичные суммы

$$s_K(f; x, y) = \sum_{k=-K}^{K} \sum_{l=-K}^{K} c_{kl}(f) \exp(i(kx + ly)),$$

суммы по прямоугольникам (суммы по Прингсхейму), треугольникам и др. [1, т. 2, с. 453; 3].

Ситуация с расходимостью в многомерном случае усугубляется. Например, существует непрерывная функция $f(x, y)$, ряд Фурье которой расходится (по Прингсхейму) всюду [4]. В связи с этим обстоятельством повышается интерес к методам суммирования двойных (и вообще, кратных) рядов Фурье. Однако и здесь наблюдается ряд особенностей. Например, чезаровские средние прямоугольных частичных сумм утрачивают свойство включения, известное в одномерном случае (см. [5]). Поэтому возникает интерес к регулярным методам суммирования [6, с. 79]. Соответствующие средние можно построить следующим образом.

Рассмотрим бесконечную, вообще говоря, произвольную последовательность

$$\Lambda = \{\lambda_k(h); \quad h > 0, \quad k = 0, 1, \ldots; \ \lambda_0(h) = 1\}, \tag{1.3}$$

определяемую значениями параметра $h > 0$ и семейство Λ -средних ряда (1.2)

$$U_h(f) = U(f, x, y; \lambda, h) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k(h) - \lambda_{k+1}(h)) S_{kk}(f; x, y). \tag{1.4}$$

Поставим вопрос о поведении при $h \to +0$ семейства (1.4). Отметим, что сходимость (1.4) здесь может пониматься в разных смыслах (в отдельных точках, в метрике соответствующего функционального пространства и др.). Рассмотрим вопрос об условиях на суммирующую последовательность Λ, обеспечивающих сходимость средних (1.4) почти всюду в Q к породившей их функции $f = f(x, y)$.

В случае, когда h – дискретный параметр и соответствующая последовательность (1.3) финитна, наиболее общие результаты о поведении (1.4) получены М. И. Дьяченко [7], обобщившим утверждения работы [5]. Обобщения в другом направлении имеются в [8].

Кратко об истории настоящей проблематики. Задача об исследовании поведения так называемых экспоненциальных средних (точное определение см. п. 6) простых и кратных рядов Фурье, связанная с высокой прикладной значимостью семейств таких средних, была поставлена автору Б. П. Осиленкером; отдельные ее аспекты рассмотрены в [9]. В работах [10, 11] эта задача изучена в достаточно общем виде. Другие подходы к ее решению предложены Р. М. Тригубом [12, 13]. Распространения результатов на случай рядов по обобщенным собственным функциям дискретного оператора Штурма–Лиувилля принадлежат Б. П. Осиленкеру [14].

2. Квазивыпуклые и регулярные методы суммирования

В настоящем параграфе рассмотрены понятия и факты о квазивыпуклых и регулярных методах суммирования, во многом известные из источников [1, т. 1, с. 56; 2; 6, с. 79], которые приводим здесь в целях полноты изложения.

Последовательность (1.3) называется выпуклой (вогнутой), если $\Delta_k^2 = \Delta^2 \lambda_k(h) > 0 \quad (\Delta_k^2 < 0)$, где

$$\Delta_k^2 = \Delta_k - \Delta_{k+1},\ \Delta_k = \Delta\lambda_k = \lambda_k(h) - \lambda_{k+1}(h),\ k = 0, 1, ...$$

Последовательность (1.3) кусочно-выпукла, если Δ_k^2 меняет свой знак конечное число раз, $k = 0, 1, ...$

Последовательность (1.3) называется квазивыпуклой, если сумма

$$\sum(h, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \, | \, \Delta^2 \lambda_k(h) \, | \tag{2.1}$$

равномерно по h ограничена.

Заметим, что выпуклая (вогнутая) ограниченная (по h и k) последовательность (1.3), обладающая свойством

$$\lim_{N \to \infty} \lambda_N(h) = 0 \quad (h > 0), \tag{2.2}$$

является и квазивыпуклой. Например для выпуклой последовательности имеем с помощью преобразования Абеля [1, т. 1, с. 15] следующее представление суммы (2.1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \, | \, \Delta^2 \lambda_k(h) \, | =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} (k+1) \Delta^2 \lambda_k(h) = \lim_{N \to \infty} \left(\Delta\lambda_0(h) + \sum_{k=1}^{N} \Delta\lambda_k(h) - (N+1) \Delta_N(h) \right) = 1 \, ;$$

здесь использовано (2.2) и соотношение (см. [1, т. 1, с. 156])

$$\lim_{N \to \infty} N \Delta\lambda_N(h) = 0 \quad (h > 0). \tag{2.3}$$

Что касается кусочно-выпуклых последовательностей, то в [15] показано, что они обладают свойством квазивыпуклости, если вместе с (2.2) потребовать, чтобы

$$| \, \lambda_k(h) \, | + k \, | \, \Delta\lambda_k(h) \, | \le C_\lambda$$

для всех $h > 0, \ k = 1, 2, ...$

Здесь и в дальнейшем через C обозначим постоянные, вообще говоря различные, зависящие лишь от явно указанных индексов.

Лемма 2.1. Пусть выполнено условие (2.2). Тогда при всех $N = 0, 1, ...$ имеют место следующие соотношения:

$$(N+1) \, | \, \Delta\lambda_N(h) \, | \le \sum_{k=N}^{\infty} (k+1) \, | \, \Delta^2 \lambda_k(h) \, | \, ; \tag{2.4}$$

$$\sum_{k=0}^{N} | \, \Delta \, \lambda_k(h) \, | \le \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \, | \, \Delta^2 \lambda_k(h) \, | \, . \tag{2.5}$$

В частности, из условия квазивыпуклости следует, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} | \, \Delta \, \lambda_k(h) \, | \tag{2.6}$$

сходится при всех $h > 0$, и при этом его сумма равномерно по h ограничена.

Можно считать, что сумма (2.1) конечна, иначе утверждения леммы тривиальны. Тогда неравенства (2.4), (2.5) следуют из результатов работы [15], поскольку в их доказательстве использовано только условие (2.2) и преобразование Абеля. Заметим, что для квазивыпуклой последовательности (1.3) свойство (2.3) есть следствие (2.4).

Метод суммирования (1.3) называется регулярным [1, т. 1, с. 126; 6, с. 83], если сумма (2.6) равномерно (по h) ограничена сверху, а также выполнены условия:

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k(h)=1 \tag{2.7}$$

и

$$\lim_{h\to 0}\Delta\lambda_k(h)=0;\ \ k=0,1,... \tag{2.8}$$

Очевидно, что соотношение (2.8) будет справедливо, если

$$\lim_{h\to 0}\lambda_k(h)=1;\ \ k=0,1,... \tag{2.9}$$

Отметим, что рассматриваемые суммирующие последовательности регулярны. Действительно, условие (2.8) выполнено, и ряд (2.6) имеет равномерно ограниченную (по h) сумму. Наконец, если учесть (2.2), то

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k(h)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\Delta\lambda_k(h)=\lim_{N\to\infty}\left(\lambda_0(h)-\lambda_N(h)\right)=1\,,$$

то есть справедливо (2.7). Следовательно ([6, с. 83]), методы (1.3) сохраняют сходимость в следующем смысле.

Лемма 2.2. Пусть для квазивыпуклой последовательности (1.3) имеют место условия (2.2), (2.9). Пусть также числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k \tag{2.10}$$

сходится, и его сумма равна S. Тогда, если $\{S_k\}$ – последовательность частичных сумм (2.10), то ряд

$$\sigma(\lambda,h)=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k(h)S_k$$

сходится при каждом $h>0$ и его сумма $\sigma(\lambda,h)$ обладает свойством

$$\lim_{h\to 0}\ \sigma(\lambda,h)=S\,.$$

3. Максимальные оценки интегралов, содержащих двойные ядра Фейера

Введем в рассмотрение ядро Дирихле

$$D_k(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{k}\cos\nu t=\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,,$$

и двойное ядро Фейера

$$F_k(t,z)=\frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k}D_\nu(t)D_\nu(z)\,; \tag{3.1}$$

полагаем $D_{-1}(t,z)=F_{-1}(t,z)\equiv 0$. В дальнейшем потребуется соотношение

$$D_k(t)D_k(z)=(k+1)F_k(t,z)-kF_{k-1}(t,z)\,, \tag{3.2}$$

очевидным образом вытекающее из определения (3.1).

Рассмотрим также максимальную функцию типа Марцинкевича–Зигмунда

$$f_\gamma^*(x,y)=\sum_{r=0}^{1}\sup_{i,j=0,1,\ldots}2^{-\gamma(i+j)}\left\{\sup_{\eta>0}\frac{1}{2^{i+j}\eta^2}\int_{-2^i\eta}^{2^i\eta}dt\int_{-2^j\eta+rt}^{2^j\eta+rt}|f(x+t,y+z)|\,dz\right\},$$

$$0<\gamma<1. \tag{3.3}$$

Как установлено Л. В. Жижиашвили ([5]), обобщившим классические результаты Марцинкевича и Зигмунда (см. [1, т. 2, с. 466-467]), для $f_\gamma^*(x,y)$ имеет место следующая оценка «слабого типа»

$$\mathrm{mes}\{(x,y)\in Q\mid\ f_\gamma^*(x,y)>\varsigma>0\}\le\frac{C_\gamma}{\varsigma}\iint_Q|f(t,z)|dtdz\,. \tag{3.4}$$

Сформулируем важное следствие результатов работы [5].

Лемма 3.1. Для всякой $f\in L(Q)$ и любого $0<\gamma<1$ справедливо неравенство

$$\sup_{k=0,1,\ldots}\iint_Q|f(x+t,y+z)||F_k(t,z)|\,dtdz\le C_\gamma\ f_\gamma^*(x,y)\,. \tag{3.5}$$

4. Оценки в терминах максимальной функции

Пользуясь интегральной формой (1.1) коэффициентов Фурье и преобразованием Абеля, получаем, согласно (1.4) и (3.2),

$$U_h(f)=U(f,x,y;\lambda,h)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\Delta\lambda_k(h)S_{kk}(f;x,y))=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t,y+z)\left\{\sum_{k=0}^{N}\Delta\lambda_k(h)D_k(t)D_k(z)\right\}dtdz=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t,y+z)\{\sum_{k=0}^{N}\Delta\lambda_k(h)\,\{\,(k+1)F_k(t,z)-kF_{k-1}(t,z)\,\}\,dtdz=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t,y+z)\left\{(N+1)\Delta\lambda_N(h)F_N(t,z)+\sum_{k=0}^{N-1}\Delta^2\lambda_k(h)(k+1)F_k(t,z)\right\}dtdz. \tag{4.1}$$

Лемма 4.1. Пусть для квазивыпуклой последовательности (1.3) выполнено условие (2.2). Тогда для всякой $f \in L(Q)$ и любого $0 < \gamma < 1$ имеет место оценка

$$| U(f, x, y; \lambda, h) | \le C_\gamma \sum (h, \lambda) \; f_\gamma^*(x, y). \tag{4.2}$$

Доказательство. На основании представления (4.1) и оценки (3.5) будем иметь при всех $h > 0$

$$| U(f, x, y; \lambda, h) | \le C_\gamma f_\gamma^*(x, y) \lim_{N \to +\infty} \left\{ (N+1) \, | \Delta\lambda_N(h) | + \sum_{k=0}^{N-1} | \Delta^2 \lambda_k(h) | \, (k+1) \right\}.$$

Для получения (4.2) остается воспользоваться соотношением (2.4).

5. Оценки слабого типа и суммируемость почти всюду

Как установлено выше (см. (2.1), (2.5), (2.7)), справедлива оценка снизу

$$\sum (h, \lambda) \ge \sum_{k=0}^{\infty} | \Delta\lambda_k(h) | \ge \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\lambda_k(h) \equiv 1 .$$

Значит, можно рассмотреть максимальный оператор

$$U_*(f, x, y; \lambda) = \sup_{h > 0} \frac{| U(f, x, y; \lambda, h) |}{\sum (h, \lambda)} .$$

Теорема 5.1. Пусть квазивыпуклая последовательность (1.3) удовлетворяет условию (2.2). Если $f \in L(Q)$ и $0 < \gamma < 1$, то справедлива следующая оценка слабого типа

$$\mathrm{mes}\{(x, y) \in Q \,|\, U_*(f, x, y; \lambda) > \varsigma > 0\} \le \frac{C_{\gamma, \Lambda}}{\varsigma} \iint_Q | f(t, z) | dtdz .$$

Результат теоремы является прямым следствием леммы 4.1 и соотношения (3.4).

Теорема 5.2. Пусть последовательность (1.3) квазивыпукла, и для нее выполнены условия (2.2), (2.9). Тогда соотношение

$$\lim_{h \to +0} U(f, x, y; \lambda, h) = f(x, y) \tag{5.1}$$

имеет место почти всюду в Q.

Равенство (5.1) следует из результата теоремы 1 и условия (2.9) на основе стандартных рассуждений [1, т. 2, с. 470].

6. Экспоненциальные методы суммирования

Рассмотрим методы суммирования (1.3), соответствующие случаю $\lambda_k(h) = \lambda(x, h)|_{x=k}$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\lambda(x, h) = \exp(-h\varphi(x))$, $\exp(-h\varphi(0)) = 1$, а функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0, +\infty)$ и дважды дифференцируема на $(0, +\infty)$. Приведем несколько наиболее важных примеров.

1. Пусть $\varphi(x) = \ln(x+1)$, в этом случае $\exp(-h\varphi(N)) = (N+1)^{-h}$, $N = 0, 1, \ldots$, и суммирующая последовательность выпукла. Поэтому имеет место суммируемость двойного ряда Фурье почти всюду методом

$$\lambda_k(h) = \frac{1}{(k+1)^h}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad h \to +0 .$$

2. В случае $\varphi(x)=x^{\alpha}$ последовательность (1.3) выпукла при $0<\alpha\le 1$ и кусочно-выпукла при $\alpha>1$ (см. [11]); следовательно, выполнено условие ее квазивыпуклости. Таким образом, ряд (1.2) суммируем почти всюду методом $\lambda_k(h)=\exp(-hk^{\alpha})$, $k=0,1,\dots$. В частности, случай $\alpha=1$ соответствует классическому методу Пуассона–Абеля.

Поскольку (см. лемму 2.2) методы суммирования, рассматриваемые в теореме 5.2, регулярны, то на основании приведенных примеров приходим к следующему утверждению.

Следствие 6.1. Двойной ряд Фурье функции $f(x,y)\in L(Q)$ не может быть сходящимся (в смысле сходимости квадратных частных сумм) к $+\infty$ или $-\infty$ ни на каком множестве положительной плоской меры.

Данное утверждение установлено Л. В. Жижиашвили [5] при рассмотрении других методов суммирования (методов Чезаро–Абеля).

7. Оценки уклонений

В работе [16], посвященной суммируемости рядов Фурье квазивыпуклыми методами, получена верхняя оценка уклонений средних от исходной функции в терминах некоторого интегрального оператора, порожденного обобщенными точками Лебега. Распространим подобный результат и на двумерный случай. Для этого введем в рассмотрение функцию вида

$$R_k^*(f;x,y;\gamma)=\sum_{r=0}^{1}\sup_{i,j=0,1,\dots;\,i,j<\log_2(2\pi k)}2^{-(1+\gamma)(i+j)}\left\{\frac{1}{k^2}\int_{-\frac{2^i}{k}}^{\frac{2^i}{k}}dt\int_{-\frac{2^j}{k}+rt}^{\frac{2^j}{k}+rt}|f(x+t,y+z)-f(x,y)|\,dz\right\},\qquad (7.1)$$

$k=1,2,\dots;\ 0<\gamma<1.$

Заметим, что из самих определений (3.3) и (7.1) вытекает неравенство

$$R_k^*(f;x,y;\gamma)\le f_\gamma^*(x,y)+2\,|f(x,y)|,\quad k=1,2,\dots,$$

так что (7.1) конечна почти всюду. На самом деле справедлив следующий более глубокий результат.

Лемма 7.1. Для каждой $f\in L(Q)$ и любого $0<\gamma<1$ соотношение

$$\lim_{k\to\infty}R_k^*(f;x,y;\gamma)=0 \qquad (7.2)$$

имеет место почти всюду.

Точки (x,y), в которых справедливо (7.2), можно рассматривать как один из возможных двумерных аналогов точек Лебега [17].

Утверждение леммы доказано в [17] для слагаемого, соответствующего $r=0$, в определении (7.1). В основе доказательства лежит классическая «лемма о покрытиях» [1, т. 2, с. 465]. Рассуждения [17] сохраняются и для слагаемого, соответствующего $r=1$, поскольку опираются на ту же лемму и очевидное при всех целых неотрицательных i,j равенство

$$\operatorname{mes}\left\{(t,z)\mid -\frac{2^i}{k}\le t\le\frac{2^i}{k},-\frac{2^j}{k}\le z\le\frac{2^j}{k}\right\}=\operatorname{mes}\left\{(t,z)\mid -\frac{2^i}{k}\le t\le\frac{2^i}{k},t-\frac{2^j}{k}\le z\le t+\frac{2^j}{k}\right\},\ k=1,2,\dots$$

Теорема 7.1. Пусть последовательность (1.3) квазивыпукла, и для нее выполнены условия (2.2), (2.9). Тогда для каждой $f \in L(Q)$ в любой точке Лебега (x, y) имеет место оценка

$$|U(f, x, y; \lambda, h) - f(x, y)| \le C_\gamma \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 \lambda_k(h)| R_{k+1}^*(f; x, y; \gamma). \qquad (7.3)$$

В частности, в каждой такой точке имеет место соотношение (5.1).

Доказательство теоремы основано на оценке

$$\iint_Q |f(x+t, y+z) - f(x, y)| |F_k(t, z)| dtdz \le C_\gamma R_{k+1}^*(f; x, y; \gamma), \qquad (7.4)$$

которая устанавливается теми же рассуждениями, что (3.5); см. [5].

В силу (3.1) очевидно, что

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(x, y) F_k(t, z) dtdz, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

поэтому, как и в (4.1),

$$\sum_{k=0}^{N} \Delta\lambda_k(h) S_{kk}(f; x, y) - f(x, y) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t, y+z) - f(x, y)) \left\{ (N+1) \Delta\lambda_N(h) F_N(t, z) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{N-1} \Delta^2 \lambda_k(h)(k+1) F_k(t, z) \right\} dtdz. \qquad (7.5)$$

Согласно (7.4) и (7.5)

$$|U(f, x, y; \lambda, h) - f(x, y)| \le$$

$$\le C_\gamma \lim_{N \to \infty} \left((N+1) |\Delta\lambda_N(h)| R_{N+1}^*(f; x, y; \gamma) + \sum_{k=0}^{N-1} |\Delta^2 \lambda_k(h)| (k+1) R_{k+1}^*(f; x, y; \gamma) \right).$$

Для получения (7.3) осталось применить соотношение (7.2), из которого вытекает равномерная (по N) ограниченность $R_{N+1}^*(f; x, y; \gamma)$, и результат предельного перехода в равенстве (2.4).

Установим сходимость (5.1). Выбрав произвольное $\varepsilon > 0$, можно утверждать, что в любой точке Лебега $|R_{k+1}^*(f; x, y; \gamma)| < \varepsilon$ для всех k, бо́льших некоторого номера $N = N(\varepsilon)$. С другой стороны, последовательность $\left\{R_{k+1}^*(f; x, y; \gamma)\right\}$, имеющая в той же точке предел (именно, равный нулю), будет равномерно по k ограниченной при $k \le N$. С учетом квазивыпуклости (1.3) и (2.9), получаем тогда из соотношения (7.3) утверждение (5.1), что и требовалось доказать.

8. Обобщения и приложения

Условие квазивыпуклости может быть включено в более общий случай методов суммирования, содержащий «финитные» суммирующие последовательности, и, в частности, методы Чезаро–Абеля. В одномерном случае идея соответствующего подхода, использующая ядра Вале-Пуссена, продемонстрирована в [2].

Результаты настоящей работы могут быть применены к исследованию мультипликаторов сходимости двойных рядов Фурье, а также распространены на треугольные средние двойных рядов Фурье.

Список литературы

1. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : в 2 т. / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.; Т. 2. – 537 с.

2. Осиленкер, Б. П. Задачи, ассоциированные с представлением Дирихле полугруппы операторов / Б. П. Осиленкер, А. Д. Нахман // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 492 – 511. doi: 10.17277/vestnik.2018.03.pp.492-511

3. Дьяченко, М. И. Некоторые проблемы теории кратных тригонометрических рядов / М. И. Дьяченко // Успехи математических наук. – 1992. – Т. 47, вып. 5 (287). – С. 97 – 162.

4. Fefferman, C. On the Divergence of Multiple Fourier Series / C. Fefferman // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 77, No. 2. – P. 191 – 195.

5. Жижиашвили, Л. В. Обобщение одной теоремы Марцинкевича / Л. В. Жижиашвили // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т. 32, вып. 5. – С. 1112 – 1122.

6. Кук, Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей / Р. Кук. – М. : ГИФМЛ, 1960. – 471 с.

7. Дьяченко, М. И. О некоторых свойствах кратных рядов и преобразований Фурье / М. И.Дьяченко // Труды МИАН СССР. – 1989. – Т. 190. – С. 88 – 101.

8. Нахман, А. Д. Средние типа Марцинкевича полиномиальных разложений Фурье / А. Д. Нахман // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 321, № 3. – С. 474 – 477.

9. Nakhman, A. D. Weigted Norm Inequalities for the Convolution Operators / A. D. Nakhman // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2009. – Т. 15, № 3. – С. 653 – 660.

10. Осиленкер, Б. П. Поведение экспоненциальных средних рядов Фурье и сопряженных рядов Фурье в точках Лебега / Б. П. Осиленкер, А. Д. Нахман // Вестник МГСУ. – 2014. – № 10. – С. 54 – 63.

11. Nakhman, A. D. Exponential Methods of Summation of the Fourier Series / A. D. Nakhman, B. P. Osilenker // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 101 – 109.

12. Тригуб, Р. М. Обобщение метода Абеля–Пуассона суммирования тригонометрических рядов Фурье / Р. М. Тригуб // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 3. – С. 473 – 475.

13. Тригуб, Р. М. Суммируемость тригонометрических рядов Фурье в *d*-точках и обобщение метода Абеля–Пуассона / Р. М. Тригуб // Изв. РАН. Сер. матем. – 2015. – Т. 79, № 4. – С. 205 – 224.

14. Осиленкер, Б. П. О рядах Фурье по обобщенным собственным функциям дискретного оператора Штурма-Лиувилля / Б. П. Осиленкер // Функциональный анализ и его приложения. – 2018. – Т. 52, № 2. – С. 90 – 93. doi: 10.4213/faa3486

15. Nakhman, A. D. Regular Semi-Continuous Methods of Summation of Fourier Series / A. D. Nakhman, B. P. Osilenker // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2017. – Т. 23, № 1. – С. 135 – 148. doi: 10.17277/vestnik.2017.01.pp.135-148

16. Нахман, А. Д. Аппроксимация функций в точках Лебега средними рядов Фурье / А. Д. Нахман // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2018. – Т. 24, № 4. – С. 670 – 683. doi: 10.17277/vestnik.2018.04.pp.670-683

17. Габисония, О. Д. О точках суммируемости двойных рядов Фурье некоторыми линейными методами / О. Д. Габисония // Известия вузов. Математика. – 1972. – № 5. – С. 29 – 37.

Summation of Double Fourier Series by Semicontinuous Methods

A. D. Nakhman

Department of Mechanics and Engineering Graphics,
alextmb@mail.ru, TSTU, Tambov, Russia

Keywords: quasiconvex sequences; weak type estimates; Marcinkiewicz means.

Abstract: Marcinkiewicz type means of double Fourier series generated by linear semi-continuous summation methods are constructed. It is established that the quasiconvexity condition of the summing sequence ensures the regularity of the summation method. For maximal operators defined on classes of summable periodic functions, weak estimates are established. A consequence of these estimates is the convergence of the means almost everywhere. The nature of the points of summability is refined and the approximative properties of means are established. Applications to exponential summation methods for double Fourier series are obtained.

References

1. Zigmund A. *Trigonometricheskiye ryady: v 2 t.* [Trigonometric series: in 2 vols], Moscow: Mir, 1965, vol. 1, 615 p.; vol. 2, 537 p. (In Russ.)
2. Osilenker B.P., Nakhman A.D. [Problems associated with the Dirichlet representation by a semigroup of operators], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 492-511, doi: 10.17277/vestnik.2018.03. pp.492-511 (In Russ., abstract in Eng.)
3. D'yachenko, M. I. [Some problems of the theory of multiple trigonometric series], *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Uspekhi Matematicheskikh Nauk], 1992, vol. 47, issue 5 (287), pp. 97-162. (In Russ.)
4. Fefferman C. On the Divergence of Multiple Fourier Series, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1971, vol. 77, no. 2, pp. 191-195.
5. Zhizhiashvili L.V. [Generalization of a Martsinkevich Theorem], *Izv. AN SSSR. Ser. matem.* [Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. Math], 1968, vol. 32, issue 5, pp. 1112-1122. (In Russ.)
6. Kuk P. *Beskonechnyye matritsy i prostranstva posledovatel'nostey* [Infinite matrices and sequence spaces], Moscow: GIFML, 1960, 471 p. (In Russ.)
7. D'yachenko M.I. [On some properties of multiple series and Fourier transforms], *Trudy MIAN SSSR* [Trudy MIAN SSSR], 1989, vol. 190, pp. 88-101. (In Russ.)
8. Nakhman A.D. [Marcinkiewicz's Medium Type Polynomial Fourier Expansions], *Dokl. AN SSSR* [Dokl. Academy of Sciences of the USSR], 1991, vol. 321, no. 3, pp. 474-477. (In Russ.)
9. Nakhman A. D. Weigted Norm Inequalities for the Convolution Operators, *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 653-660. (In Eng., abstract in Russ.)
10. Osilenker B.P., Nakhman A.D. [Behavior of exponential means of Fourier series and conjugate Fourier series at Lebesgue points], *Vestnik MGSU* [MGSU Bulletin], 2014, no. 10, pp. 54-63. (In Russ., abstract in Eng.)
11. Nakhman A.D., Osilenker B.P. Yexponential Methods of Summation of the Fourier Series, *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 101-109. (In Eng., abstract in Russ.)
12. Trigub R.M. [A generalization of the Abel – Poisson method of summation of trigonometric Fourier series], *Matematicheskiye zametki* [Mathematical notes], 2014, vol. 96, no. 3, pp. 473-475. (In Russ.)

13. Trigub R.M. [The Summability of Trigonometric Fourier Series at d-points and a Generalization of the Abel – Poisson Method], *Izv. RAN. Ser. matem.* [Izv. RAS. Ser. Math], 2015, vol. 79, no. 4, pp. 205-224. (In Russ.)

14. Osilenker B.P. [On the Fourier series for the generalized eigenfunctions of the discrete Sturm-Liouville operator], *Funktsional'nyy analiz i yego prilozheniya* [Functional analysis and its applications], 2018, vol. 52, no. 2, pp. 90-93, doi: 10.4213/faa3486 (In Russ., abstract in Eng.)

15. Nakhman A.D., Osilenker B.P. Regular Semi-Continuous Methods of Summation of Fourier Series, *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 135-148, doi: 10.17277/vestnik.2017.01.pp.135-148 (In Eng., abstract in Russ.)

16. Nakhman A.D. [Approximation of functions at Lebesgue points by means of Fourier series], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2018, vol. 24, no. 4, pp. 670-683, doi: 10.17277/vestnik.2018.04.pp.670-683 (In Russ., abstract in Eng.)

17. Gabisoniya O.D. [On the points of summability of double Fourier series by some linear methods], *Izvestiya vuzov. Matematika* [Izvestiya Vuzov. Maths], 1972, no. 5, pp. 29-37. (In Russ.)

Summieren der doppelten Fourier-Reihen mit Hilfe der halbkontinuierlichen Methoden

Zusammenfassung: Es sind Mittlere des Marcinkiewiczsch-Typs von Doppel-Fourier-Reihen konstruiert, die durch lineare halbkontinuierliche Summationsverfahren erzeugt werden. Es ist festgestellt, dass die Quasikonvexitätsbedingung der Summierungssequenz die Regelmäßigkeit der Summierungsmethode sicherstellt. Für maximale Operatoren, die für Klassen der summierten periodischen Funktionen definiert sind, sind schwache Schätzungen festgelegt. Die Folge dieser Schätzungen ist die Konvergenz der Mittleren fast überall. Die Art der Summierungspunkte ist festgestellt und die approximativen Eigenschaften der Mittelwerte sind festgelegt. Es sind Anwendungen für Exponentialsummationsmethoden der Doppel-Fourier-Reihen erhalten.

Sommation des doubles series de Fourier par des méthodes semi-continues

Résumé: Sont construites les moyennes de type Marcinkiewicz des doubles séries de Fourier générées par des méthodes de sommation semi-continues linéaires. Est établi que la condition de quasi-convexité de la séquence de sommation garantit la régularité de la méthode de sommation. Pour les opérateurs maximaux définis sur les classes de fonctions périodiques sommables, des estimations de type faible sont établies. La conséquence de ces estimations est la convergence des moyennes presque partout. Est precise la nature des points de sommabilité; sont définies les propriétés approximatives des moyennes. Sont obtenues les applications pour les méthodes exponentielles de la sommation des doubles séries de Fourier.

Автор: ***Нахман Александр Давидович*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Механика и инженерная графика», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.

Рецензент: ***Куликов Геннадий Михайлович*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий научно-исследовательской лабораторией «Механика интеллектуальных материалов и конструкций», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.