УДК 621.396.96
DOI: 10.17277/vestnik.2019.02.pp.250-255

АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИКИ

Е. И. Алгазин

*Кафедра «Электроника и электротехника»,
ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет»,
г. Новосибирск, Россия; evgeniialgazin@gmail.com*

Ключевые слова: электрическая цепь, апериодический режим, колебательный разряд конденсатора, собственное время электрической цепи.

Аннотация: Предложена временно-энергетическая модель цепи R–L–C с заряженным конденсатором до напряжения U_0. На ее основе предложено описание режимов функционирования электрических цепей автоматики в области времени. Для каждого режима получены свойственные этому режиму наборы собственных чисел и собственных векторов метрического тензора, составленного из матрицы описания цепи R–L–C в области времени. Проведена интерпретация базиса собственных векторов и соответствующих им собственных чисел.

Введение

При составлении степенного алгоритмического уравнения корни в области времени не удовлетворяют решению характеристического уравнения, полученного на основе дифференциального уравнения, описывающего исследуемую цепь. Также корни характеристического уравнения при переходе к постоянной времени не являются решениями степенного алгебраического уравнения в области времени [1].

В статье проанализированы режимы работы цепей R–L–C. Если прежние подходы и методы позволяли получить описание режимов работы электрических цепей на основе анализа корней степенного алгебраического уравнения, то в данной работе представлена временно-энергетическая модель цепи R–L–C без источника питания и описаны элементы данной модели. Такой подход позволяет оценить состояние электрической цепи в области времени.

Постановка задачи

Рассмотрим электрическую цепь из последовательного соединения R–L–C элементов без источника питания. Конденсатор до момента коммутации заряжен до напряжения U_0 [2]. После коммутации необходимо рассмотреть два режима в области времени: апериодический и колебательный. Для этого необходимо предложить способ оценки состояния электрической цепи в области времени, основанный на временно-энергетической модели цепи R–L–C без источника питания. На основе предложенной временно-энергетической модели перейти к тензорному описанию реакции цепи R–L–C на наличие энергии в цепи в области времени. На основе тензорного описания получить набор собственных чисел и соответствующих им собственных векторов с последующей интерпретацией полученных результатов.

Пути решения

Предложена геометрическая интерпретация временно-энергетической модели, по сути отображающая реакцию цепи R–L–C без источника питания с предварительно заряженным конденсатором (рис. 1).

Рассмотрен режим колебательного разряда конденсатора как наиболее сложный. Будем полагать, что положительное направление оси времени соответствует передаче энергии в конденсатор. Все значения времени нормированы на T_0 – собственное время цепи, то есть время, пока в системе R–L–C есть энергия.

Для аналитического описания временно-энергетической модели используется представление временных векторов в виде

$$t(E)=\sum_{i=1}^{N} t_{i\overline{\Psi}}\overline{\Psi}_i(E),\ i=1,\ldots,N, \tag{1}$$

где $t(E)$ – значение координаты времени в зависимости от энергии E; $t_{i\overline{\Psi}}$ – матрица-строка коэффициентов разложения; $\overline{\Psi}_i(E)$ – используемое преобразование.

Представим выходной вектор времени в виде

$$t_{\text{вых}}(E)=\sum_{i=1}^{N} t_{i\overline{\Psi}}T\left[\overline{\Psi}_i(E)\right]=\sum_{i=1}^{N} t_{i\overline{\Psi}}\varphi_i(E), \tag{2}$$

где T – линейный оператор, описывающий преобразование $\overline{\Psi}_i(E)$ в $\varphi_i(E)$.

В нашем случае, когда базисные функции $\overline{\Psi}_i(E)$ отличаются только сдвигом, матрица, соответствующая линейному оператору T, будет иметь ленточную теплицеву структуру

$$T=\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_N & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & t_1 & t_2 & \ldots & t_N & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & t_1 & t_2 & \ldots & t_N \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Матрица T, по сути, является матрицей, описывающей поведение электрической цепи. Вектор времени $t_1, t_2, \ldots, t_N$ является реакцией на воздействие энергии,

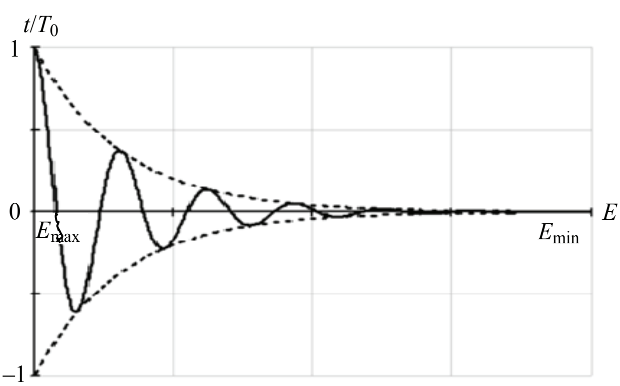


Рис. 1. Геометрическая интерпретация временно-энергетической модели R–L–C цепи без источника питания

запасенной в виде заряда в конденсаторе емкостью C. Эта реакция рассматривается в области времени.

Метрический тензор будет равен

$$Z = TT^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

Полученные для Z наборы собственных чисел и собственных векторов имеют следующий физический смысл: собственные числа матрицы метрического тензора задают на гиперплоскости представления временно-энергетической модели, линейные масштабы вдоль направлений ее собственных векторов.

Собственный вектор с наибольшим собственным числом вносит наибольший вклад в описание временно-энергетической модели матрицей T и соответствующего этой модели вектора времени.

Результаты

По нашему условию период колебаний энергии и период колебаний параметра процесса совпадают между собой. Рассмотрим вначале колебательный режим.

Пусть сопротивление цепи R = 2 Ом, емкость С = 1 Ф, индуктивность L = 6 Гн, напряжение предварительно заряженного конденсатора $U_0 = 100$ В.

Для указанных параметров цепи R–L–C значения корней характеристического уравнения равны:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}; \tag{5}$$

$$p_1 = -0{,}166 + 0{,}37j;\ p_2 = -0{,}166 - 0{,}37j,$$

где j – мнимая единица.

Поскольку два корня являются комплексно-сопряженными, в цепи будет колебательный режим

$$\alpha_1 = \frac{R}{2L},\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};\ \omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_1^2}, \tag{6}$$

где α_1 – декремент затухания; ω_0 – резонансная частота, являющаяся собственной частотой незатухающих колебаний; $\omega_{\text{св}}$ – угловая частота собственных затухающих или свободных колебаний контура.

Тогда период собственных или свободных колебаний контура определяется по формуле

$$T_{\text{св}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{св}}}. \tag{7}$$

Период колебаний энергии равен

$$E_{\text{св}} = E(0) - E(T_{\text{св}}), \tag{8}$$

где $E(T_{\text{св}}) = E_C(T_{\text{св}}) + E_L(T_{\text{св}}) + E_R(T_{\text{св}})$, $E_C(T_{\text{св}})$ – энергия конденсатора в момент $T_{\text{св}}$; $E_L(T_{\text{св}})$ – энергия индуктивности в момент $T_{\text{св}}$; $E_R(T_{\text{св}})$ – энергия потерь за время $0...T_{\text{св}}$.

Для колебательного режима элемент матрицы T описывается следующим образом

$$tk_i^{(1)}(E) = T_0 \mathrm{e}^{-\frac{\alpha(E_{\max} - i\Delta E)}{E_1}} \cos\left(2\pi \frac{\alpha(E_{\max} - i\Delta E)}{E_1}\right), \tag{9}$$

где T_0 – собственные колебания цепи R–L–C; α – коэффициент затухания; $E_{\max}$ – максимальное значение энергии в цепи; ΔE – шаг убывания энергии от максимального значения к минимальному; E_1 – период колебания энергии в цепи.

Для апериодического режима элемент матрицы T описывается следующим образом

$$ta_i^{(1)}(E) = T_0 \mathrm{e}^{-\frac{\alpha(E_{\max} - i\Delta E)}{E_1}}. \tag{10}$$

В обоих случаях нормируем на T_0.

Для апериодического режима $R = 2$ Ом, $C = 1$ Ф, $L = 0{,}25$ Гн, $U_0 = 100$ В.

Для второго случая элемент матрицы T (колебательный режим) представлен уравнением

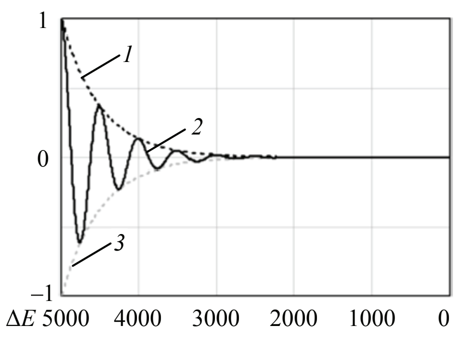
$$tk_i^{(2)}(E) = T_0 \mathrm{e}^{\left(1 - \frac{E_{\max}}{E_{\max} - i\Delta E + 1} - \frac{E_{\min}}{E_{\max} - i\Delta E + 1}\right)} \cos\left(2\pi \frac{\alpha(E_{\max} - i\Delta E)}{E_1}\right); \tag{11}$$

апериодический режим

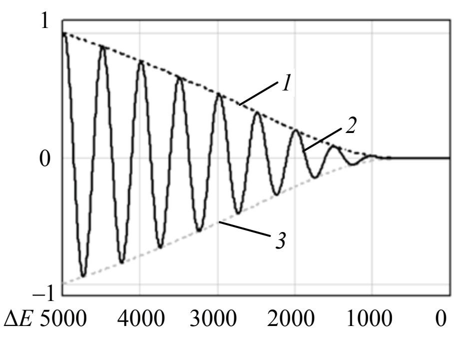
$$ta_i^{(2)}(E) = T_0 \mathrm{e}^{\left(1 - \frac{E_{\max}}{E_{\max} - i\Delta E + 1} - \frac{E_{\min}}{E_{\max} - i\Delta E + 1}\right)}. \tag{12}$$

На рисунке 2 приведены геометрические интерпретации временно-энергетических моделей R–L–C цепи без источника питания при колебательном и апериодическом режимах для первого и второго случаев, где $tk_i^{(1)}$, $ta_i^{(1)}$ и $tk_i^{(2)}$, $ta_i^{(2)}$ – колебательные и апериодические режимы соответственно для первого и второго случаев, представленные аналитическими выражениями (9) – (12).

Результаты моделирования в виде значения первого (максимального) собственного числа и соответствующего ему первого собственного вектора сведены в табл. 1.



а)



б)

Рис. 2. Геометрические интерпретации временно-энергетической модели R–L–C цепи без источника питания для первого (*а*) и второго (*б*) случаев колебательного и апериодического режимов:

а: *1* – $ta_i^{(1)}$; *2* – $\left(-ta_i^{(1)}\right)$; *3* – $tk_i^{(1)}$; *б*: *1* – $ta_i^{(2)}$; *2* – $\left(-ta_i^{(2)}\right)$; *3* – $tk_i^{(2)}$

Таблица 1

Результаты моделирования в виде значения первого (максимального) собственного числа и соответствующего ему первого собственного вектора

Собст-венное число	Собственный вектор									
Колебательный режим (9)										
1,512	–0,274	–0,215	–0,208	0,511	0,274	–0,274	–0,511	0,208	0,215	0,274
Апериодический режим (10)										
2,349	0,16	0,251	0,325	0,377	0,404	0,404	0,377	0,325	0,251	0,16
Колебательный режим (11)										
6,731	–0,329	–0,235	0,192	0,483	0,258	–0,258	–0,483	–0,192	0,235	0,329
Апериодический режим (12)										
16,71	0,212	0,272	0,323	0,362	0,382	0,382	0,362	0,323	0,272	0,212

На основании результатов моделирования видно, что амплитуда и знак отсчета времени собственного вектора указывают на величину и направление перемещения энергии между емкостью и индуктивностью для каждого текущего значения энергии за определенное время до ее полного исчерпания.

Выводы

Нормированный вектор времени $t_1, t_2, ..., t_N$ адекватно описывает реакцию R–L–C цепи в области времени при наличии в ней энергии, запасенной в реактивных элементах.

Достоинства временно-энергетической модели состоят в наглядности ее геометрической интерпретации и простоте аналитического описания. Кроме того, временно-энергетическая модель позволяет использовать инструмент собственных векторов, что дает дополнительную информацию об изучаемой цепи R–L–C, то есть расширяет и дополняет анализ состояния цепи R–L–C.

Предложенные в обоих случае модели позволяют с достаточной точностью оценить процессы, происходящие в R–L–C цепи без источника питания.

Список литературы

1. Алгазин, Е. И. Энергетический критерий устойчивости линейных систем автоматики / Е. И. Алгазин // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2018. – Т. 24, № 2. – С. 210 – 215. doi: 10.17277/vestnik.2018.02.pp.210-215

2. Веселовский, О. Н. Основы электротехники и электротехнические устройства радиоэлектронной аппаратуры : учебное пособие для вузов / О. Н. Веселовский, Л. М. Брославский. – М. : Высшая школа, 1977. – 312 с.

Analysis of the State of Linear Automation Systems

E. I. Algazin

Department of Electronics and Electrical Engineering,
Novosibirsk State Technical University,
Novosibirsk, Russia; evgeniialgazin@gmail.com

Keywords: electric circuit; aperiodic mode; oscillatory discharge of a capacitor; proper time of an electrical circuit.

Abstract: A time-energy model of the R–L–C circuit with a charged capacitor up to a voltage of U_0 is proposed. On its basis, a description of the modes of operation of electrical circuits of automation in the time domain is proposed. For each mode, sets of eigenvalues and eigenvectors of the metric tensor made up of the R–L–C circuit description matrix in the time domain, characteristic of this mode, are obtained. The interpretation of the basis of eigenvectors and the corresponding eigenvalues is carried out.

References

1. Algazin Ye.I. [Energy criterion for the stability of linear automation systems], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 210-215, doi: 10.17277/vestnik.2018.02.pp.210-215 (In Russ., abstract in Eng.)

2. Veselovskiy O.N., Broslavskiy L.M. *Osnovy elektrotekhniki i elektrotekhnicheskiye ustroystva radioelektronnoy apparatury: uchebnoye posobiye dlya vuzov* [Basics of Electrical Engineering and Electrotechnical Devices of Electronic Equipment: a textbook for universities], Moscow: Vysshaya shkola, 1977, 312 p. (In Russ.)

Analyse des Zustands linearer Automatisierungssysteme

Zusammenfassung: Es ist ein zeitlich energetisches Modell der RLC-Kette mit einem geladenen Kondensator bis zur Spannung U_0 vorgeschlagen. Auf dessen Grundlage sind die Funktionsweisen der elektrischen Automatisierungsschaltungen im Zeitbereich beschrieben. Für jeden Modus sind bestimmte Sätze von Eigenwerten und Eigenvektoren des metrischen Tensors erhalten, der aus der Matrix der Beschreibung der RLC-Kette im Zeitbereich zusammengestellt ist. Die Interpretation der Basis von Eigenvektoren und der entsprechenden Eigenwerte ist durchgeführt.

Analyse de l'état des systèmes linéaires d'automatisation

Résumé: Est proposé le modèle temporaire énergétique du circuit R–L–C avec le condensateur chargé jusqu'à la tension U_0. A sa base, est proposée une description des modes du fonctionnement des circuits électriques de l'automatisation dans la zone temporelle. Pour chaque régime, sont obtenus des ensembles de nombres et de vecteurs de tenseur métrique propres à ce mode de la matrice de la description du circuit R–L–C dans la zone de temps.Est effectuée l'interprétation de la base de ses propres vecteurs et des propres nombres correspondants.

Автор: ***Алгазин Евгений Игоревич*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Электроника и электротехника», ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет», г. Новосибирск, Россия.

Рецензент: ***Разинкин Владимир Павлович*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Теоретические основы радиотехники», ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет», г. Новосибирск, Россия.