УДК 519.177
DOI: 10.17277/vestnik.2018.04.pp.597-609

АНАЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СТРУКТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАФОВЫХ МОДЕЛЕЙ ИНФОРМАЦИОННЫХ СЕТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

А. М. Межуев[1], И. И. Пасечников[2], З. М. Селиванова[3]

*ФГКВОУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (1), г. Воронеж, Россия;
кафедра теоретической и экспериментальной физики (2), ФГБОУ ВО «ТГУ имени Г. Р. Державина»; pasechnikov_ivan@mail.ru;
кафедра «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем» (3), ФГБОУ ВО «ТГТУ» г. Тамбов, Россия*

Ключевые слова: графовые модели; информационная сеть; константа Чигера; критерии структурного синтеза; связность графа; собственные векторы; спектры графов; структурные характеристики.

Аннотация: Исследованы возможности строгого аналитического описания основных структурных характеристик информационных сетей на основе нетрадиционного математического аппарата спектрального анализа графов с использованием аналогий с классическими подходами теории графов и матричного описания топологии сетей. Получены выражения для основных параметров, определяющих структурные характеристики информационных сетей, и сформулированы критерии для структурного синтеза устойчивых, надежных и информационно эффективных сетей.

Введение

Постановка задачи. Структурные характеристики информационных сетей (**ИС**) во многом определяют обеспечиваемую ими эффективность информационного обмена и надежность функционирования. Необходимость нахождения этих характеристик обусловлена также тем, что уже на ранних стадиях проектирования ИС следует обеспечить формирование структуры системы требуемого качества. При традиционном подходе большинство топологических характеристик вычисляется достаточно сложно и в зависимости от конкретного вида ИС могут иметь различную физическую интерпретацию [1]. Поэтому в данной работе наряду с общепринятым графовым методом к определению основных структурных характеристик ИС предлагается нетрадиционный подход, основанный на спектральном анализе графов. Рассмотрим влияние структурных характеристик ИС на эффективность информационного обмена (информационную эффективность) сети, и прежде всего основные топологические характеристики и их физическую интерпретацию для ИС, которые будут использованы в процессе исследования.

1. Структурная сложность (или топологическая избыточность) характеризуется соотношением между числом элементов – узлов коммутации (**УК**) и связей между ними – каналов связи (**КС**), составляющих структуру ИС. Определение числа и особенностей связей между УК структуры ИС направлено, прежде всего, на выявление в соответствующем графе контуров и сильно связанных подграфов [2]. Структурная сложность может быть оценена на основе спектрального подхода числом остовных деревьев на графе структуры ИС.

2. Адаптируемость структуры ИС определяется ее способностью обеспечивать надежное функционирование с выполнением заданных структурных требований в условиях воздействия внешних и внутренних дестабилизирующих факторов и изменяющихся условий информационного обмена. Данная характеристика напрямую связана с решением задачи структурного синтеза ИС, под которым будем понимать процесс определения числа УК и КС в графовой модели, соответствующей структуре сети. Ее решение является последовательным итерационным процессом определения количественного состава ИС, в соответствии с заданными структурными критериями, направленным на уменьшение степени неопределенности из совокупности различных вариантов построения ИС. При этом вводится понятие базовой топологии ИС, обеспечивающей функционирование системы в стационарном режиме информационного обмена, исходя из планируемых условий эксплуатации ИС. Адаптируемость структуры ИС может быть оценена по эффективности работы итерационных алгоритмов коррекции базовых топологий и полученных на их основе коспектральных структур с требуемыми структурными характеристиками (например, посредством переключений Зайделя или метода Сунада [3, 4]).

3. Диаметр структуры является метрической характеристикой ИС, которая определяет длину кратчайшего пути (в числе ребер – КС) между наиболее удаленными вершинами. Зачастую также используется понятие «средний диаметр», который является усредненной характеристикой: временной задержки, числа транзитных УК, скоростных характеристик передачи информации, надежности, и позволяет определить обобщенный структурный показатель ИС [1, 5].

4. Структурная связность характеризуется способностью ИС противостоять разбиению топологии на независимые части. Она позволяет выявить наличие «узкого горла» в топологии, а также судить о степени однородности отдельных УК сети. Существует несколько определений связности, обусловленных различными критериями. Однако основным из них в теории ИС является k-связность – параметр, характеризуемый числом ребер (КС) или вершин (УК), при удалении которых граф становится несвязным. В тоже время k-связность определяет наличие в структуре ИС k непересекающихся по УК путей. В информационных сетях число УК, имеющих непосредственные КС с рассматриваемым УК, называют связностью узла (числом соседних узлов). С учетом быстрых изменений связности (особенно в мобильной ИС) на практике часто используют среднее по сети число соседних узлов – среднее значение степени отельных УК (вершин графа). Для оценки структурной связности ИС также может быть использовано изопериметрическое число или константа Чигера, как мера наличия «узкого горла» в сети [6].

5. Надежность ИС характеризуется способностью ее структуры обеспечить работоспособность и функционирование системы с требуемым качеством в течение заданного промежутка времени. Так как надежность ИС в целом является многопараметрической характеристикой структуры, то она определяется надежностью отдельных элементов (УК) и схемой их соединения (КС). Надежность ИС сильно связана со структурной сложностью и связностью сети, поэтому, с достаточной степенью детализации для рассматриваемых в работе вопросов, может быть оценена с использованием представленных выше параметров структурной сложности и связности (с точки зрения обеспечения требуемой эффективности информационного обмена).

6. Живучесть ИС определяет возможности структуры по сохранению ее отдельных частей, обеспечивающих надежный информационный обмен между любыми УК сети. Она отражает также способность ИС выполнять возложенные на нее задачи в условиях выхода из строя отдельных элементов путем требуемых изменений в структуре сети (логической или физической). В свою очередь живучесть имеет тесную функциональную связь с адаптируемостью ИС и может быть оценена структурными показателями: числом внутренней устойчивости и числом маршрутов длины k на графовой модели.

Для исследования структурных характеристик общепринято использовать геометрические графовые модели представления структур ИС, которые являются наиболее наглядными и распространенными в теории топологии, а также в практических приложениях. Однако получить на их основе точное и целостное решение задачи анализа (а, впоследствии, и синтеза ИС с требуемыми структурными характеристиками) для реальных структур ИС с большим числом УК оказывается затруднительным в связи с громоздкостью и сложностью вычислений [1, 7].

Цель работы – определение аналогий между параметрами и характеристиками общепринятого графового метода и спектрального анализа графов, а также получение строгого математического описания наиболее значимых структурных характеристик, позволяющих решать задачи анализа и синтеза топологических моделей ИС.

Описание основных структурных характеристик информационных сетей графовым и спектральным методами

В качестве исходных данных для структурного анализа и синтеза ИС, с точки зрения обеспечения требуемой информационной эффективности, могут быть использованы: интервал интенсивности входного трафика $\Delta_{\gamma_{\text{вх}}}$ (в котором планируется использование сети), длина пакетов в битах $L_{\text{пак}}$, пропускные способности КС $C_{\text{кан}}$, временная задержка пакетов $T_{\text{доп}}$, число УК $N_{\text{УК}}$, а также требования к структурным характеристикам ИС. Рассмотрим определения отмеченных выше основных топологических характеристик ИС на основе классических подходов и спектрального анализа графов.

В классическом представлении задание структуры ИС, как правило, осуществляется с помощью геометрического (рис. 1) и матричного способов (с использованием матрицы смежности).

Графом $G(X,U)$ называется непустое множество вершин $X\ (i=1,...,N)$ с множеством соединяющих их ребер $U\ (j=1...M)$. Для модели ИС будем использовать неориентированные простые графы без кратных ребер и петель.

При этом матрица смежности графа $G(X,U)$ есть квадратная матрица размерности $N \times N$, где N – число вершин (УК) сети

$$A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

элементами которой являются нули и единицы, образующиеся по следующему правилу: элемент a_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен единице, если имеется ребро, соединяющее вершину i с вершиной j, и a_{ij} равен

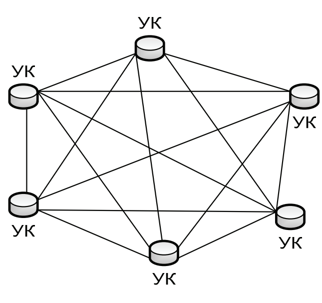


Рис. 1. Геометрическое представление топологии ИС

нулю в противном случае. Данное представление структуры ИС позволяет аналитически оценить структурную сложность только простейшим соотношением между числом УК и КС $L = M - N$, где M – число ребер (КС) в графовой модели.

Аналогом общего представления структуры ИС при использовании спектрального подхода является «обыкновенный» спектр графа. Для его нахождения составляется характеристическая матрица графа $G(X, U)$

$$B = \lambda I - A, \tag{2}$$

где λ – произвольный коэффициент, I – единичная матрица (диагональные элементы которой равны 1, а все остальные 0).

Определитель матрицы (2) называется характеристическим многочленом $|\lambda I - A|$ матрицы смежности (графа G) и обозначается $P_G(\lambda)$. Корни характеристического уравнения $P_G(\lambda) = 0$ (согласно теореме Гамильтона-Кэли) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ называются собственными значениями матрицы A, а их совокупность образует обыкновенный спектр графа G [2, 3, 8]

$$\mathrm{Sp}(G) = \lceil \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N \rceil, \tag{3}$$

при этом число элементов спектра (собственных значений) равно числу вершин графа N (УК исследуемой структуры ИС), а минимальное число ребер связного графа, применяемого в качестве структурной модели ИС, равно $M_{\min} = N - 1$.

В свою очередь, если определить систему собственных векторов x (координаты которых можно интерпретировать как «веса́» отдельных УК) [2], соответствующих собственным значениям спектра графа λ, то может быть найдена взаимооднозначная связь между спектром и матрицей смежности графа в виде уравнения

$$Ax = \lambda x. \tag{4}$$

Следовательно, спектр графа и совокупность его собственных векторов полностью описывают и однозначно определяют структуру любой графовой модели ИС.

Для модели ИС в виде графа G, представленного на рис. 1, характеристический многочлен имеет вид

$$P_G(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^6 - 15\lambda^4 - 40\lambda^3 - 45\lambda^2 - 24\lambda - 5, \tag{5}$$

а его обыкновенный спектр равен

$$\mathrm{Sp}(G) = [5, -1, -1, -1, -1, -1]. \tag{6}$$

В предлагаемом подходе, основанном на спектральном анализе графов, структурная сложность оценивается числом остовных деревьев на графе. Для его нахождения необходимо использование специального C-спектра графа (спектра Фидлера), получаемого из матрицы полных проводимостей (Кирхгофа) [3]:

$$C = D - A, \tag{7}$$

где D – диагональная матрица степеней или валентностей (число дуг, выходящих из i-го УК, или число соседних УК) графа G*.

Тогда характеристический многочлен матрицы C имеет вид

$$C_G(\lambda) = |\lambda I - C| = |\lambda I - D + A| = \lambda^{\mathrm{N}} + c_1\lambda^{N-1} + \ldots + c_N\,, \tag{8}$$

а соответствующий ему спектр, определяемый при $C_G(\lambda) = 0$, описывается выражением

$$\mathrm{Sp}_C(G) = [\lambda_1, \ldots, \lambda_N]_C\,. \tag{9}$$

Число остовных деревьев графа G, являющееся важнейшей характеристикой структурной сложности ИС и определяющее число непересекающихся (независимых) путей соединяющих два любых УК на графовой модели, определяется по формуле

$$t(G_j) = |C_j|, \tag{10}$$

где $j \in \{1, \ldots, N\}$.

Следовательно [3, 8], число остовных деревьев может быть определено через коэффициенты характеристического многочлена (8) матрицы C

$$t(G) = \frac{1}{N}(-1)^{N-1}c_{N-1} \tag{11}$$

или компоненты (собственные значения) самого C-спектра (9)

$$t(G) = \frac{1}{N}\prod_{i=1}^{N-1}\lambda_i\,. \tag{12}$$

Максимальное (из возможных вариантов структурного построения) значение параметра $t(G) \to \max$, с одной стороны, определяет структурную сложность ИС, а с другой, – возможности по наличию альтернативных маршрутов передачи информации по сети и, следовательно, может выступать в качестве одного из критериев при решении задачи синтеза структурно устойчивой сети.

При рассмотрении свойства адаптируемости структуры ИС спектральный подход является, пожалуй, единственным эффективным средством получения графовых моделей ИС высокой устойчивости в условиях воздействия внешних и внутренних дестабилизирующих факторов и изменяющихся условий информационного обмена. Реализация данной топологической характеристики осуществляется по отдельным итерационным алгоритмам с определением основных структурных параметров на основе спектрального анализа графов ($t(G)$, k-связность $a(G)$, диаметр сети d, число маршрутов длины $k(N_k)$, константа Чигера $h(G)$ и т.д.) для различных вариантов базовых топологий (определяемых условиями информационного обмена) [5, 9]. При этом, вне зависимости от используемого алгоритма, на каждой итерации осуществляется нахождение коспектральных (или изоспектральных) графовых моделей ИС (обладающих одинаковыми спектрами, а, следовательно, и структурными свойствами) в целях получения нескольких альтернативных вариантов максимальной структурной устойчивости.

Одной из значимых структурных характеристик, определяющих пропускную способность ИС, является диаметр графа, как наибольшее из расстояний, определенных на множестве кратчайших путей между парами УК графовой модели ИС:

---

*Термин «матрица полных проводимостей» заимствован из теории электрических сетей, когда любой мультиграф G (неориентированный граф без петель) может быть представлен с помощью некоторого графа, соответствующего специальной (идеальной) электрической сети, у которой проводимость ветвей равна единице.

$$d = \max_{i,j \in X} \{d_{ij}\}, \tag{13}$$

где d_{ij} – расстояние, состоящее из минимального числа ребер, образующих путь из вершины i в вершину j на всем множестве путей $X(i, j \in X)$.

Для связной графовой модели ИС диаметр может быть определен с использованием обыкновенного спектра графа согласно неравенству

$$d \le m - 1, \tag{14}$$

где m – число различных собственных значений обыкновенного спектра $\mathrm{Sp}(G)$.

В задачах исследования информационной эффективности ИС, зачастую, необходимо и достаточно определение усредненных скоростных характеристик информационного обмена, при этом вводится понятие средний диаметр, в качестве которого можно принять среднее значение из интервала

$$\frac{d}{2} \le \bar{d} \le d. \tag{15}$$

Кроме того, на основе среднего диаметра может быть найден обобщенный структурный показатель **(ОСП)** ИС

$$\text{ОСП} = \bar{d} / M = 0{,}75 d / M, \tag{16}$$

отражающий соотношение между средним диаметром и общим числом КС в исследуемой структуре ИС [2, 3, 9].

Полученные параметры (14) – (16) могут выступать в качестве критериев $d \to \min$ и $\text{ОСП} \to \min$ при синтезе топологии ИС, обеспечивающей максимальную пропускную способность с учетом поддержания ее высокой структурной устойчивости.

Структурная связность, характеризуемая *k*-связностью или алгебраической связностью графовой модели ИС, определяется наименьшим числом УК (КС), при удалении которых граф становится несвязным (в нем появляется изолированный УК), и может быть найдена с использованием второго минимального (после нулевого) собственного значения *C*-спектра

$$a(G) = \lambda_{N-1}. \tag{17}$$

Так как *k*-связность, кроме того, определяет число непересекающихся путей в структуре ИС, то она является важнейшей характеристикой информационного обмена при решении задачи маршрутизации, а в ходе структурного синтеза необходимо придерживаться критерия $a(G) \to \max$.

По результатам многочисленных исследований особый интерес, с точки зрения обеспечения структурной связности и устойчивости функционирования, представляют регулярные структуры (или структуры с минимальным отличием валентности УК на единицу) [1 – 7]. Поэтому в процессе синтеза базовой структуры ИС, ее коррекции и выбора оптимальной с точки зрения устойчивости топологии будем ориентироваться на преобразования, приводящие к получению регулярных структур. В этой связи важной структурной характеристикой является индекс графа r (или степень регулярности графовой модели $\bar{f}$ – среднее значение степени отдельных УК), который определяется по графовой модели выражением

$$\bar{f} = \frac{2M}{N}, \tag{18}$$

а с использованием обыкновенного спектра $\mathrm{Sp}(G)$ может быть найден по формуле

$$r = \bar{f} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2 . \tag{19}$$

При решении задачи синтеза структурно устойчивой ИС будем стремиться к выполнению критерия $r, \bar{f} \to \max$, учитывая результаты исследований, полученных в работе [4], где определены оптимальные значения количества соседних УК, которые составляют для ИС с регулярной структурой – 3, для сети со случайной топологией – 7-8.

Структурная связность ИС также может быть оценена с использованием константы Чигера, выступающей в качестве числовой меры «узкого горла» графовой модели

$$h(G) = \min_{0<|S|\le\frac{n}{2}} \frac{|\partial(S)|}{|S|}, \tag{20}$$

где минимум определяется по всем непустым множествам *S*, содержащим не более *N*/2 вершин, $\partial(S)$ – реберная граница множества *S*, равная множеству ребер, имеющих только одну вершину (УК) в *S*.

Спектральный анализ графов позволяет определить неравенство Чигера с использованием обыкновенного спектра $\mathrm{Sp}(G)$ и степени регулярности графа r

$$\frac{1}{2}(r-\lambda_2) \le h(G) \le \sqrt{2r(r-\lambda_2)} . \tag{21}$$

Неравенство оценивает значение константы Чигера посредством второго собственного значения λ_2 матрицы смежности [7]. Положительное значение константы Чигера определяет связность графа *G*. При этом, если константа Чигера положительна, но мала, то в графе присутствует «узкое горло», то есть имеются два больших множества вершин (УК) с малым числом ребер (КС) между ними. Если константа Чигера велика, то любое деление множества вершин (УК ИС) на два подмножества оставляет большое число КС между этими подмножествами, поэтому при структурном синтезе сети будем придерживаться критерия $h(G) \to \max$.

В качестве параметра, характеризующего живучесть структуры ИС, выступает число внутренней устойчивости $\alpha(G)$, которое определяется максимальным числом несоединенных между собой вершин (УК), и также может быть найдено с помощью обыкновенного спектра графа согласно неравенству

$$\alpha(G) \le p_0 + \min(p_-, p_+), \tag{22}$$

где p_0, p_-, p_+ – числа собственных значений спектра, равных, меньших или больших нуля соответственно. Таким образом, для обеспечения живучести структуры ИС при топологическом синтезе необходимо выполнение критерия $\alpha(G) \to \min$.

Живучесть структуры ИС также может быть оценена числом маршрутов длины *k* на графовой модели, которое определяется с помощью обыкновенного спектра $\mathrm{Sp}(G)$ и системы собственных векторов x_i выражением

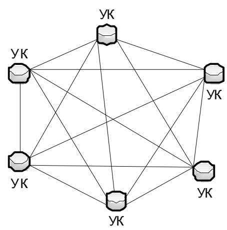
$$N_k = \sum_{v=1}^{N} C_v \lambda_v^k , \tag{23}$$

где $C_v = \left(\sum_{v=1}^{N} x_{iv}\right)^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ (для используемой модели мультиграфа без кратных ребер и петель). Критерием структурного синтеза ИС в данном случае выступает выполнение соотношений $N_k \to \max$ при $k \to \min$, что физически означает обеспечение наличия в топологии максимального числа маршрутов минимальной длины.

Из приведенного выше анализа вытекает аналогия между структурными характеристиками, описываемыми с помощью общепринятого графового подхода и на основе спектрального анализа графов (табл. 1).

Таблица 1

Аналогии между графовыми и спектральными характеристиками структурных моделей ИС

Графовый подход к исследованию структурных характеристик ИС	Спектральный анализ графов ИС
1	2
1. Представление модели структуры ИС	
1. Граф 	1. Характеристический многочлен $P_G(\lambda) = \lambda^6 - 15\lambda^4 - 40\lambda^3 - 45\lambda^2 - 24\lambda - 5^{**}.$ 2. Обыкновенный спектр графа $\mathrm{Sp}(G) = [5,-1,-1,-1,-1,-1].$ 3. Собственные векторы x $A = x^{-1}\lambda x.$
2. Матрица смежности $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4. C-спектр Фидлера $\mathrm{Sp}_C(G) = [0,6,6,6,6,6]_C.$
2. Структурная сложность ИС	
1. Соотношение между ребрами и вершинами графа ИС (числом УК и КС) $L = M - N = 15 - 6 = 9.$ 2. Граница связности графа ИС $M_{\min} = N - 1 = 6 - 1 = 5.$	1. Число остовных деревьев модели ИС – через коэффициенты характеристического многочлена $C_G(\lambda) = \lambda^6 - 30\lambda^5 + 360\lambda^4 - 2160\lambda^3 + 6480\lambda^2 - 7776\lambda;$ $t(G) = \frac{1}{N}(-1)^{N-1} c_{N-1} = \frac{1}{6}(-1)^5(-7666) = 1296;$ – через собственные значения C-спектра $t(G) = \frac{1}{N}\prod_{i=1}^{N-1} \lambda_i = \frac{1}{6}\left(6^5\right) = 1296.$ Критерий синтеза структурно устойчивой сети $(G) \to \max$

** Все значения структурных характеристик ИС получены для графовой модели (см. рис. 1).

Продолжение табл. 1

1	2
3. Адаптируемость структуры ИС	
Не описывается графовым методом. Возможно нахождение структуры ИС с требуемыми характеристиками перебором возможных вариантов связных графов	1. Итерационные алгоритмы преобразования базовых топологий ИС по структурным критериям $(t(G), a(G), d, N_k, h(G)\text{ и т.д.})$. 2. Нахождение коспектральных структур $\mathrm{Sp}(G_1) = \mathrm{Sp}(G2)$.
4. Диаметр графовой модели ИС	
1. Наибольший из кратчайших путей между парами УК на графовой модели ИС $d = \max\limits_{i,j\in X}\{d_{ij}\} = \max\limits_{i,j\in X}\{1\} = 1$. 2. Средний диаметр $\frac{d}{2} \le \bar{d} \le d \to 0{,}5 \le \bar{d} \le 1$	1. Число различных собственных значений обыкновенного спектра $d \le m - 1 = 2 - 1 = 1$. 2. Обобщенный структурный показатель $\text{ОСП} = \bar{d}/M = 0{,}75d/M = 0{,}75/15 = 0{,}05$. 3. Критерии синтеза топологии ИС с максимальной пропускной способностью и высокой структурной устойчивостью $d \to \min, \text{ОСП} \to \min$
5. Структурная связность ИС	
1. Среднее значение степени УК $\bar{f} = \frac{2M}{N} = \frac{2\cdot 15}{6} = 5$.	1. *k*-связность графовой модели ИС $a(G) = (\lambda_{N-1})_C$, а для полносвязных структур $a(G) = \lambda_1 = r = 5$. 2. Индекс (степень регулярности) графа $r = \bar{f} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2 = \frac{1}{6}\left(5^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2\right) = 5$. 3. Неравенство Чигера: $\frac{1}{2}(r - \lambda_2) \le h(G) \le \sqrt{2r(r - \lambda_2)}$; $\frac{1}{2}(5+1) = 3 \le h(G) \le \sqrt{2\cdot 5\cdot (5+1)} = 7{,}75$. 4. Критерии синтеза структурно устойчивой ИС: $a(G) \to \max, r, \bar{f} \to \max, h(G) \to \max$
6. Надежность структуры ИС	
Надежность графовой модели ИС определяется надежностью отдельных элементов УК и КС по общепринятым параметрам (вероятность безотказной работы, время наработки на отказ)	Определяется на основе параметров сложности и связности топологии ИС $t(G)$, $a(G)$, r, $\bar{f}$, $h(G)$ с учетом сформулированных для них критериев структурного синтеза

1	2
7. Живучесть структуры ИС	
Определение сечений и разрезов на графовой модели с использованием матрицы смежности и ее модификаций	1. Число внутренней устойчивости, которое определяется числом собственных значений обыкновенного спектра, равных, меньших или больших нуля $\alpha(G) \le p_0 + \min(p_-, p_+) = 0 + \min(5{,}1) = 1$. 2. Число маршрутов длины k $N_k = \sum_{v=1}^{N} C_v \lambda_v^k \Big\vert_{k=1} = 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) = 5.$ 3. Критерии синтеза живучей структуры ИС $\alpha(G) \to \min$, $\mathrm{N}_k \to \max$ при $k \to \min$

Заключение

В работе решены следующие задачи:

– определена связь структурных параметров с основными топологическими характеристиками ИС;

– проведены аналогии и получены взаимооднозначные связи между основными понятиями общепринятого графово-матричного подхода и спектральной теории графов;

– получено математическое описание наиболее значимых структурных характеристик ИС (задача структурного анализа) на основе определения трех основных составляющих спектрального анализа структур: характеристического многочлена $P_G(\lambda)$, обыкновенного спектра графа $\mathrm{Sp}(G)$, *C*-спектра Фидлера $\mathrm{Sp}_C(G)$ и системы собственных векторов x;

– сформированы критерии эффективного структурного синтеза топологических моделей ИС и определены пути достижения требуемых результатов (итерационные адаптивные алгоритмы преобразования базовых структур ИС с использованием коспектральных моделей).

Аналитическое моделирование в среде Maple 15 показало реализуемость и подтвердило достоверность результатов получаемых с использованием спектральной теории графов при исследованиях структурных характеристик и параметров ИС [11]. Практическое применение спектрального подхода в исследованиях структурных свойств ИС возможно при решении задачи организации комплексной многоконтурной адаптации сети к изменяющимся условиям функционирования в наиболее неблагоприятных условиях информационного обмена при высоком входном трафике и сильном воздействии дестабилизирующих факторов (в том числе мощных помех). В этом случае данные, получаемые на основе спектрального анализа графовых моделей ИС, могут быть использованы в обобщенном алгоритме адаптации в контуре реализации структурной адаптации ИС [12].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 17-47-680748р_центр_а.

Список литературы

1. Назаров, А. Н. Модели и методы расчета показателей качества функционирования узлового оборудования и структурно-сетевых параметров сетей связи следующего поколения / А. Н. Назаров, К. И. Сычев. – Красноярск : Изд-во Поликом, 2010. – 389 с.
2. Андреев, А. М. Многопроцессорные вычислительные системы. Теоретический анализ, математические модели и применение : учеб. пособие / А. М. Андреев, Г. П. Можаров, В. В. Сюзев. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. – 334 с.
3. Цветкович, Д. Спектры графов. Теория и применение / Д. Цветкович, М. Дуб, Х. Захс. – Киев : Наук. думка, 1984. – 384 с.
4. Sunada, T. Riemannian Coverings and Isospectral Manifolds / T Sunada // Ann. of Math. – 1985. – Vol. 21. – P. 169 – 186.
5. Пасечников, И. И. Методология анализа и синтеза предельно нагруженных информационных сетей / И. И. Пасечников. – М. : Машиностроение-1, 2004. – 216 с.
6. Donetti, L. Optimal Network Topologies: Expanders, Cages, Ramanujan Graphs, Entangled Networks and All that / L. Donetti, F. Neri, M. A. Muñoz // J. Stat. Mech. – 2006. – Vol. 2006, No. 8. – 24 p. doi: 10.1088/1742-5468/2006/08/P08007
7. Автоматизация управления и связь в ВМФ / Н. Ф. Директоров, В. И. Дорошенко, Ю. И. Житов [и др.] ; под ред. Ю. М. Кононова. – СПб. : Элмор, 2001. – 508 с.
8. Межуев, А. М. Структурные характеристики информационной сети на основе спектрального анализа топологии / А. М. Межуев, И. И. Пасечников, М. Г. Третьяков // Вестн. Тамб. ун-та. Серия: Естественные и технические науки. – 2016. – Т. 21, № 2. – С. 676 – 680. doi: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-676-680
9. Межуев, А. М. Тензорные методы в теории оценки информационной эффективности и анализа элементов цифровых радиосетей / А. М. Межуев. – Тамбов : Интеграция, 2008. – 262 с.
10. Межуев, А. М. Исследование моделей базовых топологий цифровых систем передачи информации с использованием спектральной теории графов / А. М. Межуев // Материалы Междунар. науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы деятельности подразделений УИС», 23 – 24 мая 2018 г., Воронеж. – Воронеж : ВИ ФСИН, 2018. – С. 236 – 239.
11. Межуев, А. М. Исследование структурных характеристик цифровых радиосетей с использованием спектрального анализа графов / А. М. Межуев, М. Г. Третьяков // Сб. ст. по материалам докладов IV Межвуз. науч.-практ. конф. «Молодежные чтения памяти Ю. А. Гагарина», 16 мая 2018 г., Воронеж. – Воронеж : ВУНЦ ВВС «ВВА», 2018. – С. 96 – 100.
12. Межуев, А. М. Совместное решение задач алгоритмической и структурной адаптации в инфокоммуникационных системах / А. М. Межуев // Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. – 2015. – Т. 7, № 6. – С. 36 – 43.

Analogies and Mathematical Description of the Structural Characteristics of Graph Information Networks Models Using Spectral Analysis

A. M. Mezhuyev[1], I. I. Pasechnikov[2], Z. M. Selivanova[3]

Zhukovsky – Gagarin Air Force Academy (1), Voronezh, Russia;
Department of Theoretical and Experimental Physics (2),
G. R. Derzhavin TSU; pasechnikov_ivan@mail.ru;
Department of Design of Radioelectronic and Microprocessor Systems (3),
TSTU, Tambov, Russia

Keywords: graph models; information network; Cheeger's constant; criteria for structural synthesis; graph connectivity; eigenvectors; graph spectra; structural characteristics.

Abstract: The possibilities of a rigorous analytical description of the basic structural characteristics of information networks based on a nontraditional mathematical apparatus for spectral analysis of graphs using analogies with classical approaches of graph theory and the matrix description of network topology are investigated. Expressions for the main parameters defining the structural characteristics of information networks are obtained; the criteria for the structural synthesis of stable, reliable, and information-efficient networks are formulated.

References

1. Nazarov A.N., Sychev K.I. *Modeli i metody rascheta pokazateley kachestva funktsionirovaniya uzlovogo oborudovaniya i strukturno-setevykh parametrov setey svyazi sleduyushchego pokoleniya* [Models and Methods for Calculating Indicators of the Quality of Functioning of Node Equipment and Structural-Network Parameters of Next-Generation Communication Networks], Krasnoyarsk: Izdatel'stvo Polikom, 2010, 389 p. (In Russ.)

2. Andreyev A.M., Mozharov G.P., Syuzev V.V. *Mnogoprotsessornyye vychislitel'nyye sistemy. Teoreticheskiy analiz, matematicheskiye modeli i primeneniye* [Multiprocessing Computing Systems. Theoretical Analysis, Mathematical Models and Application], Moscow: MGTU im. N. E. Baumana, 2011, 334 p. (In Russ.)

3. Tsvetkovich D., Dub M., Zakhs Kh. *Spektry grafov. Teoriya i primeneniye* [Spectra of Graphs. Theory and Application], Kiev: Nauk. dumka, 1984, 384 p. (In Russ.)

4. Sunada T. Riemannian Coverings and Isospectral Manifolds, *Annals of Mathematics*, 1985, vol. 21, pp. 169-186.

5. Pasechnikov I.I. *Metodologiya analiza i sinteza predel'no nagruzhennykh informatsionnykh setey* [Methodology of Analysis and Synthesis of Ultimately Loaded Information Networks], Moscow: Mashinostroyeniye-1, 2004, 216 p. (In Russ.)

6. Donetti L., Neri F., Muñoz M.A. Optimal Network Topologies: Expanders, Cages, Ramanujan Graphs, Entangled Networks and all that, *J. Stat. Mech*., 2006, vol. 2006, no. 8, 24 p., doi: 10.1088/1742-5468/2006/08/P08007

7. Direktorov N.F., Doroshenko V.I., Zhitov Yu.I. [et al.], Kononov Yu.M. [Ed.] *Avtomatizatsiya upravleniya i svyaz' v VMF* [Automation of Control and Communications in the Navy], St. Petersburg: Elmor, 2001, 508 p. (In Russ.)

8. Mezhuyev A.M., Pasechnikov I.I., Tret'yakov M.G. [Structural Characteristics of an Information Network Based on Spectral Analysis of Topology], *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Yestestvennyye i tekhnicheskiye nauki* [Bulletin of the Tambov University. Series: Natural and Technical Sciences], 2016, vol. 21, no. 2, pp. 676-680, doi: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-676-680 (In Russ., abstract in Eng.)

9. Mezhuyev A.M. *Tenzornyye metody v teorii otsenki informatsionnoy effektivnosti i analiza elementov tsifrovykh radiosetey* [Tensor Methods in the Theory of Evaluating Information Efficiency and Analyzing Elements of Digital Radio Networks], Tambov: Integratsiya, 2008, 262 p. (In Russ.)

10. Mezhuyev A.M. *Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Aktual'nyye problemy deyatel'nosti podrazdeleniy UIS"* [Proceedings of the International Scientific and Practical Conference "Actual Problems of the Activities of the MIS Divisions"], 23 – 24 May 2018, Voronezh, 2018, pp. 236-239 (In Russ.)

11. Mezhuyev A.M., Tret'yakov M.G. *Sbornik statey po materialam dokladov IV Mezhvuzovskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Molodezhnyye chteniya pamyati Yu.A. Gagarina"* [Collection of Articles Based on the Reports of the IV Inter-University Scientific and Practical Conference "Youth Readings in Memory of Yu. A. Gagarin"], 16 May 2018, Voronezh, 2018, pp. 96-100 (In Russ.)

12. Mezhuyev A.M. [A Joint Solution of the Problems of Algorithmic and Structural Adaptation in Information and Communication Systems], *Naukoyemkiye tekhnologii v kosmicheskikh issledovaniyakh Zemli* [Science-Intensive Technologies in Space Research of the Earth], 2015, vol. 7, no. 6, pp. 36-43. (In Russ.)

Analogien und mathematische Beschreibung der strukturellen Eigenschaften der grafischen Modelle der Informationsnetze mit Benutzung der Spektralanalyse

Zusammenfassung: Es sind die Möglichkeiten einer strengen analytischen Beschreibung der wichtigsten strukturellen Eigenschaften der Informationsnetzwerke auf der Basis des nicht-traditionellen mathematischen Apparats der Spektralanalyse der Graphen unter Verwendung von Analogien mit klassischen Ansätzen der Theorie der Graphen und der Matrixbeschreibung der Netzwerktopologie untersucht. Es sind Ausdrücke für grundlegende Parameter erhalten, die die strukturellen Eigenschaften von Informationsnetzen bestimmen. Es sind auch die Kriterien für die strukturelle Synthese von stabilen, zuverlässigen und informationseffizienten Netzwerken formuliert.

Analogies et description mathématique des caractéristiques structurelles des modèles graphiques des réseaux d'information à l'aide de l'analyse spectrale

Resume: Sont étudiées les possibilites d'une description analytique rigoureuse des principales caractéristiques structurelles des réseaux d'information à la base d'un appareil mathématique non conventionnel de l'analyse spectrale des graphes avec l'utilisation des analogies avec les approches classiques de la théorie des graphes et de la description matricielle de la topologie des réseaux. Sont obtenues des expressions pour les principaux paramètres qui déterminent les caractéristiques structurelles des réseaux d'information et sont établis des critères pour la synthèse structurelle de réseaux durables, fiables et efficaces.

Авторы: ***Межуев Александр Михайлович*** – кандидат технических наук, начальник кафедры, ФГКВОУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия; ***Пасечников Иван Иванович*** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и экспериментальной физики, ФГБОУ ВО «ТГУ имени Г. Р. Державина»; ***Селиванова Зоя Михайловна*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.

Рецензент: ***Жуковский Евгений Семенович*** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа, ФГБОУ ВО «ТГУ имени Г. Р. Державина», г. Тамбов, Россия.