УДК 517.927.2
DOI: 10.17277/vestnik.2018.04.pp.684-697

ИДЕНТИФИКАЦИЯ РАСПАДАЮЩИХСЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

А. М. Ахтямов, Р. Ю. Галимов

Кафедра «Математическое моделирование»,
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»,
г. Уфа, Республика Башкортостан, Россия; GalimovRY@mail.ru

Ключевые слова: задача Штурма–Лиувилля; идентификация краевых условий; обратная спектральная задача; собственные значения.

Аннотация: Рассмотрен вопрос идентификации распадающихся краевых условий задачи Штурма–Лиувилля по ее собственным значениям. Применены два метода идентификации краевых условий – неопределенной системы (метод миноров) и сравнения целых функций. В методе миноров используются только либо два, либо три собственных значения. Однако метод не позволяет ответить на фундаментальный вопрос: для каких классов обыкновенных дифференциальных уравнений и спектральных задач однозначно восстанавливаются виды и параметры краевых условий. Для ответа на данный вопрос использован метод сравнения целых функций. Показано, что в случае несимметрического потенциала задача идентификации краевых условий по всем собственным значениям имеет единственное решение, а в случае симметрического – два решения; при определенных условиях единственное решение может быть получено с использованием только трех собственных значений. Два решения могут быть получены с использованием только двух собственных значений.

Введение

На практике часто возникает задача диагностирования видов и параметров закрепления стержней и струн для того, чтобы определить, не нарушились ли заложенные в проект граничные условия. Кроме того, задача идентификации краевых условий важна при создании безопасных для здоровья человека технических систем. Это связано с тем, что некоторые частоты (инфразвуковые) находятся в опасном для здоровья человека диапазоне частот. Они совпадают с частотами важных органов человека – сердца, почек и т.п. Известно, что воздействие инфразвуковых колебаний на определенной частоте может вызвать остановку сердца человека. Инфразвуковые частоты ухудшают самочувствие человека, могут вызывать недомогание и даже панические настроения. Поэтому при создании соответствующих технических систем со струнами и стержнями важно уходить от инфразвуковых частот, которые попадают в резонанс с частотами важных органов человека. Изложенные факты требуют создания таких закреплений элементов технических систем, которые давали бы нужный безопасный диапазон частот колебаний основных деталей. В математической постановке обе задачи (диагностирования и ухода от опасных частот) сводятся к задаче идентификации краевых условий по заданным собственным значениям.

Обозначим через L следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y = s^2 y; \tag{1}$$

$$U_1(y) = a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) = 0; \tag{2}$$

$$U_2(y) = a_{23}y(\pi) = a_{24}y'(\pi) = 0, \tag{3}$$

где $q(x) \in L_1(0, \pi)$ – вещественная функция; a_{ij}, $i = 1,2$, $j = 1\ldots4$ – комплексные постоянные.

Близкие обратные задачи рассматривались в теории обратной задачи Штурма–Лиувилля, где по двум (нескольким спектрам) требуется восстановить потенциал $q(x)$ и краевые условия (2), (3). Обратная задача Штурма–Лиувилля для L с распадающимися краевыми условиями достаточно хорошо изучена в работах [1 – 21]. В данных работах восстанавливался потенциал $q(x)$ в уравнении (1) и краевые условия (2). При этом для восстановления использовались несколько спектров, спектральные данные (спектр и нормировочные числа), функция Вейля и т.п. То есть данные восстановления содержали в себе бóльшую информацию, чем только сам спектр задачи L.

Восстановление только краевых условий (с известным дифференциальным уравнением) по собственным значениям началось, по-видимому, в 1990-х годах 20 века [22 – 24]. Оганесяном З. Б. исследовались несколько задач идентификации условий закрепления распределенных механических систем: на обоих концах стержня [23]; круговой [22] и прямоугольной [24] пластин. Однако им восстанавливались лишь коэффициенты канонических условий закрепления. Случай, когда не известен вид канонических условий (то есть, когда не известны все коэффициенты краевых условий) им рассмотрен не был.

В работе [25] (см. также библиографию к данной работе) изучалась идентификация краевых условий, в которых неизвестны все их коэффиценты (известен только ранг матрицы, составленной из коэффициентов краевых условий). Такая задача сводится к идентификации (с точностью до линейных преобразованиий строк) матрицы из коэффициентов краевых условий по ее минорам. В частности, в [26], [27] рассматривались частные случаи идентификации краевых условий задачи Штурма–Лиувилля. В работе [26] показано, что краевые условия Штурма $\left(y'(0) - hy(0) = 0,\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0\right)$ задачи Штурма–Лиувилля (1) – (2) по собственным значениям восстанавливаются однозначно с точностью до перестановки h и H местами. В [30], в случае $q(x) = 0$ показано, что задача восстановления вида и параметров распадающихся краевых условий по двум собственным значениям имеет два решения.

Материалы и методы

Методы идентификации как вида, так и параметров краевых условий или условий сопряжения (дифференциальное уравнение считается известным) впервые разработаны А. М. Ахтямовым [25] и до настоящего времени являются оригинальными. В технической диагностике другими исследователями ранее по конечному числу собственных частот восстанавливалась лишь часть коэффициентов краевых условий определенного вида. А в теории обратных спектральных задач краевые условия определенного вида идентифицировались лишь попутно с коэффициентами самих дифференциальных уравнений. При этом для идентификации использовался не один, а два или несколько спектров или же спектр и дополнительно другие спектральные данные (весовые числа, функция Вейля, спектральная функция и т.п.). В отличие от этих направлений А. М. Ахтямовым предложено идентифицировать всю совокупность краевых условий спектральной задачи как линейную оболочку векторов, компонентами каждого из которых являются коэффициенты соответствующего краевого условия. Такой подход позволяет идентифицировать не только коэффициенты краевого условия определенного (канонического) вида, но и сам вид краевого условия (упругое закрепление, свободный конец, заделка и т.п.). Этот подход в идентификации краевых условий и условий сопряжения достаточно подробно изложен А. М. Ахтямовым и его учениками в многочисленных статьях и обобщающих их монографиях. В данных работах применяются авторские методы идентификации краевых условий: неопределенной системы (метод миноров); сравнения целых функций; введения дополнительных неизвестных; последовательного решения прямых задач и др.

Основными методами, применяемыми в статье, являются методы неопределенной системы (метод миноров) и сравнения целых функций.

Метод неопределенной системы (метод миноров) применяется для идентификации краевых условий по конечному числу собственных значений. На первом этапе данного метода строится характеристический определитель задачи, который представляет собой линейную однородную функцию от миноров M_{km} матрицы A, составленной из коэффициентов краевых условий. Множителями при этих неизвестных минорах являются миноры F_{km} некоторой известной матрицы F. Элементами данной известной матрицы F служат значения линейно независимых решений обыкновенного дифференциального уравнения. По пространственным переменным эти значения берутся в граничных точках, а спектральный параметр принимает значения, равные собственным. Подставив в разложение характеристического определителя собственные значения в количестве на единицу меньшей количества миноров (максимального порядка) матрицы A краевых условий, получим систему $N - 1$ (теперь уже линейных) уравнений от N неизвестных миноров M_{km}. Пусть ранг данной системы равен $N - 1$. Тогда вектор из N неизвестных миноров определяется однозначно с точностью до ненулевого множителя. По данному вектору методами алгебраической геометрии и находится матрица краевых условий с точностью до линейных преобразований ее строк (то есть восстанавливаются краевые условия). В работе [28] данный метод уже был использован. Метод основан на восстановлении матрицы с точностью до линейного преобразования строк по ее минорам [28, 29].

Для метода миноров требуется проверка, что ранг некоторой матрицы F равен определенному числу. Проверка этого условия для конкретной краевой задачи не вызывает затруднений. Однако данный метод не позволяет ответить на фундаментальные вопросы: для каких классов обыкновенных дифференциальных уравнений и спектральных задач возможно однозначное восстановление видов и параметров краевых условий и решение задачи идентификации краевых условий двойственно и т.п. Для ответа на эти фундаментальные вопросы в статье используется метод сравнения целых функций, впервые предложенный для решения задач идентификации краевых условий [25], заключающийся в том, что, как правило, характеристический определитель рассматриваемых спектральных задач представляет собой целую функцию порядка одна вторая или четную целую функцию первого порядка. А такие функции восстанавливаются с точностью до ненулевого постоянного множителя по своим нулям (собственным значениям краевой задачи). Поскольку характеристический определитель представляет собой конечную сумму, в которой слагаемыми являются линейно независимые функции от спектрального параметра, то это позволяет доказать, что вектор, составленный из коэффициентов, которые стоят при этих линейно независимых функциях, восстанавливается по всему спектру однозначно с точностью до ненулевого множителя. По данному вектору можно однозначно восстановить краевые условия. Бесконечный набор собственных частот получить с помощью частотомеров невозможно. Однако данный метод применим к реальным динамическим системам. Он позволяет доказать, что необходимый для метода миноров конечный набор собственных значений найдется. В отличие от метода неопределенной системы, с помощью применения асимптотических формул для линейно независимых решений он позволяет описать классы спектральных задач, краевые условия которых можно однозначно идентифицировать. Полезен он и для предварительного анализа и выяснения того, какое минимальное число собственных значений необходимо для идентификации (это минимальное число частот связано с числом линейно независимых функций N в характеристическом определителе и числом соотношений Плюккера). Метод сравнения целых функций будет развит здесь и для случаев, когда нет однозначности восстановления краевых условий.

Результаты исследования

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов краевых условий (2) – (3), через A, а ее миноры, составленные из i-го и j-го столбцов, через M_{ij}

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \end{matrix} \right\|, \; M_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{23} \end{vmatrix}, \; M_{14} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{24} \end{vmatrix}, \tag{4}$$
$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{23} \end{vmatrix}, \; M_{24} = \begin{vmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{24} \end{vmatrix}, \; M_{12} = M_{34} = 0.$$

Будем считать, что ранг матрицы равен двум: $\operatorname{rank} A = 2$.

Условимся в дальнейшем задачу типа L, но с другими коэффицинтами в уравнении и параметрами в граничных формах, обозначать $\tilde{L}$. Всюду будем считать, что если некоторый символ обозначает объект из задачи L, то символ с волной $\sim$ наверху обозначает аналогичный объект задачи $\tilde{L}$.

Определение 1. Краевые условия задач L и $\tilde{L}$ назовем (kl и mn)-смежными, если для миноров M_{kl} и M_{mn} выполняются равенства $M_{kl} = C\tilde{M}_{mn}$, $M_{mn} = C\tilde{M}_{kl}$, а для всех остальных миноров выполнены равенства $M_{ij} = C\tilde{M}_{ij}$.

Характеристический определитель задачи (1) – (3) (задачи L) имеет следующий вид [1]:

$$\Delta(\lambda) = M_{32} y_1(\pi, \lambda) + M_{42} y_1'(\pi, \lambda) + M_{13} y_2(\pi, \lambda) + M_{14} y_2'(\pi, \lambda), \tag{5}$$

где $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ –линейно независимые решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 1, \quad y_2(0, \lambda) = 1, \quad y_2'(0, \lambda) = 1 \tag{6}$$

Справедливы следующие асимптотические формулы:

$$y_1(x, \lambda) = \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right), \; y_2(x, \lambda) = \frac{1}{s}\sin sx + O\left(\frac{1}{s^2}\right);$$
$$y_1'(x, \lambda) = -s\sin sx + O(1), \, y_2'(x, \lambda) = \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right) \tag{7}$$

для достаточно большого $\lambda = s^2 \in R$ [3, с. 62 – 65].

Обозначим задачу (1) – (3), но с другими коэффициентами краевых условий через $\tilde{L}$.

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \tilde{M}_{32}\, y_1(\pi, \lambda) + \tilde{M}_{42}\, y_1'(\pi, \lambda) + \tilde{M}_{13}\, y_2(\pi, \lambda) + \tilde{M}_{14}\, y_2'(\pi, \lambda). \tag{8}$$

Из асимптотических представлений (7) для линейно независимых решений для функций $y_1(\pi, \lambda)$, $y_2(\pi, \lambda)$ получаем, что функции $\Delta(\lambda)$ и $\tilde{\Delta}(\lambda)$ являются целыми порядка 1/2. Поэтому из теоремы Адамара следует, что они связаны между собой тождеством

$$\Delta(\lambda) \equiv C\tilde{\Delta}(\lambda). \tag{9}$$

Пусть $q(x) \neq q(\pi - x)$, $\tilde{q}(x) \neq \tilde{q}(\pi - x)$. В этом случае $y_2'(\pi, \lambda) \neq y_1(\pi, \lambda)$ [30, см. Лемма 4]. Тогда из (5) и линейной независимости $y_1(\pi, \lambda)$, $y_1'(\pi, \lambda)$, $y_2(\pi, \lambda)$, $y_2'(\pi, \lambda)$ получаем равенства:

$$M_{32} = C\widetilde{M}_{32}, \quad M_{42} = C\widetilde{M}_{42}, \; M_{13} = C\widetilde{M}_{13}, \quad M_{14} = C\widetilde{M}_{14}. \tag{10}$$

Отсюда следует, что краевые условия задач L и $\tilde{L}$ совпадают (с точностью до линейных преобразований строк).

Пусть теперь $q(x) = q(\pi - x)$, $\tilde{q}(x) = \tilde{q}(\pi - x)$. В этом случае $y_2'(\pi, \lambda) = y1\pi,\lambda$ [30, см. Лемма 4]. Тогда из (5) и линейной независимости функций $y_1(\pi, \lambda) = y_2'(\pi, \lambda)$, $y_1'(\pi, \lambda)$, $y_2(\pi, \lambda)$ получаем равенства:

$$M_{32} + M_{14} = C\left(\widetilde{M}_{32} + \widetilde{M}_{14}\right), \; M_{42} = C\widetilde{M}_{42}, \quad M_{13} = C\widetilde{M}_{13}. \tag{11}$$

Для нахождения миноров воспользуемся тем, что произвольные числа не могут быть минорами матрицы. Для того, чтобы числа $M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34}$ были минорами матрицы необходимо и достаточно, чтобы выполнялись так называемые соотношения Плюккера [28]:

$$M_{12}M_{34} - M_{13}M_{24} + M_{14}M_{23} = 0; \tag{12}$$

$$\widetilde{M}_{12}\widetilde{M}_{34} - \widetilde{M}_{13}\widetilde{M}_{24} + \widetilde{M}_{14}\widetilde{M}_{23} = 0. \tag{13}$$

Тогда отсюда и из (11) получаем два набора равенств:

$$M_{13} = C\widetilde{M}_{13}, \; M_{14} = C\widetilde{M}_{14}, \qquad M_{32} = C\widetilde{M}_{32}, \; M_{42} = C\widetilde{M}_{42} \tag{14}$$

и

$$M_{13} = C\widetilde{M}_{13}, \; M_{14} = C\widetilde{M}_{32}, \; M_{32} = C\widetilde{M}_{14}, \; M_{42} = C\widetilde{M}_{42}. \tag{15}$$

Отсюда следует, что краевые условия задач L и $\tilde{L}$ либо совпадают (с точностью до линейных преобразований строк), либо являются (14 и 32) смежными.

Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть спектры задач L и $\tilde{L}$ с распадающимися краевыми условиями совпадают с учетом их алгебраических кратностей,* rank$A$=2*:*

Тогда:

1. Если $q(x) \neq q(\pi - x)$, $\tilde{q}(x) \neq \tilde{q}(\pi - x)$, то матрицы коэффициентов краевых условий $A = (a_{ij})_{2\times 4}$ и $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{2\times 4}$ совпадают с точностью до линейных преобразований строк. То есть, в случае несимметрического потенциала, задача идентификации распадающихся краевых условий по всем собственным значениям имеет единственное решение.

*2. Если $q(x) = q(\pi - x)$, $\tilde{q}(x) = \tilde{q}(\pi - x)$, то либо матрицы коэффициентов краевых условий $A = (a_{ij})_{2\times 4}$ и $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{2\times 4}$ совпадают с точностью до линейных преобразований строк, либо являются (*14 *и* 32*) смежными. То есть в случае симметрического потенциала задача идентификации распадающихся краевых условий по всем собственным значениям имеет два решения.*

Рассмотрим теперь задачу идентификации краевых условий по конечному набору собственных значений.

Обозначим через Q матрицу следующего вида:

$$Q = \left\| \begin{matrix} y_1(\pi, \lambda_1) & y_1'(\pi, \lambda_1) & y_2(\pi, \lambda_1) & y_2'(\pi, \lambda_1) \\ y_1(\pi, \lambda_2) & y_1'(\pi, \lambda_2) & y_2(\pi, \lambda_2) & y_2'(\pi, \lambda_2) \\ y_1(\pi, \lambda_3) & y_1'(\pi, \lambda_3) & y_2(\pi, \lambda_3) & y_2'(\pi, \lambda_3) \end{matrix} \right\|, \tag{16}$$

через Q_j – минор матрицы Q, полученный вычеркиванием j-го столбца матрицы Q.

Теорема 2. *Если* $q(x) \neq q(\pi - x)$, $\mathrm{rank}A=2$, *три собственных значения* $\lambda_j, (j = 1, 2, 3)$ *задачи L удовлетворяют условию:*

$$\mathrm{rank}Q=3, \tag{17}$$

то задача идентификации краевых условий по этим трем собственным значениям имеет единственное решение, которое представляется формулами:

$$a)\ \text{если}\ M_{13} \neq 0,\ \text{то}\ A = \begin{Vmatrix} 1 & \dfrac{M_{23}}{M_{13}} & 0 & -\dfrac{M_{34}}{M_{13}} \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{Vmatrix};$$

$$б)\ \text{если}\ M_{14} \neq 0,\ \text{то}\ A = \begin{Vmatrix} 1 & \dfrac{M_{24}}{M_{14}} & \dfrac{M_{34}}{M_{14}} & 0 \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{Vmatrix};$$

$$в)\ \text{если}\ M_{23} \neq 0,\ \text{то}\ A = \begin{Vmatrix} \dfrac{M_{13}}{M_{23}} & 1 & 0 & -\dfrac{M_{34}}{M_{23}} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} & M_{24} \end{Vmatrix};$$

$$г)\ \text{если}\ M_{24} \neq 0,\ \text{то}\ A = \begin{Vmatrix} \dfrac{M_{14}}{M_{24}} & 1 & \dfrac{M_{34}}{M_{24}} & 0 \\ -M_{12} & 0 & M_{23} & M_{24} \end{Vmatrix}.$$

Причем миноры в представлениях а) – г) для матрицы A даются следующими равенствами:

$$M_{12} = 0,\ M_{34} = 0,\ M_{32} = tQ_1,\ M_{42} = -tQ_2,\ M_{13} = tQ_3,\ M_{14} = -tQ_4, \tag{18}$$

Доказательство. Так как $y_2'(\pi, \lambda) \neq y_1(\pi, \lambda)$ [30, см. Лемма 4], и три собственных значения λ_j (j=1, 2, 3) задачи L являются корнями функции (5), то они удовлетворяют следующей системе уравнений относительно неизвестных M_{32}, M_{42}, M_{13}, M_{14}:

$$\Delta(\lambda_j) = M_{32} y_1(\pi, \lambda_j) + M_{42} y_1'(\pi, \lambda_j) + M_{13} y_2(\pi, \lambda_j) + M_{14} y_2'(\pi, \lambda_j) = 0. \tag{19}$$

Матрица данной системы совпадает с матрицей Q. Согласно условию теоремы, ранг матрицы Q равен трем. Поэтому система уравнений (19) имеет единственное с точностью до ненулевого множителя t решение (18). По минорам (18) с помощью методов работ [25], [28] находится матрица A. В зависимости от того, какой из определителей отличен от нуля, она дается формулами *а*) – *г*). Теорема доказана.

Пример 1. Пусть собственные значения задачи (1), (2) с $q(x)=2x+3$, $\lambda_1 = 5{,}132512$, $\lambda_2 = 8{,}59040$, $\lambda_3 = 12{,}71359$. Разложив линейно независимые решения $y_1(\pi, \lambda)$ и $y_2(\pi, \lambda)$ в ряд Тейлора по x и λ и подставив частичную сумму ряда из первых 120 членов ряда в (16) и вычислив соответствующие миноры с точностью до семи значащих цифр, получим: $Q_1 = -18{,}28142$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = -9.14071$, $Q_4 = 0$.

$$\begin{gathered} M_{12} = 0, M_{34} = 0, \quad M_{23} = -M_{32} = -tQ_1 = 18{,}28142t, \\ M_{24} = -M_{42} = -tQ_2 = 0,\ M_{13} = tQ_3 = -9{,}14071t,\ M_{14} = -tQ_4 = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Положив $t = 18{,}28142^{-1}$, получим более простые представления для миноров:

$$M_{12} = M_{14} = M_{24} = M_{34} = 0,\ M_{23} = 1,\ M_{13} = -\tfrac{1}{2}.$$

Так как $M_{23} = 1 \neq 0$ (случай *в*) из теоремы 2), то матрица A с точностью до линейных преобразований строк совпадает с матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} \dfrac{M_{13}}{M_{23}} & 1 & 0 & -\dfrac{M_{34}}{M_{23}} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} & M_{24} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\dfrac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, задача идентификации краевых условий в данном случае имеет единственное решение. Это решение представляет собой следующие краевые условия

$$y(0) - 2y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Обозначим через R матрицу следующего вида

$$R = \begin{Vmatrix} y_1(\pi, \lambda_1) & y_1'(\pi, \lambda_1) & y_2(\pi, \lambda_1) \\ y_1(\pi, \lambda_2) & y_1'(\pi, \lambda_2) & y_2(\pi, \lambda_2) \end{Vmatrix} \qquad (21)$$

через R_j обозначим минор матрицы R, полученный вычеркиванием j-го столбца матрицы R.

Теорема 3. *Если* $q(x) = q(\pi - x)$, $\mathrm{rank} A = 2$, *два собственных значения* λ_j (j=1,2) *задачи* L *удовлетворяют условию:*

$$\mathrm{rank} R = 2, \qquad (22)$$

то задача идентификации краевых условий по этим двум собственным значениям имеет два решения, которые представляется формулами а) – г) из теоремы 2, *в зависимости от того, какой из миноров отличен от нуля. Причем миноры в представлениях а) – г) для матрицы А даются следующими равенствами:*

$$\begin{gathered} M_{12} = 0, M_{34} = 0, M_{32} = \frac{t}{2}\left(R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + 4R_2R_3}\right), \\ M_{42} = tR_2, M_{13} = tR_3, M_{14} = \frac{t}{2}\left(R_1 \mp \sqrt{R_1^2 + 4R_2R_3}\right). \end{gathered} \qquad (23)$$

Доказательство. Два собственных значения λ_j , j=1, 2, задачи L являются корнями функции (5). Следовательно, они удовлетворяют следующей системе уравнений относительно неизвестных $x_1 = M_{12} + M_{34}$, $x_2 = M_{32}$, $x_3 = M_{42}$, $x_4 = M_{13}$, $x_5 = M_{14}$:

$$(M_{32} + M_{14}) y_1(\pi, \lambda_j) + M_{42}\, y_1'(\pi, \lambda_j) + M_{13}\, y_2(\pi, \lambda_j) = 0. \qquad (24)$$

Матрица этой системы совпадает с матрицей R (21). Согласно условию теоремы, ранг матрицы R равен двум. Поэтому система уравнений (24) имеет единственное с точностью до ненулевого множителя решение:

$$M_{32} + M_{14} = tR_1, \ M_{42} = -tR_2, \ M_{13} = tR_3. \qquad (25)$$

Из соотношений Плюккера (9), (4) и (25) получаем

$$M_{32} M_{14} = -t^2 R_2 R_3 \,. \qquad (26)$$

Из равенств (25), (26) и обратной теоремы Виета следует, что M_{32} и M_{14} являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - tR_1 z - t^2 R_2 R_3 = 0.$$

Откуда

$$M_{32} = \frac{t}{2}\left(R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + 4R_2R_3}\right), M_{14} = \frac{t}{2}\left(R_1 \mp \sqrt{R_1^2 + 4R_2R_3}\right). \qquad (27)$$

Из (27), (25) и вытекает утверждение теоремы.

Пример 2. Пусть собственные значения задачи (1), (2) с $q(x) = 0$, $\lambda_1 = 2{,}549144$, $\lambda_2 = 6{,}560591$. Линейно независимыми решениями задачи (1), (2) с $q(x) = 0$ являются функции $y_1(\pi, \lambda) = \cos(x\sqrt{\lambda})$ и $y_2(\pi, \lambda) = \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}$. Подставив их в (25) и вычислив соответствующие миноры R_j с точностью до семи значащих цифр, получим: $R_1 = -0{,}9187470$, $R_2 = 0, R_3 = -0{,}4593735$.

Отсюда, а также из (25) и (27) получаем

$$\begin{gathered}
M_{12} = 0,\ M_{34} = 0;\\
M_{32} = \frac{t}{2}\left(R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + 4R_2R_3}\right) = \frac{t}{2}\left(-0{,}9187470 \pm \sqrt{(-0{,}9187470)^2}\right) =\\
= \{-0{,}918747t \text{ или } 0\};\\
M_{14} = \frac{t}{2}\left(R_1 \mp \sqrt{R_1^2 + 4R_2R_3}\right) = \frac{t}{2}\left(-0{,}9187470 \mp \sqrt{(-0{,}9187470)^2}\right) =\\
= \{0 \text{ или } -0{,}918747t\};\\
M_{24} = tR_2 = 0,\ M_{13} = tR_3 = -0{,}4593735t.
\end{gathered} \tag{28}$$

Положив $t = -0{,}4593735^{-1}$, из (28) получим более простые представления для миноров:

$$M_{12} = 0,\ M_{34} = 0, \qquad M_{32} = \{2 \text{ или } 0\},\ M_{14} = \{0 \text{ или } 2\},$$
$$M_{24} = 0,\ M_{13} = 1. \tag{29}$$

Так как в первом случае $M_{23} = -2 \neq 0$ (случай *в*) из теоремы 2), а во втором $M_{14} = 2 \neq 0$ (случай *б*) из теоремы 2), то матрица A с точностью до линейных преобразований строк будет иметь два представления

$$A_1 = \begin{Vmatrix} \frac{M_{13}}{M_{23}} & 1 & 0 & -\frac{M_{34}}{M_{23}} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} & M_{24} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{M_{24}}{M_{14}} & \frac{M_{34}}{M_{14}} & 0 \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, задача идентификации краевых условий в данном случае имеет два решения. Эти решения представляет собой следующие краевые условия:

$$y(0) - 2y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

или

$$y(0) = 0,\ y(\pi) + 2y'(\pi) = 0.$$

Физически это означает, что закрепления на концах однородной струны находятся с точностью до перестановок их местами.

Заключение

Рассмотрен вопрос идентификации распадающихся краевых условий задачи Штурма–Лиувилля по ее собственным значениям. С помощью метода сравнения целых функций показано, что в случае несимметрического потенциала задача их идентификации распадающихся краевых условий по всем собственным значениям в случае несимметрического потенциала имеет единственное решение, а в случае симметрического потенциала – два решения.

Методом неопределенной системы доказано, что для задачи идентификации распадающихся краевых условий показано, что единственное решение может быть получено по трем собственным значениям, а два решения – по двум собственным значениям. Приведены соответствующие примеры восстановления краевых условий. Исследования могут быть продолжены и для восстановления краевых задач с более общими краевыми условиями

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Башкортостан (проекты 18-51-06002-Аз-а, 18-01-00250-а, 17-41-020230-р_а и Госзадание № АААА-А17-117040510250-6).

Список литературы

1. Марченко, В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. – Киев : Наукова думка, 1977. – 331 с.

2. Левитан, Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля / Б. М. Левитан. – М. : Наука, 1984. – 240 с.

3. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1969. – 528 с.

4. Коротяев, Е. Л. Обратная задача Штурма–Лиувилля со смешанными краевыми условиями / Е. Л. Коротяев, Д. С. Челкак // Алгебра и анализ. – 2009. – Т. 21, № 5. – С. 114 – 137.

5. Mamedov, Kh. R. A Uniqueness Theorem for a Sturm-Liouville Equation with Spectral Parameter in Boundary Conditions / Kh. R. Mamedov, F. A. Cetinkaya // Appl. Math. Inf. Sci. – 2015. – Vol. 9, No. 2. – P. 981 – 988.

6. Panakhov, E. S. Reconstruction Formula for the Potential Function of Sturm-Liouville Problem with Eigenparameter Boundary Condition / E. S. Panakhov, H. Koyunbakan, Ic. Unal // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2010. – Vol. 18, No. 1. – P. 173 – 180.

7. Савчук, А. М. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Функциональный анализ и его приложения. – 2010. – Т. 44, № 4. – С. 34 – 53.

8. Mizrak, O. Characteristic Properties of Scattering Data of a Boundary Value Problem / O. Mizrak, Kh. R. Mamedov, A. M. Akhtyamov // Filomat. – 2017. – Vol. 31, No. 12. – P. 3945 – 3951.

9. Akhtyamov, A. M. Inverse Problem for the Diffusion Operator with Symmetric Functions and General Boundary Conditions / A. M. Akhtyamov, V. A. Sadovnichy, Ya. T. Sultanaev // Eurasian Mathematical Journal. – 2017. – Vol. 8, No. 1. – P. 10 – 22.

10. Del Rio, R. Inverse Problems for Jacobi Operators IV: Interior Mass-Spring Perturbations of Semi-Infinite Systems / R. Del Rio, L. O. Silva, M. Kudryavtsev // Inverse Problems. – 2017. – Vol. 33, No. 5. – P. 5 – 10. doi: 10.1088/1361-6420/aa6808

11. Monk, P. An Inverse Acoustic Waveguide Problem in the Time Domain / P. Monk, V. Selgas // Inverse Problems. – 2016. – Vol. 32, No. 5. – P. 5 – 10. doi: 10.1088/0266-5611/32/5/055001

12. Its, A. A Riemann-Hilbert Approach to the Inverse Problem for the Stark Operator on the Line / A. Its, V. A. Sukhanov // Inverse Problems. – 2016. – Vol. 32, No. 5. – P. 16 – 22. doi: 10.1088/0266-5611/32/5/055003

13. Kutsenko, A. A. Recovery of Defects from the Information at Detectors / A. A. Kutsenko // Inverse Problems. – 2016. – Vol. 32, No. 5. – P. 28 – 36. doi: 10.1088/0266-5611/32/5/055005

14. Horváth, M. Discrete Inverse Problems for the Schrödinger Operator on the Multi-Dimensional Square Lattice with Partial Cauchy Data / M. Horváth, Z. Markó // Inverse Problems. – 2016. – Vol. 32, No. 5. – P. 36 – 42. doi: 10.1088/0266-5611/32/5/055006

15. Rostamian, M. A Meshless Method for Solving 1D Time-Dependent Heat Source Problem / M. Rostamian, A. Shahrezaee // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2018. – Vol. 26, No. 1. – P. 51 – 82.

16. Wei, Z. The Inverse Discrete Transmission Eigenvalue Problem for Absorbing Media / Z. Wei, G. Wei // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2018. – Vol. 26, No. 1. – P. 83 – 99.

17. Mirsalimov, V. M. Inverse Problem of Fracture Mechanics for a Circular Disc under Mixed Boundary Conditions / V. M. Mirsalimov, S. H. Hasanov // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2017. – Vol. 25, No. 11. – P. 1547 – 1559.

18. Fotopoulos, G. Inverse Scattering with Fixed Observation Angle Data in 2D / G. Fotopoulos, M. Harju // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2017. – Vol. 25, No. 10. – P. 1492 – 1507.

19. Buterin, S. A. On the Half Inverse Spectral Problem for an Integro-Differential Operator / S. A. Buterin, M. Sat // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2017. – Vol. 25, No. 10. – P. 1508 – 1518.

20. Neamaty, A. Numerical Solution of Inverse Nodal Problem with an Eigenvalue in the Boundary Condition / A. Neamaty, S. Akbarpoor // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2017. – Vol. 25, No. 7. – P. 978 – 994.

21. Çöl, A. Inverse Spectral Problem for Dirac Operator with Discontinuous Coefficient and Polynomials in Boundary Condition / A. Çöl // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2016. – Vol. 24, No. 2. – P. 234 – 246.

22. Гнуни, В. Ц. Определение граничных условий круглой кольцевой пластинки по заданным частотам собственных колебаний / В. Ц. Гнуни, З. Б. Оганисян // Известия академии наук Армении. Механика. – 1991. – Т. 44, № 5. – С. 9 – 16.

23. Оганисян, З. Б. Об одной задаче восстановления граничных условий на концах стержня при заданном спектре частот собственных поперечных колебаний / З. Б. Оганисян // Сб. «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем» (науч. тр. конф.). – Ереван, 1997. – С. 159 – 162.

24. Оганисян, З. Б. Об одной задаче восстановления граничных условий на краях пластинки при заданном спектре частот собственных поперечных колебаний / З. Б. Оганисян // Ученые записки ЕГУ. – 1991. – № 1. – С. 45 – 50.

25. Ахтямов, А. М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения / А. М. Ахтямов. – М. : Физматлит, 2009. – 272 с.

26. Ахтямов, А. М. К единственности решения одной обратной спектральной задачи / А. М. Ахтямов // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 8. – С. 1011 – 1015.

27. Ахтямов, А. М. Идентификация краевых условий на обоих концах струны по собственным частотам колебаний / А. М. Ахтямов, И. М. Утяшев // Акустический журнал. – 2015. – Т. 61, № 6. – С. 647 – 655. doi: 10.7868/S0320791915050019

28. Akhtyamov, A. M. On Reconstruction of a Matrix by its Minors / A. M. Akhtyamov, M. Amram, A. Mouftakhov // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. – 2018. – Vol. 49, No. 2. – P. 268 – 281.

29. Cramer's Rule for Nonsingular m×n Matrices / A. M. Akhtyamov [et al.] // The Teaching of Mathematics. – 2017. – Vol. XX, No. 1. – P. 13 – 19.

30. Юрко, В. А. Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями / В. А. Юрко // Матем. заметки. – 1975. – Т. 18, № 4. – С. 569 – 576.

Identification of Disintegrating Boundary Conditions of the Sturm-Liouville Problem

A. M. Akhtyamov, R. Yu. Galimov

Department of Mathematical Modeling, Bashkir State University, Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia; GalimovRY@mail.ru

Keywords: Sturm-Liouville problem; identification of boundary conditions; inverse spectral problem; own values.

Abstract: The problem of identifying decaying boundary conditions of the Sturm-Liouville problem by its eigenvalues is investigated. In this paper, we use two methods for identifying the boundary conditions – the method of an uncertain system (the minors method), and the method of comparing entire functions. In the minor method, only two or three eigenvalues are used. However, this method does give the answer to the fundamental question: what classes of ordinary differential equations and spectral problems are the uniquely restored types and parameters of boundary conditions. To answer this question, the article uses the method of comparing entire functions. It is shown that in the case of an asymmetric potential, the problem of identifying the boundary conditions for all eigenvalues has a unique solution, and in the case of a symmetric potential – two solutions. It is also shown that under certain conditions a single solution can be obtained using only three eigenvalues. Two solutions can be obtained using only two eigenvalues.

References

1. Marchenko V.A. *Operatory Shturma-Liuvillya i ikh prilozheniya* [Sturm-Liouville Operators and their Applications], Kiev: Naukova dumka, 1977, 331 p. (In Russ.)

2. Levitan B.M. *Obratnyye zadachi Shturma-Liuvillya* [Inverse Sturm–Liouville Problems], Moscow: Nauka, 1984, 240 p. (In Russ.)

3. Naymark M.A. *Lineynyye differentsial'nyye operatory* [Linear Differential Operators], Moscow: Nauka, 1969, 528 p. (In Russ.)

4. Korotyayev Ye.L., Chelkak D.S. [The Sturm–Liouville Inverse Problem with Mixed Boundary Conditions], *Algebra i analiz* [Algebra and Analysis], 2009, vol. 21, no. 5, pp. 114-137. (In Russ.)

5. Mamedov Kh.R., Cetinkaya F.A. A Uniqueness Theorem for a Sturm–Liouville Equation with Spectral Parameter in Boundary Conditions, *Appl. Math. Inf. Sci.*, 2015, vol. 9, no. 2, pp. 981-988.

6. Panakhov E.S., Koyunbakan H., Unal Ic. Reconstruction Formula for the Potential Function of Sturm-Liouville Problem with Eigenparameter Boundary Condition, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2010, vol. 18, no. 1, pp. 173-180.

7. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. [Inverse problems for the Sturm–Liouville Operator with Potentials from Sobolev Spaces. Uniform Stability], *Funktsional'nyy analiz i yego prilozheniya* [Functional Analysis and its Applications], 2010, vol. 44, no. 4, pp. 34-53. (In Russ.)

8. Mizrak O., Mamedov Kh.R., Akhtyamov A.M. Characteristic Properties of Scattering Data of a Boundary Value Problem, *Filomat*, 2017, vol. 31, no. 12, pp. 3945-3951.

9. Akhtyamov A.M., Sadovnichy V.A., Sultanaev Ya.T. Inverse Problem for the Diffusion Operator with Symmetric Functions and General Boundary Conditions, *Eurasian Mathematical Journal*, 2017, vol. 8, no. 1, pp. 10-22.

10. Del Rio R., Silva L.O., Kudryavtsev M. Inverse Problems for Jacobi Operators IV: Interior Mass-Spring Perturbations of Semi-Infinite Systems, *Inverse Problems*, 2017, vol. 33, no. 5, pp. 5 – 10, doi: 10.1088/1361-6420/aa6808

11. Monk P., Selgas V. An Inverse Acoustic Waveguide Problem in the Time Domain, *Inverse Problems*, 2016, vol. 32, no. 5, pp. 5-10, doi: 10.1088/0266-5611/32/5/055001

12. Its A., Sukhanov V.A. A Riemann-Hilbert Approach to the Inverse Problem for the Stark Operator on the Line, *Inverse Problems*, 2016, vol. 32, no. 5, pp. 16-22, doi: 10.1088/0266-5611/32/5/055003

13. Kutsenko A.A. Recovery of Defects from the Information at Detectors, *Inverse Problems*, 2016, vol. 32, no. 5, pp. 28-36, doi: 10.1088/0266-5611/32/5/055005

14. Horváth M., Markó Z. Discrete Inverse Problems for the Schrödinger Operator on the Multi-Dimensional Square Lattice with Partial Cauchy Data, *Inverse Problems*, 2016, vol. 32, no. 5, pp. 36-42, doi: 10.1088/0266-5611/32/5/055006

15. Rostamian M., Shahrezaee A. A Meshless Method for Solving 1D Time-Dependent Heat Source Problem, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 51-82.

16. Wei Z., Wei G. The Inverse Discrete Transmission Eigenvalue Problem for Absorbing Media, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 83-99.

17. Mirsalimov V.M., Hasanov S.H. Inverse Problem of Fracture Mechanics for a Circular Disc under Mixed Boundary Conditions, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2017, vol. 25, no. 11, pp. 1547-1559.

18. Fotopoulos G., Harju M. Inverse Scattering with Fixed Observation Angle Data in 2D, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2017,vol. 25, no. 10, pp. 1492-1507.

19. Buterin S.A., Sat M. On the Half Inverse Spectral Problem for an Integro-Differential Operator, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2017, vol. 25, no. 10, pp. 1508-1518.

20. Neamaty A., Akbarpoor S. Numerical Solution of Inverse Nodal Problem with an Eigenvalue in the Boundary Condition, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2017, vol. 25, no. 7, pp. 978-994.

21. Çöl A. Inverse Spectral Problem for Dirac Operator with Discontinuous Coefficient and Polynomials in Boundary Condition, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2016, vol. 24, no. 2, pp. 234-246.

22. Gnuni V.Ts., Oganisyan Z.B. [Determination of the Boundary Conditions of a Circular Annular Plate for Given Natural Frequencies], *Izvestiya akademii nauk Armenii. Mekhanika* [Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics], 1991, vol. 44, no. 5, pp. 9-16. (In Russ.)

23. Oganisyan Z.B. *Sbornik «Voprosy optimal'nogo upravleniya, ustoychivosti i prochnosti mekhanicheskikh sistem» (nauchnyye trudy konferentsii)* [Collection "Questions of Optimal Control, Stability and Strength of Mechanical Systems" (Conference Proceedings)], Yerevan, 1997, pp. 159-162. (In Russ.)

24. Oganisyan Z.B. [On a Problem of Restoring Boundary Conditions at the Edges of a Plate for a Given Frequency Spectrum of Natural Transverse Oscillations], *Uchenyye zapiski YEGU* [Scholarly Notes YSU], 1991, no. 1, pp. 45-50. (In Russ.)

25. Akhtyamov A.M. *Teoriya identifikatsii krayevykh usloviy i yeye prilozheniya* [The Theory of Identification of Boundary Conditions and its Applications], Moscow: Fizmatlit, 2009, 272 p. (In Russ.)

26. Akhtyamov A.M. [To the Uniqueness of the Solution of One Inverse Spectral Problem], *Differents. uravneniya* [Differ. the Equations], 2003, vol. 39, no. 8, pp. 1011-1015. (In Russ.)

27. Akhtyamov A.M., Utyashev I.M. [Identification of Boundary Conditions at Both Ends of a String by the Eigenfrequencies of Vibrations], *Akusticheskiy zhurnal* [Akustichsky Journal], 2015, vol. 61, no. 6, pp. 647-655, doi: 10.7868/S0320791915050019 (In Russ., abstract in Eng.)

28. Akhtyamov A.M., Amram M., Mouftakhov A. On Reconstruction of a Matrix by its Minors, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2018, vol. 49, no. 2, pp. 268-281.

29. Akhtyamov A.M., Amram M., Dagan M., Mouftakhov A. Cramer's Rule for Nonsingular m×n Matrices, *The Teaching of Mathematics*, 2017, vol. XX, no. 1, pp. 13-19.

30. Yurko V.A., [An Inverse Problem for Second-Order Differential Operators with Regular Boundary Conditions], *Matematicheskiye zametki* [Mathematical Notes], 1975, vol. 18, no. 4, pp. 569-576. (In Russ.)

Identifizierung der verteilenden Randbedingungen der Sturm-Liouville-Gleichung

Zusammenfassung: Es wird das Problem untersucht, verteilende Randbedingungen der Sturm-Liouville-Gleichung anhand ihrer eigenen Werte zu identifizieren. In der vorliegenden Arbeit verwenden wir zwei Methoden zur Identifizierung der Randbedingungen - die Methode eines unsicheren Systems (die Minor-Methode), die Methode des Vergleichs gesamter Funktionen. In der Minor-Methode werden nur zwei oder drei Eigenwerte verwendet. Dieses Verfahren erlaubt es jedoch nicht, die grundlegende Frage zu beantworten: für welche Klassen gewöhnlicher Differentialgleichungen und Spektralprobleme die Arten und Parameter der Randbedingungen eindeutig wiederhergestellt werden. Um diese Frage zu beantworten, wird in dem Artikel die Methode des Vergleichs ganzer Funktionen verwendet. Es wird gezeigt, dass das Problem der Identifizierung von Randbedingungen für alle Eigenwerte bei einem asymmetrischen Potential eine eindeutige Lösung hat, und bei einem symmetrischen Potential zwei Lösungen. Es wird auch gezeigt, dass unter bestimmten Bedingungen eine einzelne Lösung mit nur drei Eigenwerten erhalten werden kann. Zwei Lösungen können mit nur zwei Eigenwerten erhalten werden.

Identification des conditions de rupture de la théorie de Sturm-Liouville

Résumé: Est étudiée la tâche de l'identification des conditions de limite décroissantes de la théorie de Sturm-Liouvillepar ses propres valeurs. Dans cetarticle, sont utilisées deux méthodes d'identification des conditions de limite – la méthode d'un système non défini (méthode des mineurs) et la méthode de comparaison des fonctions complètes. Dans la méthode des mineurs sont utilisée seulement deux ou troistrois valeurs propres. Cependant, cette méthode ne permet pas de répondre à la question fondamentale: pour quelles classes d'équations différentielles ordinaires et des tâches spectrales les types et les paramètres des conditions de limite sont restaurés d'une manière ou d'une autre. Pour répondre à cette question on utilise la méthode de comparaison des fonctions complètes. Il est démontré que, dans le cas d'un potentiel asymétrique, l'identification des conditions de limite pour toutes ses propres valeurs est la seule solution et, dans le cas d'un potentiel symétrique, il y a deux solutions. Il est également démontré que, dans certaines conditions, la seule solution peut être obtenue en utilisant seulement trois valeurs propres. Deux solutions peuvent être obtenues en utilisant seulement deux valeurs propres.

Авторы: ***Ахтямов Азамат Мухтарович*** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования; ***Галимов Рустам Юмадилович*** – аспирант кафедры математического моделирования, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет», г. Уфа, Республика Башкортостан, Россия.

Рецензент: ***Спивак Семён Израилевич*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет», г. Уфа, Республика Башкортостан, Россия.