УДК 517.51
DOI: 10.17277/vestnik.2019.02.pp.304-319

# ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА

**В. И. Фомин**

*Кафедра «Техническая механика и детали машин», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия; vasiliyfomin@bk.ru*

**Ключевые слова:** интерполяционный многочлен Лагранжа; кратные комплексные корни; обобщенная формула Лейбница; фундаментальная система решений; характеристический многочлен.

**Аннотация:** Показано, как выбирать степень интерполяционного многочлена Лагранжа, чтобы проводить интерполяцию на данном промежутке с заданной точностью решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае кратных комплексных корней его характеристического многочлена.

---

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(m)}(x)+\sum_{i=1}^{m-1} a_i\, y^{(m-i)}(x)+a_m\, y(x)=0 \tag{1}$$

с постоянными коэффициентами $a_i$ ($1 \le i \le m$). Известно [1, с. 180], что общее решение уравнения (1) имеет вид $y(x)=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)+...+C_m y_m(x)$, где $y_1(x),\ y_2(x),\ ...\ y_m(x)$ – фундаментальная система решений (**ФСР**) данного уравнения; $C_1, C_2,\ ...\ C_m$ – произвольные постоянные (свободные параметры). Фундаментальные системы решений уравнения (1) образуют решения из класса функций *K*, состоящего из функций следующего вида [1, с. 389]:

$$x^k \ \ (k \ge 0); \tag{2}$$

$$e^{\alpha x},\ \cos\beta x,\ \sin\beta x \ \ (\alpha \ne 0,\ \beta \ne 0); \tag{3}$$

$$x^k e^{\alpha x},\ x^k\cos\beta x,\ x^k \sin\beta x \ \ (\alpha \ne 0,\ \beta \ne 0,\ k \ge 1); \tag{4}$$

$$x^k e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^k e^{\alpha x}\sin\beta x \ \ (\alpha \ne 0,\ \beta \ne 0,\ k \ge 1). \tag{5}$$

В работе [2] показано, что вопрос об интерполяции решений уравнения (1) на отрезке $[a,b]$ некоторым многочленом $P_N(x)$ с заданной точностью $\delta$ сводится к задаче вида

$H$: для каждой отдельной функции $f(x) \in K$ нужно подобрать степень $n$ интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$ таким образом, чтобы $f(x) \approx L_n(x)$ на отрезке $[a,b]$ с заданной точностью $\delta_0 > 0$:

$$\| R_n \| \le \delta_0 , \tag{6}$$

где $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$, $\| R_N \| = \max\limits_{x \in [a,b]} | R_n(x) |$ (здесь и в дальнейшем используется норма $\| u \| = \max\limits_{x \in [a,b]} | u(x) |$ пространства $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $u = u(x)$).

Заметим, что решения вида (2), будучи многочленами, в интерполяции не нуждаются.

Для решения поставленной задачи $H$ воспользуемся известной оценкой [3, с. 60]

$$\| R_n \| \le \frac{\| f^{(n)} \| (b-a)^n \, 2^{1-2n}}{n!} . \tag{7}$$

Вначале находится производная $f^{(n)}(x)$. Затем указывается верхняя оценка для $\| f^{(n)} \|$, с помощью которой и неравенства (7) получают новую верхнюю границу для $\| R_n \|$. Тогда для выполнения неравенства (6) достаточно потребовать, чтобы эта новая верхняя граница для $\| R_n \|$ не превосходила $\delta_0$. Тем самым, будет указано условие на степень $n$ интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$, при выполнении которого поставленная задача интерполяции для взятой конкретной функции $f(x) \in K$ будет решена (естественно, следует выбирать минимальное значение $n$, удовлетворяющее указанному условию).

Для функций вида (3), (4) решение поставленной задачи не вызывает особых затруднений (при нахождении производной $f^{(n)}(x)$ для функций вида (4) используется формула Лейбница [4, с. 185]).

Изучим поставленную задачу для функций вида (5). Заметим, что для решений вида (5) уравнения (1) $1 \le k \le \frac{m}{2} - 1$ в случае четного $m$ и $1 \le k \le \frac{m-1}{2} - 1$ в случае нечетного $m$. Это следует из того, что если $\alpha + i\beta$ – комплексный корень кратности $r$ характеристического многочлена уравнения (1), то $\alpha - i\beta$ также является корнем кратности $r$ этого многочлена [1, с. 403], и такая пара комплексно сопряженных корней порождает $2r$ вещественнозначных решений уравнения (1) вида $y = x^k \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x$, $y = x^k \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$ $(0 \le k \le r - 1)$ из ФСР этого уравнения [1, с. 404].

При $k = 1$ поставленная выше задача для функций вида (5) решена в работе [2]. Рассмотрим случай $k \ge 2$.

1. Решим задачу $H$ для функции вида

$$f(x) = x^k \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x \tag{8}$$

($\alpha \ne 0$, $\beta \ne 0$; $2 \le k \le \frac{m}{2} - 1$ в случае четного $m$; $2 \le k \le \frac{m-1}{2} - 1$ в случае нечетного $m$).

Запишем функцию $f(x)$ в виде $f(x) = u(x)\, v(x)\, w(x)$, где $u(x) = x^k$, $v(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$, $w(x) = \cos\beta x$. Используя обобщенную формулу Лейбница на случай трех сомножителей [5], получаем равенство

$$f^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{n} C_n^s\, u^{(n-s)} \sum_{l=0}^{s} C_s^l\, v^{(s-l)}\, w^{(l)} . \tag{9}$$

Формулу (9) можно записать в виде

$$f^{(n)}(x) = u^{(n)} v\, w + u\, v^{(n)}\, w + u\, v\, w^{(n)} + u \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l\, v^{(n-l)} w^{(l)} +$$

$$+ w \sum_{s=1}^{n-1} C_n^s\, u^{(n-s)} v^{(s)} + v \sum_{s=1}^{n-1} C_n^s\, u^{(n-s)} w^{(s)} + \sum_{s=2}^{n-1} C_n^s\, u^{(n-s)} \sum_{l=1}^{s-1} C_s^l\, v^{(s-l)} w^{(l)}$$

или

$$f^{(n)}(x) = u^{(n)} v\, w + u\, v^{(n)}\, w + u\, v\, w^{(n)} + \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l\, u\, v^{(n-l)} w^{(l)} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} C_n^s\, u^{(n-s)} v^{(s)} w + \sum_{s=1}^{n-1} C_n^s\, u^{(n-s)} v\, w^{(s)} + \sum_{s=2}^{n-1} C_n^s \sum_{l=1}^{s-1} C_s^l\, u^{(n-s)} v^{(s-l)} w^{(l)} . \tag{10}$$

Используя свойства нормы $\| u + v \| \le \| u \| + \| v \|$, $\| \lambda u \| = | \lambda |\, \| u \|$, получаем из равенства (10) оценку вида

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le \left\| u^{(n)} v\, w \right\| + \left\| u\, v^{(n)}\, w \right\| + \left\| u\, v\, w^{(n)} \right\| + \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l \left\| u\, v^{(n-l)} w^{(l)} \right\| +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} C_n^s \left\| u^{(n-s)} v^{(s)} w \right\| + \sum_{s=1}^{n-1} C_n^s \left\| u^{(n-s)} v\, w^{(s)} \right\| + \sum_{s=2}^{n-1} C_n^s \sum_{l=1}^{s-1} C_s^l \left\| u^{(n-s)} v^{(s-l)} w^{(l)} \right\| . \tag{11}$$

Заметим, что

$$u^{(i)}(x) = \begin{cases} A_k^i\, x^{k-i}, & 1 \le i \le k, \\ 0, & i > k; \end{cases} \tag{12}$$

$$v^{(i)}(x) = \alpha^i e^{\alpha x}, \ i \in \mathbb{N}; \tag{13}$$

$$w^{(i)}(x) = \begin{cases} (-1)^q\, \beta^i \sin\beta x, \ i = 2q - 1, \\ (-1)^q\, \beta^i \cos\beta x, \ i = 2q. \end{cases} \tag{14}$$

Будем предполагать в дальнейшем, для определенности, что

$$n \ge k + 2 . \tag{15}$$

В силу соотношений (12), (15) $u^{(n)}(x) = 0$, следовательно,

$$\left\| u^{(n)} v\, w \right\| = 0 . \tag{16}$$

По формуле (12)

$$u^{(n-s)}(x)=\begin{cases} A_k^{n-s}\, x^{s+k-n}\,, & n-k\le s\le n-1\,,\\ 0\,, & s<n-k\,. \end{cases} \tag{17}$$

В силу равенств (16), (17) оценка (11) принимает вид

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le \left\| x^k\, v^{(n)}\, w \right\| + \left\| x^k\, v\, w^{(n)} \right\| + S_1 + S_2 + S_3 + S_4\,, \tag{18}$$

где

$$S_1=\sum_{l=1}^{n-1} C_n^l \left\| x^k\, v^{(n-l)} w^{(l)} \right\|;$$

$$S_2=\sum_{s=n-k}^{n-1} C_n^s\, A_k^{n-s} \left\| x^{s+k-n} v^{(s)} w \right\|;$$

$$S_3=\sum_{s=n-k}^{n-1} C_n^s A_k^{n-s} \left\| x^{s+k-n} v\, w^{(s)} \right\|;$$

$$S_4=\sum_{s=n-k}^{n-1} C_n^s A_k^{n-s} \sum_{l=1}^{s-1} C_s^l \left\| x^{s+k-n} v^{(s-l)} w^{(l)} \right\|.$$

Преобразуем правую часть неравенства (18). Введем следующие обозначения для $j\in\mathbb{N}$:

$$P_{\alpha,\beta,j}=\max_{x\in[a,b]} \left| x^j \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \right|;$$

$$Q_{\alpha,\beta,j}=\max_{x\in[a,b]} \left| x^j \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \right|.$$

В силу равенства (13) $x^k\, v^{(n)}(x)\, w(x)=\alpha^n x^k \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$, следовательно,

$$\left\| x^k\, v^{(n)}\, w \right\| = |\alpha|^n Q_{\alpha,\beta,k}\,. \tag{19}$$

В силу соотношения (14)

$$x^k\, v(x)\, w^{(n)}(x)=\begin{cases} (-1)^q\,\beta^n x^k \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,, & n=2q-1\,,\\ (-1)^q\,\beta^n x^k \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,, & n=2q\,, \end{cases}$$

следовательно,

$$\left\| x^k\, v\, w^{(n)} \right\| = \begin{cases} |\beta|^n P_{\alpha,\beta,k}\,, & n=2q-1\,,\\ |\beta|^n Q_{\alpha,\beta,k}\,, & n=2q\,. \end{cases} \tag{20}$$

Преобразуем сумму $S_1$. В силу равенств (13), (14)

$$x^k\, v^{(n-l)}(x)\, w^{(l)}(x)=\begin{cases} (-1)^r\,\alpha^{n-l}\,\beta^l x^k \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,, & l=2r-1\,,\\ (-1)^r\,\alpha^{n-l}\,\beta^l x^k \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,, & l=2r\,, \end{cases}$$

следовательно,

$$\left\| x^k\, v^{(n-l)}\, w^{(l)} \right\| = \begin{cases} |\alpha|^{n-l}|\beta|^l P_{\alpha,\beta,k}\,, \ l = 2r-1, \\ |\alpha|^{n-l}|\beta|^l Q_{\alpha,\beta,k}\,, \ l = 2r. \end{cases} \qquad (21)$$

Формула (21) является составной. Поэтому сумму $S_1$ надо представить в виде двух сумм, в одну из которых включить слагаемые с нечетными $l$, в другую слагаемые с четными $l$. Пределы суммирования в этих новых двух суммах будут определяться в зависимости от нечетности или четности $n$.

1.1. Пусть $n$ нечетно (это означает, что при решении задачи $H$ для функции вида (8) подбирается интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ нечетной степени).

Тогда, в силу равенства (21) сумма $S_1$ принимает вид

$$S_1 = \varphi_1(n,\alpha,\beta,k)\,, \qquad (22)$$

где

$$\varphi_1(n,\alpha,\beta,k) = P_{\alpha,\beta,k} \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2r-1}|\alpha|^{n-2r+1}|\beta|^{2r-1} + Q_{\alpha,\beta,k} \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2r}|\alpha|^{n-2r}|\beta|^{2r}. \qquad (23)$$

Преобразуем сумму $S_2$. В силу формулы (13)

$$x^{s+k-n}\, v^{(s)}(x)\, w(x) = \alpha^s x^{s+k-n} e^{\alpha x}\cos\beta x, \text{ следовательно, } \left\| x^{s+k-n}\, v^{(s)}\, w \right\| = |\alpha|^s Q_{\alpha,\beta,s+k-n}.$$

Тогда

$$S_2 = \varphi_2(n,\alpha,\beta,k)\,, \qquad (24)$$

где

$$\varphi_2(n,\alpha,\beta,k) = \sum_{s=n-k}^{n-1} C_n^s A_k^{n-s}|\alpha|^s Q_{\alpha,\beta,s+k-n}\,. \qquad (25)$$

Преобразуем суммы $S_3$, $S_4$. В силу равенства (14)

$$x^{s+k-n} v(x)\, w^{(s)}(x) = \begin{cases} (-1)^p \beta^s x^{s+k-n} e^{\alpha x}\sin\beta x\,, \ s = 2p-1, \\ (-1)^p \beta^s x^{s+k-n} e^{\alpha x}\cos\beta x\,, \ s = 2p, \end{cases}$$

следовательно,

$$\left\| x^{s+k-n} v\, w^{(s)} \right\| = \begin{cases} |\beta|^s P_{\alpha,\beta,s+k-n}\,, \ s = 2p-1, \\ |\beta|^s Q_{\alpha,\beta,s+k-n}\,, \ s = 2p. \end{cases}$$

Представим сумму $S_3$ в виде двух сумм, в одну из которых включим слагаемые с нечетными $s$, в другую слагаемые с четными $s$. Пределы суммирования в этих новых двух суммах будут определяться в зависимости от четности или нечетности $k$.

1.1.1. Пусть $n$ нечетно, $k$ четно (следовательно, $n-k$ нечетно).

Тогда

$$S_3 = \varphi_3(n,\alpha,\beta,k)\,, \qquad (26)$$

где

$$\varphi_3(n,\alpha,\beta,k) = \sum_{p=\frac{n-k+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2p-1} A_k^{n-2p+1} |\beta|^{2p-1} P_{\alpha,\beta,\ 2p-1+k-n} +$$

$$+ \sum_{p=\frac{n-k+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2p} A_k^{n-2p} |\beta|^{2p} Q_{\alpha,\beta,\ 2p+k-n}. \quad (27)$$

Преобразуем сумму $S_4$. В силу формул (13), (14)

$$x^{s+k-n} v^{(s-l)}(x)\, w^{(l)}(x) = \begin{cases} (-1)^r \alpha^{s-l} \beta^l x^{s+k-n} \mathrm{e}^{\alpha x} \sin\beta x,\ l = 2r-1, \\ (-1)^r \alpha^{s-l} \beta^l x^{s+k-n} \mathrm{e}^{\alpha x} \cos\beta x,\ l = 2r, \end{cases}$$

следовательно,

$$\left\| x^{s+k-n} v^{(s-l)}\, w^{(l)} \right\| = \begin{cases} |\alpha|^{s-l} |\beta|^l P_{\alpha,\beta,\, s+k-n},\ l = 2r-1, \\ |\alpha|^{s-l} |\beta|^l Q_{\alpha,\beta,\, s+k-n},\ l = 2r. \end{cases}$$

Тогда

$$S_4 = \varphi_4(n,\alpha,\beta,k), \quad (28)$$

где

$$\varphi_4(n,\alpha,\beta,k) = \sum_{p=\frac{n-k+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2p-1} A_k^{n-2p+1} \Big[ P_{\alpha,\beta,\ 2p-1+k-n} \sum_{r=1}^{p-1} C_{2p-1}^{2r-1} |\alpha|^{2(p-r)} |\beta|^{2r-1} +$$

$$+ Q_{\alpha,\beta,\ 2p-1+k-n} \sum_{r=1}^{p-1} C_{2p-1}^{2r} |\alpha|^{2p-1-2r} |\beta|^{2r} \Big] +$$

$$+ \sum_{p=\frac{n-k+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2p} A_k^{n-2p} \Big[ P_{\alpha,\beta,\ 2p+k-n} \sum_{r=1}^{p} C_{2p}^{2r-1} |\alpha|^{2p-2r+1} |\beta|^{2r-1} +$$

$$+ Q_{\alpha,\beta,\ 2p+k-n} \sum_{r=1}^{p-1} C_{2p}^{2r} |\alpha|^{2(p-r)} |\beta|^{2r} \Big]. \quad (29)$$

Из соотношений (18) – (20), (22), (24), (26), (28) получаем оценку вида

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le \Phi(n,\alpha,\beta,k), \quad (30)$$

где

$$\Phi(n,\alpha,\beta,k) = |\alpha|^n Q_{\alpha,\beta,\ k} + |\beta|^n P_{\alpha,\beta,\ k} + \varphi_1(n,\alpha,\beta,k) +$$

$$+ \varphi_2(n,\alpha,\beta,k) + \varphi_3(n,\alpha,\beta,k) + \varphi_4(n,\alpha,\beta,k).$$

Из оценок (7), (30) следует, что при нечетном $n$ и четном $k$ для выполнения условия (6) достаточно, чтобы $n$ удовлетворяло неравенству

$$\frac{(b-a)^n\, 2^{1-2n}}{n\,!}\,\Phi(n,\alpha,\beta,k)\le\delta_0\,. \tag{31}$$

1.1.2. Пусть $n$ нечетно, $k$ нечетно (следовательно, $n-k$ четно).

Тогда

$$S_3=\varphi_3^*(n,\alpha,\beta,k)\,, \tag{32}$$

где $\varphi_3^*(n,\alpha,\beta,k)$ задается тем же выражением, что и $\varphi_3(n,\alpha,\beta,k)$ (см. формулу (27)), только нижний предел суммирования $p=\dfrac{n-k+1}{2}$ в обеих суммах надо заменить в первой сумме на $p=\dfrac{n-k}{2}+1$, во второй на $p=\dfrac{n-k}{2}$. Сумма $S_4$ приводится к виду

$$S_4=\varphi_4^*(n,\alpha,\beta,k)\,, \tag{33}$$

где $\varphi_4^*(n,\alpha,\beta,k)$ задается тем же выражением, что и $\varphi_4(n,\alpha,\beta,k)$ (см. формулу (29)), только нижний предел суммирования $p=\dfrac{n-k+1}{2}$ в обеих внешних суммах надо заменить в первой сумме на $p=\dfrac{n-k}{2}+1$, во второй на $p=\dfrac{n-k}{2}$. В силу соотношений (18) – (20), (22), (24), (32), (33) справедлива оценка вида

$$\left\|f^{(n)}\right\|\le\Phi^*(n,\alpha,\beta,k)\,, \tag{34}$$

где

$$\Phi^*(n,\alpha,\beta,k)=|\alpha|^n Q_{\alpha,\beta,\,k}+|\beta|^n P_{\alpha,\beta,\,k}+\varphi_1(n,\alpha,\beta,k)+$$

$$+\varphi_2(n,\alpha,\beta,k)+\varphi_3^*(n,\alpha,\beta,k)+\varphi_4^*(n,\alpha,\beta,k).$$

Из оценок (7), (34) следует, что при нечетном $n$ и нечетном $k$ для выполнения условия (6) достаточно, чтобы $n$ удовлетворяло неравенству

$$\frac{(b-a)^n\, 2^{1-2n}}{n\,!}\,\Phi^*(n,\alpha,\beta,k)\le\delta_0\,. \tag{35}$$

1.2. Пусть $n$ четно (это означает, что при решении задачи $H$ для функции вида (8) подбирается интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ четной степени).

Преобразуем правую часть неравенства (18). Для первого слагаемого справедливо равенство (19). В силу формулы (20)

$$\left\|x^k\, v\, w^{(n)}\right\|=|\beta|^n Q_{\alpha,\beta,k}\,. \tag{36}$$

Сумма $S_1$ имеет вид

$$S_1=\varphi_1^{**}(n,\alpha,\beta,k)\,, \tag{37}$$

где $\varphi_1^{**}(n,\alpha,\beta,k)$ задается тем же выражением, что и $\varphi_1(n,\alpha,\beta,k)$ (см. формулу (23)), только верхний предел суммирования $\frac{n-1}{2}$ в обеих суммах надо заменить в первой сумме на $\frac{n}{2}$, во второй на $\frac{n}{2}-1$. Сумма $S_2$ определяется формулой (24). Преобразуем суммы $S_3$, $S_4$.

1.2.1. Пусть $n$ четно, $k$ четно (следовательно, $n-k$ четно). Тогда

$$S_3 = \varphi_3^{**}(n,\alpha,\beta,k), \tag{38}$$

где $\varphi_3^{**}(n,\alpha,\beta,k)$ задается тем же выражением, что и $\varphi_3^{*}(n,\alpha,\beta,k)$, только верхний предел суммирования $\frac{n-1}{2}$ в обеих суммах надо заменить в первой сумме на $\frac{n}{2}$, во второй на $\frac{n}{2}-1$. Сумма $S_4$ приводится к виду

$$S_4 = \varphi_4^{**}(n,\alpha,\beta,k), \tag{39}$$

где $\varphi_4^{**}(n,\alpha,\beta,k)$ задается тем же выражением, что и $\varphi_4^{*}(n,\alpha,\beta,k)$, только верхний предел суммирования $\frac{n-1}{2}$ в обеих внешних суммах надо заменить в первой сумме на $\frac{n}{2}$, во второй на $\frac{n}{2}-1$. Из соотношений (18), (19), (24), (36) – (39) следует оценка вида

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le \Phi^{**}(n,\alpha,\beta,k), \tag{40}$$

где

$$\Phi^{**}(n,\alpha,\beta,k) = \left(|\alpha|^n + |\beta|^n\right) Q_{\alpha,\beta,k} + \varphi_1^{**}(n,\alpha,\beta,k) +$$

$$+ \varphi_2(n,\alpha,\beta,k) + \varphi_3^{**}(n,\alpha,\beta,k) + \varphi_4^{**}(n,\alpha,\beta,k).$$

Из оценок (7), (40) следует, что при четном $n$ и четном $k$ для выполнения условия (6) достаточно, чтобы $n$ удовлетворяло неравенству

$$\frac{(b-a)^n\, 2^{1-2n}}{n!} \Phi^{**}(n,\alpha,\beta,k) \le \delta_0 . \tag{41}$$

1.2.2. Пусть $n$ четно, $k$ нечетно (следовательно, $n-k$ нечетно). Тогда

$$S_3 = \varphi_3^{***}(n,\alpha,\beta,k), \tag{42}$$

где $\varphi_3^{***}(n,\alpha,\beta,k)$ задается тем же выражением, что и $\varphi_3^{**}(n,\alpha,\beta,k)$, только нижние пределы суммирования $p = \frac{n-k}{2}+1$ в первой сумме и $p = \frac{n-k}{2}$ во второй сумме надо заменить в обеих суммах на $p = \frac{n-k+1}{2}$. Сумма $S_4$ приводится к виду

$$S_4 = \varphi_4^{***}(n,\alpha,\beta,k), \tag{43}$$

где $\varphi_4^{***}(n,\alpha,\beta,k)$ задается тем же выражением, что и $\varphi_4^{**}(n,\alpha,\beta,k)$, только нижние пределы суммирования $p=\dfrac{n-k}{2}+1$ в первой внешней сумме и $p=\dfrac{n-k}{2}$ во второй внешней сумме надо заменить в обеих этих суммах на $p=\dfrac{n-k+1}{2}$.
Из соотношений (18), (19), (24), (36), (37), (42), (43) получаем оценку вида

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le \Phi^{***}(n,\alpha,\beta,k), \tag{44}$$

где

$$\Phi^{***}(n,\alpha,\beta,k) = \left(|\alpha|^n + |\beta|^n\right) Q_{\alpha,\beta,\,k} + \varphi_1^{**}(n,\alpha,\beta,k) +$$

$$+\varphi_2(n,\alpha,\beta,k) + \varphi_3^{***}(n,\alpha,\beta,k) + \varphi_4^{***}(n,\alpha,\beta,k).$$

Из оценок (7), (44) следует, что при четном $n$ и нечетном $k$ для выполнения условия (6) достаточно, чтобы $n$ удовлетворяло неравенству

$$\frac{(b-a)^n\, 2^{1-2n}}{n\,!}\, \Phi^{***}(n,\alpha,\beta,k) \le \delta_0\,. \tag{45}$$

2. Решим задачу $H$ для функции вида

$$f(x) = x^k e^{\alpha x} \sin\beta x \tag{46}$$

($\alpha \ne 0$, $\beta \ne 0$; $2 \le k \le \dfrac{m}{2}-1$ в случае четного $m$; $2 \le k \le \dfrac{m-1}{2}-1$ в случае нечетного $m$).

Запишем функцию $f(x)$ в виде $f(x) = u(x)\, v(x)\, h(x)$, где $u(x) = x^k$, $v(x) = e^{\alpha x}$, $h(x) = \sin\beta x$. Для производной $f^{(n)}(x)$ справедлива оценка, аналогичная оценке (18):

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le \left\| x^k\, v^{(n)}\, h \right\| + \left\| x^k\, v\, h^{(n)} \right\| + T_1 + T_2 + T_3 + T_4\,, \tag{47}$$

где

$$T_1 = \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l \left\| x^k\, v^{(n-l)} h^{(l)} \right\|;$$

$$T_2 = \sum_{s=n-k}^{n-1} C_n^s\, A_k^{n-s} \left\| x^{s+k-n} v^{(s)} h \right\|;$$

$$T_3 = \sum_{s=n-k}^{n-1} C_n^s A_k^{n-s} \left\| x^{s+k-n} v\, h^{(s)} \right\|;$$

$$T_4 = \sum_{s=n-k}^{n-1} C_n^s A_k^{n-s} \sum_{l=1}^{s-1} C_s^l \left\| x^{s+k-n} v^{(s-l)} h^{(l)} \right\|.$$

Преобразуем правую часть неравенства (47). Заметим, что

$$h^{(i)}(x)=\begin{cases}(-1)^{q+1}\beta^i\cos\beta x\,, & i=2q-1\,,\\ (-1)^q\beta^i\sin\beta x\,, & i=2q\,.\end{cases} \tag{48}$$

В силу равенства (13) $x^k\,v^{(n)}(x)\,h(x)=\alpha^n x^k e^{\alpha x}\sin\beta x$, следовательно,

$$\left\|x^k\,v^{(n)}\,h\right\|=|\alpha|^n P_{\alpha,\beta,k}\,. \tag{49}$$

В силу соотношения (48)

$$x^k\,v(x)\,h^{(n)}(x)=\begin{cases}(-1)^{q+1}\beta^n x^k e^{\alpha x}\cos\beta x\,, & n=2q-1\,,\\ (-1)^q\beta^n x^k e^{\alpha x}\sin\beta x\,, & n=2q\,,\end{cases}$$

следовательно,

$$\left\|x^k\,v\,h^{(n)}\right\|=\begin{cases}|\beta|^n Q_{\alpha,\beta,k}\,, & n=2q-1\,,\\ |\beta|^n P_{\alpha,\beta,k}\,, & n=2q\,.\end{cases} \tag{50}$$

Преобразуем сумму $T_1$. В силу равенств (13), (48)

$$x^k\,v^{(n-l)}(x)\,h^{(l)}(x)=\begin{cases}(-1)^{r+1}\alpha^{n-l}\beta^l x^k e^{\alpha x}\cos\beta x\,, & l=2r-1\,,\\ (-1)^r\alpha^{n-l}\beta^l x^k e^{\alpha x}\sin\beta x\,, & l=2r\,,\end{cases}$$

следовательно,

$$\left\|x^k\,v^{(n-l)}\,h^{(l)}\right\|=\begin{cases}|\alpha|^{n-l}|\beta|^l Q_{\alpha,\beta,k}\,, & l=2r-1\,,\\ |\alpha|^{n-l}|\beta|^l P_{\alpha,\beta,k}\,, & l=2r\,.\end{cases} \tag{51}$$

Представим сумму $T_1$ в виде двух сумм, в одну из которых включим слагаемые с нечетными $l$, в другую слагаемые с четными $l$. Пределы суммирования в этих новых двух суммах будут определяться в зависимости от нечетности или четности $n$.

2.1. Пусть $n$ нечетно.

Тогда, в силу равенства (51) сумма $T_1$ принимает вид

$$T_1=\psi_1(n,\alpha,\beta,k)\,, \tag{52}$$

где

$$\psi_1(n,\alpha,\beta,k)=Q_{\alpha,\beta,k}\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}C_n^{2r-1}|\alpha|^{n-2r+1}|\beta|^{2r-1}+P_{\alpha,\beta,k}\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}C_n^{2r}|\alpha|^{n-2r}|\beta|^{2r}\,. \tag{53}$$

Преобразуем сумму $T_2$. В силу формулы (13)

$$x^{s+k-n}\,v^{(s)}(x)\,h(x)=\alpha^s x^{s+k-n}e^{\alpha x}\sin\beta x\,,$$

следовательно,

$$\left\|x^{s+k-n}\,v^{(s)}\,h\right\|=|\alpha|^s P_{\alpha,\beta,s+k-n}\,.$$

Тогда

$$T_2=\psi_2(n,\alpha,\beta,k)\,, \tag{54}$$

где

$$\psi_2(n,\alpha,\beta,k)=\sum_{s=n-k}^{n-1} C_n^s\, A_k^{n-s}\left|\alpha\right|^s P_{\alpha,\beta,\,s+k-n}\,. \qquad (55)$$

Преобразуем суммы $T_3$, $T_4$. В силу равенства (48)

$$x^{s+k-n}v(x)\,h^{(s)}(x)=\begin{cases}(-1)^{p+1}\,\beta^s x^{s+k-n}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,, & s=2p-1\,,\\ (-1)^p\,\beta^s x^{s+k-n}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,, & s=2p\,,\end{cases}$$

следовательно,

$$\left\| x^{s+k-n} v\, h^{(s)}\right\|=\begin{cases}\left|\beta\right|^s Q_{\alpha,\beta,\,s+k-n}\,, & s=2p-1\,,\\ \left|\beta\right|^s P_{\alpha,\beta,\,s+k-n}\,, & s=2p.\end{cases} \qquad (56)$$

Представим сумму $T_3$ в виде двух сумм, в одну из которых включим слагаемые с нечетными $s$, в другую слагаемые с четными $s$. Пределы суммирования в этих новых двух суммах будут определяться в зависимости от четности или нечетности $k$.

2.1.1. Пусть $n$ нечетно, $k$ четно (следовательно, $n-k$ нечетно).

Тогда в силу равенства (56)

$$T_3=\psi_3(n,\alpha,\beta,k)\,, \qquad (57)$$

где

$$\psi_3(n,\alpha,\beta,k)=\sum_{p=\frac{n-k+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2p-1}A_k^{n-2p+1}\left|\beta\right|^{2p-1}Q_{\alpha,\beta,\,2p-1+k-n}+$$

$$+\sum_{p=\frac{n-k+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2p}A_k^{n-2p}\left|\beta\right|^{2p}P_{\alpha,\beta,\,2p+k-n}\,. \qquad (58)$$

Преобразуем сумму $T_4$. В силу формул (13), (48)

$$x^{s+k-n}v^{(s-l)}(x)\,h^{(l)}(x)=\begin{cases}(-1)^{r+1}\,\alpha^{s-l}\beta^l x^{s+k-n}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,, & l=2r-1\,,\\ (-1)^r\,\alpha^{s-l}\,\beta^l x^{s+k-n}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,, & l=2r\,,\end{cases}$$

следовательно,

$$\left\| x^{s+k-n}v^{(s-l)}\,h^{(l)}\right\|=\begin{cases}\left|\alpha\right|^{s-l}\left|\beta\right|^l Q_{\alpha,\beta,\,s+k-n}\,, & l=2r-1\,,\\ \left|\alpha\right|^{s-l}\left|\beta\right|^l P_{\alpha,\beta,\,s+k-n}\,, & l=2r.\end{cases} \qquad (59)$$

Тогда

$$T_4=\psi_4(n,\alpha,\beta,k)\,, \qquad (60)$$

где

$$\psi_4(n,\alpha,\beta,k)=\sum_{p=\frac{n-k+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2p-1}A_k^{n-2p+1}\Big[\;Q_{\alpha,\beta,\,2p-1+k-n}\sum_{r=1}^{p-1} C_{2p-1}^{2r-1}\left|\alpha\right|^{2(p-r)}\left|\beta\right|^{2r-1}+$$

$$+P_{\alpha,\beta,\ 2p-1+k-n}\sum_{r=1}^{p-1} C_{2p-1}^{2r}\ |\alpha|^{2p-1-2r}|\beta|^{2r}\ \Bigg]+$$

$$+\sum_{p=\frac{n-k+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2p}A_k^{n-2p}\Bigg[\ Q_{\alpha,\beta,\ 2p+k-n}\sum_{r=1}^{p} C_{2p}^{2r-1}\ |\alpha|^{2p-2r+1}|\beta|^{2r-1}+$$

$$+P_{\alpha,\beta,\ 2p+k-n}\sum_{r=1}^{p-1} C_{2p}^{2r}\ |\alpha|^{2(p-r)}|\beta|^{2r}\ \Bigg]. \tag{61}$$

Из соотношений (47), (49), (50), (52), (54), (57), (60) получаем оценку вида

$$\left\|f^{(n)}\right\| \le \Psi(n,\alpha,\beta,k)\ , \tag{62}$$

где

$$\Psi(n,\alpha,\beta,k)=|\alpha|^n P_{\alpha,\beta,\ k}+|\beta|^n Q_{\alpha,\beta,\ k}+\psi_1(n,\alpha,\beta,k)+$$

$$+\psi_2(n,\alpha,\beta,k)+\psi_3(n,\alpha,\beta,k)+\psi_4(n,\alpha,\beta,k).$$

Из оценок (7), (62) следует, что при нечетном $n$ и четном $k$ для выполнения условия (6) достаточно, чтобы $n$ удовлетворяло неравенству

$$\frac{(b-a)^n\,2^{1-2n}}{n\,!}\,\Psi(n,\alpha,\beta,k)\le\delta_0\ . \tag{63}$$

2.1.2. Пусть $n$ нечетно, $k$ нечетно (следовательно, $n-k$ четно).

Тогда

$$T_3=\psi_3^*(n,\alpha,\beta,k)\ , \tag{64}$$

где $\psi_3^*(n,\alpha,\beta,k)$ задается тем же выражением, что и $\psi_3(n,\alpha,\beta,k)$ (см. формулу (58)), только нижний предел суммирования $p=\dfrac{n-k+1}{2}$ в обеих суммах надо заменить в первой сумме на $p=\dfrac{n-k}{2}+1$, во второй на $p=\dfrac{n-k}{2}$. Сумма $T_4$ приводится к виду

$$T_4=\psi_4^*(n,\alpha,\beta,k)\ , \tag{65}$$

где $\psi_4^*(n,\alpha,\beta,k)$ задается тем же выражением, что и $\psi_4(n,\alpha,\beta,k)$ (см. формулу (61)), только нижний предел суммирования $p=\dfrac{n-k+1}{2}$ в обеих внешних суммах надо заменить в первой сумме на $p=\dfrac{n-k}{2}+1$, во второй на $p=\dfrac{n-k}{2}$. Из соотношений (47), (49), (50), (52), (54), (64), (65) следует оценка вида

$$\left\|f^{(n)}\right\| \le \Psi^*(n,\alpha,\beta,k)\ , \tag{66}$$

где

$$\Psi^*(n,\alpha,\beta,k)=|\alpha|^n P_{\alpha,\beta,k}+|\beta|^n Q_{\alpha,\beta,k}+\psi_1(n,\alpha,\beta,k)+$$

$$+\psi_2(n,\alpha,\beta,k)+\psi_3^*(n,\alpha,\beta,k)+\psi_4^*(n,\alpha,\beta,k).$$

Из оценок (7), (66) следует, что при нечетном $n$ и нечетном $k$ для выполнения условия (6) достаточно, чтобы $n$ удовлетворяло неравенству

$$\frac{(b-a)^n\, 2^{1-2n}}{n!}\Psi^*(n,\alpha,\beta,k)\le\delta_0\,. \tag{67}$$

2.2. Пусть $n$ четно.

Преобразуем правую часть неравенства (47). Для первого слагаемого справедливо равенство (49). В силу формулы (50)

$$\left\| x^k\, v\, h^{(n)}\right\| = |\beta|^n P_{\alpha,\beta,k}\,. \tag{68}$$

Преобразуем сумму $T_1$. В силу равенства (51)

$$T_1=\psi_1^{**}(n,\alpha,\beta,k)\,, \tag{69}$$

где $\psi_1^{**}(n,\alpha,\beta,k)$ задается тем же выражением, что и $\psi_1(n,\alpha,\beta,k)$ (см. формулу (53)), только верхний предел суммирования $\frac{n-1}{2}$ в обеих суммах надо заменить в первой сумме на $\frac{n}{2}$, во второй на $\frac{n}{2}-1$. Сумма $T_2$ задается формулой (54). Преобразуем суммы $T_3$, $T_4$.

2.2.1. Пусть $n$ четно, $k$ четно (следовательно, $n-k$ четно).

В силу равенства (56)

$$T_3=\psi_3^{**}(n,\alpha,\beta,k)\,, \tag{70}$$

где $\psi_3^{**}(n,\alpha,\beta,k)$ задается тем же выражением, что и $\psi_3^*(n,\alpha,\beta,k)$, только верхний предел суммирования $\frac{n-1}{2}$ в обеих суммах надо заменить в первой сумме на $\frac{n}{2}$, во второй на $\frac{n}{2}-1$.

В силу формулы (59)

$$T_4=\psi_4^{**}(n,\alpha,\beta,k)\,, \tag{71}$$

где $\psi_4^{**}(n,\alpha,\beta,k)$ задается тем же выражением, что и $\psi_4^*(n,\alpha,\beta,k)$, только верхний предел суммирования $\frac{n-1}{2}$ в обеих внешних суммах надо заменить в первой сумме на $\frac{n}{2}$, во второй на $\frac{n}{2}-1$. В силу соотношений (47), (49), (54), (68) – (71) справедлива оценка

$$\left\| f^{(n)}\right\|\le\Psi^{**}(n,\alpha,\beta,k)\,, \tag{72}$$

где

$$\Psi^{**}(n,\alpha,\beta,k)=\left(|\alpha|^n+|\beta|^n\right)P_{\alpha,\beta,\,k}+\psi_1^{**}(n,\alpha,\beta,k)+$$

$$+\psi_2(n,\alpha,\beta,k)+\psi_3^{**}(n,\alpha,\beta,k)+\psi_4^{**}(n,\alpha,\beta,k).$$

Из оценок (7), (72) следует, что при четном $n$ и четном $k$ для выполнения условия (6) достаточно, чтобы $n$ удовлетворяло неравенству

$$\frac{(b-a)^n\,2^{1-2n}}{n\,!}\Psi^{**}(n,\alpha,\beta,k)\le\delta_0\,. \tag{73}$$

2.2.2. Пусть $n$ четно, $k$ нечетно (следовательно, $n-k$ нечетно).

С помощью формулы (56) сумма $T_3$ приводится к виду

$$T_3=\psi_3^{***}(n,\alpha,\beta,k)\,, \tag{74}$$

где $\psi_3^{***}(n,\alpha,\beta,k)$ задается тем же выражением, что и $\varphi_3^{**}(n,\alpha,\beta,k)$, только нижние пределы суммирования $p=\frac{n-k}{2}+1$ и $p=\frac{n-k}{2}$ соответственно в первой и второй суммах заменяются в обоих случаях на $p=\frac{n-k+1}{2}$. Сумма $T_4$ с помощью формулы (59) приводится к виду

$$T_4=\psi_4^{***}(n,\alpha,\beta,k)\,, \tag{75}$$

где $\psi_4^{***}(n,\alpha,\beta,k)$ задается тем же выражением, что и $\psi_4^{**}(n,\alpha,\beta,k)$, только нижние пределы суммирования $p=\frac{n-k}{2}+1$ и $p=\frac{n-k}{2}$ соответственно в первой и второй внешней суммах заменяются в обоих случаях на $p=\frac{n-k+1}{2}$. В силу соотношений (47), (49), (54), (68), (69), (74), (75) справедлива оценка

$$\left\|f^{(n)}\right\|\le\Psi^{***}(n,\alpha,\beta,k)\,, \tag{76}$$

где

$$\Psi^{***}(n,\alpha,\beta,k)=\left(|\alpha|^n+|\beta|^n\right)P_{\alpha,\beta,\,k}+\psi_1^{**}(n,\alpha,\beta,k)+$$

$$+\psi_2(n,\alpha,\beta,k)+\psi_3^{***}(n,\alpha,\beta,k)+\psi_4^{***}(n,\alpha,\beta,k).$$

Из оценок (7), (76) следует, что при четном $n$ и нечетном $k$ для выполнения условия (6) достаточно, чтобы $n$ удовлетворяло неравенству

$$\frac{(b-a)^n\,2^{1-2n}}{n\,!}\Psi^{***}(n,\alpha,\beta,k)\le\delta_0\,. \tag{77}$$

Результаты настоящей работы приводят к следующим выводам.

Если подбирается интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$, интерполирующий функцию вида (8) или вида (46) на отрезке $[a,b]$ с заданной точностью $\delta_0$, то в качестве его степени достаточно взять:

1) в случае четности $k$ и нечетности $n$ минимальное нечетное значение $n$, удовлетворяющее для функции вида (8) неравенству (31), для функции вида (46) неравенству (63);

2) в случае нечетности $k$ и нечетности $n$ минимальное нечетное значение $n$, удовлетворяющее для функции вида (8) неравенству (35), для функции вида (46) неравенству (67);

3) в случае четности $k$ и четности $n$ минимальное четное значение $n$, удовлетворяющее для функции вида (8) неравенству (41), для функции вида (46) неравенству (73);

4) в случае нечетности $k$ и четности $n$ минимальное четное значение $n$, удовлетворяющее для функции вида (8) неравенству (45), для функции вида (46) неравенству (77).

Как уже отмечалось в работе [2], задача интерполяции решений линейного неоднородного дифференциального уравнения $m$-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида сводится к интерполяции функций из класса $K$, определяемого функциями (2) – (5).

*Список литературы*

1. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1967. – 564 с.

2. Фомин, В. И. Об интерполяции решений линейных дифференциальных уравнений / В. И. Фомин // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2018. – Т. 24, № 2. – С. 326 – 336. doi: 10.17277/vestnik.2018.02.pp.326-336

3. Бахвалов, Н. С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) / Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 1973. – 832 с.

4. Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2-х ч. Ч. 1. Учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 7-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 648 с.

5. Фомин, В. И. Формула Лейбница для $m$-й производной произведения нескольких функций / В. И. Фомин // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Междунар. конф. : Воронежская зимняя математическая школа (26 января – 01 февраля 2017 г.). – Воронеж, 2017. – С. 205.

---

## Interpolation of Solutions of Linear Differential Equations in the Case of Multiple Complex Roots of the Characteristic Polynomial

**V. I. Fomin**

*Department of Technical Mechanics and Machine Parts, TSTU, Tambov, Russia; vasiliyfomin@bk.ru*

**Keywords:** Lagrange interpolation polynomial; multiple complex roots; Leibniz's generalized formula; fundamental decision system; characteristic polynomial.

**Abstract:** It is shown how to choose the degree of the Lagrange interpolation polynomial r to carry out interpolation on a given interval with a given accuracy of solutions of a linear homogeneous differential equation with constant coefficients in the case of multiple complex roots of its characteristic polynomial.

*References*

1. Matveyev N.M. *Metody integrirovaniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Methods of integration of ordinary differential equations], Moscow: Vysshaya shkola, 1967, 564 p. (In Russ.)

2. Fomin V.I. [On interpolation of solutions of linear differential equations], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 326-336, doi: 10.17277/vestnik.2018.02.pp.326-336 (In Russ., abstract in Eng.)

3. Bakhvalov N.S. *Chislennyye metody (analiz, algebra, obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya)* [Numerical Methods (Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations)], Moscow: Nauka, 1973, 632 p. (In Russ.)

4. Il'in V.A., Poznyak E.G. *Osnovy matematicheskogo analiza: part. 1. Uchebnik dlya vuzov* [Fundamentals of mathematical analysis: part. 1. Textbook. for the universities], Moscow: FIZMATLIT, 2005, 648 p. (In Russ.)

5. Fomin V.I. *Sovremennyye metody teorii funktsiy i smezhnyye problemy: materialy Mezhdunarodnoy konferentsii: Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola* [Modern methods of the theory of functions and adjacent problems: materials of the International Conference: Voronezh Winter Mathematical School], 26 January – 1 February, 2017, Voronezh, 2017, p. 205. (In Russ.)

---

## Über die Interpolation der linearen Lösungen der Differentialgleichungen bei vielfachen komplexen Wurzeln des charakteristischen Polynoms

**Zusammenfassung:** Es wird gezeigt, wie der Grad der Lagrange-Interpolation gewählt werden soll, um die Interpolation in einem bestimmten Intervall mit einer bestimmten Genauigkeit der Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten im Falle von vielfachen komplexen Wurzeln seines charakteristischen Polynoms durchzuführen.

---

## Sur l'interpolation des solutions des équations différentielles linéaires dans le cas de multiples racines complexes du polynôme caractéristique

**Résumé:** Est montré comment choisir le degré d'interpolation du polygone Lagrangien pour effectuer une interpolation à un intervalle donné avec la précision donnée des solutions de l'équation différentielle homogène linéaire avec des coefficients constants dans le cas de multiples racines complexes de son polynôme caractéristique.

---

**Автор:** ***Фомин Василий Ильич*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Техническая механика и детали машин», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.

**Рецензент:** ***Жуковский Евгений Семёнович*** – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института физики, математики и информатики, ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина», г. Тамбов, Россия.