УДК 531.2
DOI: 10.17277/vestnik.2018.03.pp.523-533

О СТАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДВУСТОРОННИМИ И ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

Г. И. Дубровина, В. В. Витушкин

Кафедра «Теоретическая механика», ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва, Россия; fn3@bmstu.ru

Ключевые слова: двусторонние и односторонние связи; механические системы; потеря связи; работоспособность механизма; статическая определимость.

Аннотация: Рассмотрены методы оценки статической определимости механических систем с двусторонними связями и влияние на нее геометрических параметров систем и их возможных изменений. Показаны особенности решения задач равновесия систем с внутренними односторонними связями трех типов (подпятник, сухое трение, зубчатое зацепление). Приведен метод исследования работоспособности механизмов с неудерживающими связями.

Рассмотрим методы оценки статической определимости механических систем с двусторонними (удерживающими) связями при статическом действии заданных нагрузок, равновесия систем сочлененных тел с односторонними (неудерживающими) связями, а также метод исследования работоспособности механизмов с неудерживающими связями. Некоторые вопросы исследования задач равновесия такого типа с соответствующими дополнительными условиями рассмотрены в работах [1 – 8]. Большой вклад в решение данных задач внес В. В. Дубинин.

Основной задачей исследования равновесия механических систем является определение неизвестных сил реакций внутренних и внешних связей. Необходимым условием решения данной задачи является равенство числа неизвестных сил и числа уравнений равновесия, то есть ее статическая определимость, для которой справедливо соотношение

$$S = \sum_{i=1}^{T} k_i - m - n = 0\,, \tag{1}$$

где T – число тел системы; m и n – число неизвестных сил реакций связей внешних и внутренних соответственно; k – число степеней свободы тел.

В случае статической определимости задачи равновесия системы сочлененных тел или механизма значение S должно быть равно нулю.

В общем случае уравнения равновесия механической системы имеют вид [1, 5]

$$AX = B\,, \tag{2}$$

где A – матрица коэффициентов при неизвестных реакциях $\overline{R}(R_1, ..., R_{m+n})$ – тригонометрических функций углов между силами и осями координат или плеч их моментов относительно осей или точек; X – матрица неизвестных реакций связей; B – матрица коэффициентов, соответствующих активным силам.

При этом задача определения неизвестных реакций имеет единственное решение, если определитель Δ системы (2) уравнений равновесия не равен нулю. Если определитель этой системы равен нулю, то задача либо не имеет решения, либо имеет множество решений, определяемых несколькими задаваемыми параметрами.

Соотношение (1) является необходимым, но недостаточным условием статической определимости задачи нахождения неизвестных реакций связей, и для его достаточности необходимо выполнение двух условий: $S = 0$, $\Delta \neq 0$.

Покажем на простых примерах необходимость и достаточность выполнения этих условий для статической определимости задач, а также определяемые этими условиями ограничения изменений геометрических характеристик систем с точки зрения обеспечения статической определимости, то есть единственности решения задачи нахождения неизвестных реакций.

Рассмотрим равновесие механической системы, состоящей из двух шарнирно сочлененных стержней, схема которой приведена на рис. 1, *а*, (здесь M – момент пары активных сил, действующих на стержень; $AB = l$, $BC = l_1$, $AC = l\cos\beta + l_1\cos\alpha$).

Применяя аксиому связей, получаем две расчетные схемы (рис. 1, *б*, *в*) для определения составляющих $\left(\overline{X}_A, \overline{X}_B, \overline{X}_C, \overline{Y}_A, \overline{Y}_B, \overline{Y}_C\right)$ главного вектора неизвестных реакций связей. Составим (см. рис. 1, *б*, *в*) уравнения равновесия данной механической системы:

$$x_A + x_B = 0;\ y_A + y_B = 0;\ x_A l\sin\beta - y_A l\cos\beta = 0; \tag{3}$$

$$x_A + x_C = 0;\ y_A + y_C = 0;\ y_C AC = -M$$

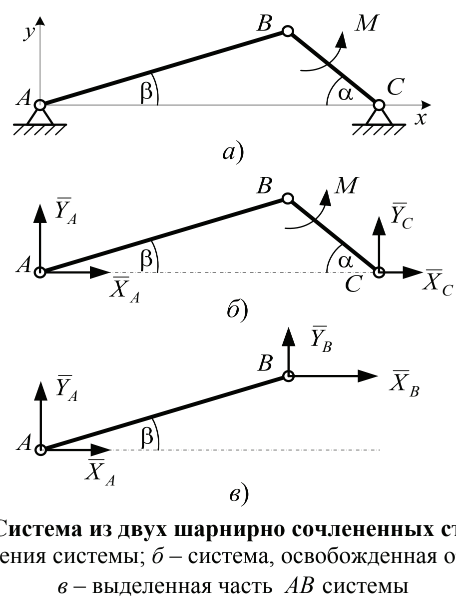

Рис. 1. Система из двух шарнирно сочлененных стержней:
а – схема нагружения системы; *б* – система, освобожденная от внещних связей;
в – выделенная часть AB системы

и определитель полученной системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ l\sin\beta & 0 & 0 & -l\cos\beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AC \end{vmatrix} = AC\ l\sin\beta .$$

В данном случае $\Delta = 0$ при $\beta = 0$, но в рассматриваемой механической системе, если $\beta = 0$, то и $\alpha = 0$, соответственно оба стержня будут занимать горизонтальное положение, и определить все составляющие главного вектора реакций связей будет невозможно. Здесь количество независимых уравнений равновесия $kT = 3 \cdot 2 = 6$ и число неизвестных составляющих реакций $m + n = 4 + 2 = 6$, следовательно $S = 0$. Однако задача является статически неопределимой, так как определитель системы уравнений равновесия $\Delta = 0$. Для пояснения причины статической неопределимости данной задачи запишем ее решение:

$$y_C = -\frac{M}{AC} = -y_A = y_B\ ,\ x_A \operatorname{ctg}\beta = \frac{M}{AC}\operatorname{ctg}\beta = -x_C = -x_B\ ,$$

из которого следует, что при $\beta \to 0$ неограниченно увеличивается горизонтальная реакция – $x_A \to \infty$.

Рассмотрим равновесие системы, состоящей из трех шарнирно сочлененных стержней (рис. 2), которая получается из рассмотренной выше системы (см. рис. 1) присоединением третьего стержня CD длиной l_2.

Воспользуемся составленными ранее уравнениями (3), добавив еще три уравнения равновесия для третьего стержня:

$$x_C - x_D = 0\ ;\ y_C - y_D = 0\ ;\ x_C l_2 \sin\gamma + y_C l_2 \cos\gamma + M_D = 0\ .$$

Теперь вектор неизвестных имеет девять составляющих

$$\left(x_A, x_B, x_C, y_A, y_B, y_C, x_D, y_D, M_D\right)$$

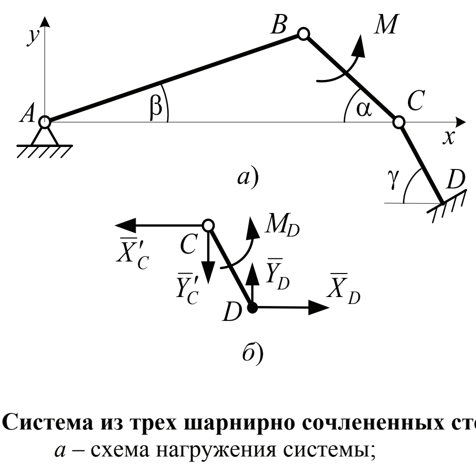

Рис. 2. Система из трех шарнирно сочлененных стержней:
а – схема нагружения системы;
б – схема реакций связей выделенного стержня CD системы

и определитель девятого порядка приобретает вид

$$\Delta_{(9)} = \Delta \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Delta = AC\,l \sin\beta ,$$

где Δ – определитель шестого порядка системы (3).

При этом $\Delta_{(9)} = 0$, как и ранее в случае $\beta = 0$, то есть добавление третьего звена к статически неопределимой системе, состоящей из двух стержней, не повлияло на статическую неопределимость задачи.

Рассмотрим механическую систему, показанную на рис. 3, *а*, (здесь $\overline{P}$ и M – внешние активные сила и момент, $BC = l$, $AB = l_1$), для которой уравнения равновесия имеют вид:

$$x_B - R_C \cos\alpha = -P_x; \;\; y_B + R_C \sin\alpha = -P_y;$$

$$R_C \sin(\alpha - \beta) l = M_B(\overline{P}) \text{ (рис. 3, } б\text{);}$$

$$x_A - x_B = 0; \;\; y_A - y_B = 0; \;\; y_B l_1 + M_A = M \text{ (рис. 3, } в\text{).}$$

Для вектора неизвестных $(x_A, y_A, M_A, x_B, y_B, R_C)$ запишем определитель коэффициентов системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l\sin(\alpha-\beta) \end{vmatrix} = l \sin(\alpha - \beta).$$

Определитель системы уравнений равен нулю при $\alpha = \beta$. В этом случае получаем статически неопределимую задачу. При этом величина реакции в шарнире C

$$R_C = \frac{M_B(\overline{P})}{l \sin(\alpha - \beta)} \to \infty .$$

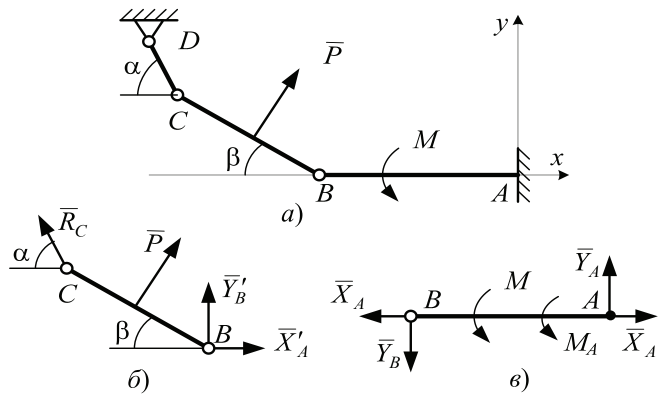

Рис. 3. Механическая стержневая система:
а – схема нагружения системы; *б*, *в* – схемы сил, действующих на стержни CB и AB соответственно

В данном случае можно рассмотреть равновесие одного стержня BC (см. рис. 3, *б*). Определитель третьего порядка системы уравнений равновесия этого стержня легко выделить из полного определителя, так как матрица последнего треугольная. Выделенный определитель равен $\Delta_3 = l\sin(\alpha-\beta)$, то есть $\Delta_3 = \Delta$. Это означает, что стержень AB является дополнительным элементом, который не делает систему стержней статически определимой при $\alpha = \beta$. Здесь, как и в предыдущем примере (см. рис. 2), стержень BC при $\alpha = \beta$ располагается на одной прямой с опорным стержнем.

Приведем пример равновесия системы со скользящим соединением элементов (рис. 4). Стержень AD вставлен в отверстие втулки B, которая жестко соединена со стержнем BC, $AB = l$, $BC = l_1$. Составим систему уравнений равновесия и ее определитель, принимая вектор неизвестных в виде ($x_A, y_A, y_B, M_B, x_C, y_C$):

$$x_A = 0\,;\; y_A + y_B = 0\,;\; x_C = 0\,;\; y_B l + M_B = 0\,;$$

$$y_B - y_C = 0\,;\; y_B l_1 \cos\alpha - M_B = -M\,;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & l_1\cos\alpha & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = l + l_1\cos\alpha\,.$$

Очевидно, что $\Delta = 0$, если $l + l_1\cos\alpha = 0$. Это возможно, если $\alpha > 90^\circ$, тогда $\Delta = l - l_1|\cos\alpha|$ и при $l = l_1|\cos\alpha|$ шарнир C будет находиться на оси *Oy*. В данном случае задача станет статически неопределимой, причем из системы уравнений равновесия в этом случае следует:

$$|y_B| = \frac{M}{l - l_1|\cos\alpha|} \to \infty \text{ и } |M_B| \to \infty\,.$$

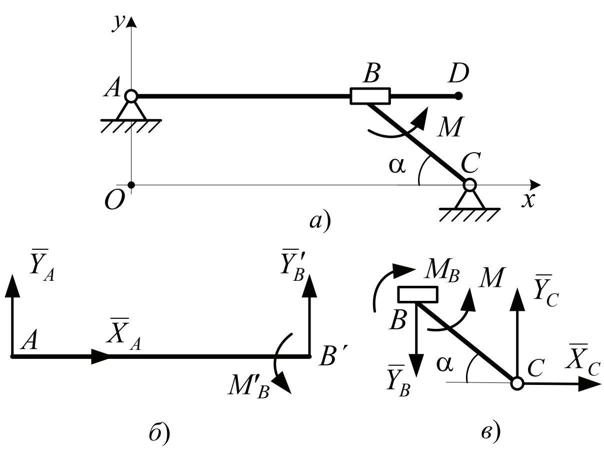

Рис. 4. Система со скользящим соединением элементов:
а – исходная схема; *б*, *в* – схемы сил, действующих на стержни AD и BC соответственно

Покажем особенности оценки статической определимости механических систем в случае пространственной системы активных сил и реакций на примере равновесия плиты (рис. 5, *а*).

Заменив связи реакциями, согласно рис. 5, *б* (где $\overline{R}$ и $\overline{L}_O$ – главный вектор и главный момент внешних активных сил, действующих на плиту), составим уравнения равновесия плиты:

$$\sum F_{kx} = X_O + X_A + c_1 R_B + R_x = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_O + c_2 R_B + R_y = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_O + Z_A + c_3 R_B + R_z = 0;$$

$$\sum M_x(\overline{F}_k) = Z_A b + c_4 R_B + L_{Ox} = 0;$$

$$\sum M_y(\overline{F}_k) = c_5 R_B + L_{Oy} = 0;$$

$$\sum M_z(\overline{F}_k) = X_A b + c_6 R_B + L_{Oz} = 0,$$

где $a = OA; b = OC$; $c_1 = -\cos\beta\sin\alpha\cos\gamma$; $c_2 = -\cos\beta\cos\alpha$; $c_3 = \sin\beta + \cos\beta\sin\alpha \times \times \sin\gamma$; $c_4 = b(\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha\sin\gamma)$; $c_5 = -a\cos\gamma\sin\beta$; $c_6 = (-a\cos\beta\cos\alpha + b\cos\beta \times \times\sin\alpha)\cos\gamma$.

Определитель данной системы уравнений равновесия с вектором неизвестных $(X_O,\ Y_O,\ Z_O,\ X_A,\ Z_A,\ R_B)$ имеет следующий вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & c_6 \end{vmatrix} = ab^2\cos\gamma\sin\beta.$$

В данном случае статическая определимость системы не зависит от угла α, но зависит от значений углов β и γ и размеров плиты. В частности, $\Delta \to 0$, то есть система становится статически неопределимой при $\beta \to 0$, при этом, как следует из уравнений равновесия плиты, $X_O \to \infty$ и $X_A \to \infty$.

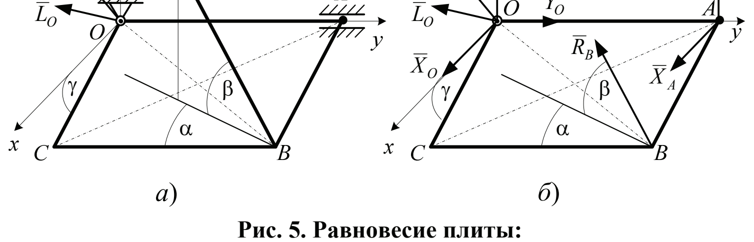

Рис. 5. Равновесие плиты:
а – исходная схема системы; *б* – схема сил, действующих на плиту, освобожденную от связей

Приведенные примеры показывают, что при рассмотрении статической неопределимости задач равновесия механических систем с двусторонними связями необходимо оценивать влияние на нее конкретных значений геометрических параметров систем (угловых и линейных) и их возможных изменений в том или ином диапазоне.

При решении задачи равновесия систем с односторонними связями необходимо определить условия, обеспечивающие сохранение равновесного, устойчивого состояния элементов конструкций, или подобрать необходимый для этого тип связи. В качестве связей такого вида можно указать три реальных схемы сочленения тел, которые часто встречаются в практических конструкциях: подпятник; связь, осуществляемая сухим трением; зубчатое зацепление [2, 3].

Рассмотрим указанную задачу на примере равновесия механической системы (рис. 6).

Система состоит из трех тел: стержня *DC*, диска *C* и балки *BA*, которая закреплена в заделке *A*. Опоры *D* и *C* – цилиндрические шарниры, опора *B* – односторонняя внутренняя связь – подпятник. Заданы геометрические параметры $\beta = 30^\circ$, r, $DE = CD/2$, $BA = l$, $AK = 0{,}6l$ и нагрузки: сила $\overline{P}$, пара сил с моментом M и распределенные силы с постоянной интенсивностью $\overline{q}$.

На рисунке 7 выполнено расчленение механической системы на части и показаны внутренние и внешние реакции (здесь $\overline{Q}$ – равнодействующая распределенных сил с интенсивностью $\overline{q}$).

В рабочем состоянии такая система статически определима: девять независимых уравнений равновесия и девять неизвестных составляющих реакций связей. Составим уравнения равновесия частей данной системы:

$$X_D + X_C = 0\,,\ Y_D + Y_C = 0\,,$$

$$\sum M_D(\overline{F}_k) = Y_C C'D\cos\beta + X_C C'D\sin\beta - PDE\cos\beta = 0\,;$$

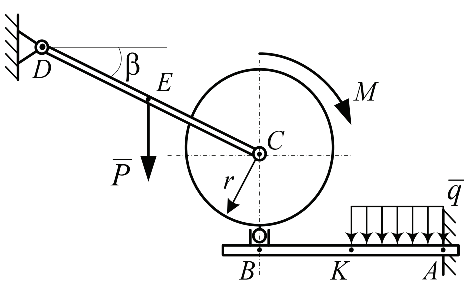

Рис. 6. Система сочлененных тел с односторонней связью

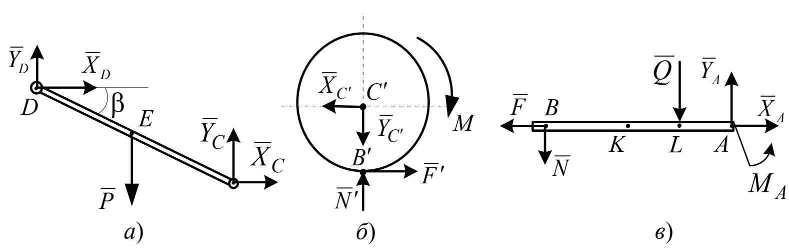

Рис. 7. Система сочлененных тел, разделенная на части:
а, *б*, *в* – схемы сил, действующих на стержень *DC*, диск *C* и стержень *BA* соответственно

$$F' - X_{C'} = 0\,,\ N' - Y_{C'} = 0\,,\ \sum M_C(\overline{F}_k) = F'r - M = 0\,;$$

$$X_A - F = 0\,,\ Y_A - N = 0\,,\ \sum M_B(\overline{F}_k) = M_A + Y_A AB' - QB'L = 0\,,$$

где $KL = LA = 0{,}3l$; $X_C = X_{C'}$; $Y_C = Y_{C'}$; $F = F'$; $N = N'$.

Из уравнений равновесия определяются все реакции связей и, в частности, для реакций в подпятнике B получаем соотношения:

$$F = \frac{M}{r};\ \ N = \frac{P}{2} - \frac{M}{r}\operatorname{tg}\beta\,.$$

При двусторонних связях определение реакций достаточно для дальнейших, например прочностных, расчетов системы, но при односторонних связях этого недостаточно из-за возможной их потери (нарушения) под действием внешних нагрузок. С этих позиций рассмотрим сначала механическую систему с подпятником (см. рис. 6), в которой критическое состояние (нарушение связи) наступает уже при $N = 0$. Из условия сохранения связи (когда $N \ge 0$) получим

$$M \le \frac{\mathrm{Pr}}{2}\operatorname{ctg}\beta\,.$$

Определяющим в данном случае является величина момента M пары сил, приложенной к диску C. Соединение диска C и балки AB (в подпятнике B) представляют собой конструкцию, называемую «замком» (при равновесии). Когда условие равновесия нарушается, «замок» раскрывается.

Рассмотрим «замок», в котором запирание осуществляется сухим трением (см. рис. 2). В этом случае реакция F (см. рис. 7) является силой трения скольжения, которая в отсутствие проскальзывания связана с нормальной реакцией N соотношением

$$F \le fN\,,$$

где f – коэффициент трения скольжения между диском и балкой.

Нарушение контакта диска C и балки AB в данном «замке» может происходить при $N = 0$, при этом возможно проскальзывание диска по балке. Для условия сохранения связи (когда $N \ge 0$), учитывая полученное ранее соотношение для N, получаем неравенство

$$\frac{M}{r}\left(1 + f\operatorname{tg}\beta\right) \le \frac{Pf}{2}\,.$$

В случае зубчатого зацепления между диском и балкой касательная и нормальная составляющие реакции в точке B при эвольвентном зацеплении связаны соотношением

$$N = F\operatorname{tg}\gamma\,,$$

где $\gamma = 15...20^\circ$.

Для условия сохранения связи ($N \ge 0$ и, следовательно, $F > 0$, а также $M > 0$), учитывая полученное ранее из уравнений равновесия соотношение для N, получаем неравенство

$$0 < M \le \frac{\mathrm{Pr}}{2}\operatorname{ctg}\beta\,.$$

На примере рассмотренной механической системы (см. рис. 6) показан метод анализа трех часто встречающихся в технике типов односторонних связей и установлены пределы их нормальной работы.

Задачи с односторонними связями часто встречаются при исследовании динамики механических систем. Рассмотрим подобную задачу на примере простого механизма, состоящего из двух тел (рис. 8). Механизм состоит из ползуна *1* массой m, который может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости, и однородного стержня *2* длиной $2l$ массой $2m$, шарнирно прикрепленного к ползуну в точке *O*. Необходимо определить момент $L(\varphi)$ пары сил, приложенной к стержню, чтобы стержень вращался с постоянной угловой скоростью ω при условии сохранения связи ползуна с плоскостью (неотрыва ползуна от плоскости).

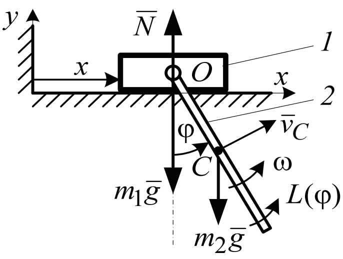

Рис. 8. Двухзвенный механизм

Данная задача является обратной задачей механики, то есть задачей управления. Для ее решения применим уравнение Лагранжа 2-го рода, выбрав в качестве обобщенных координат $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$ (см. рис. 8)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i,\ i = 1, 2\ ,$$

где $\dot{q}_i$ – обобщенные скорости; T – кинетическая энергия системы; Q_i – обобщенные силы, соответственно равные:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{2}{3}m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 \dot{x} l \dot{\varphi}\cos\varphi\ ;\ Q_1 = 0\ ;\ Q_2 = L - m_2 g l \sin\varphi\ .$$

Из уравнений Лагранжа 2-го рода находим уравнение для момента $L(\varphi)$

$$L(\varphi) = 2ml\sin\varphi\left(g + \frac{2}{3}l\omega^2\cos\varphi\right)$$

или, учитывая, что в данном случае $\varphi = \omega t$

$$L(t) = 2ml\sin\omega t\left(g + \frac{2}{3}l\omega^2\cos\omega t\right).$$

Определим критическую угловую скорость при отрыве ползуна от плоскости. Для этого воспользуемся теоремой об изменении количества движении $\overline{Q}$ механической системы в проекции на ось y

$$\frac{dQ_y}{dt} = N - m_1 g - m_2 g\ ,$$

где $Q_y = m_2 l\omega\sin\varphi$.

После подстановки Q_y в эту теорему находим зависимость нормальной реакции от угла поворота стержня

$$N = m_1 g + m_2 g + m_2 l\omega^2\cos\varphi\ .$$

Потеря связи ползуна с плоскостью, когда величина реакции $\overline{N}$ становится равной нулю, будет происходить при значениях $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, ...$ и, соответственно, при величине $\cos\varphi = -1$. С учетом этого, определяем значение критической угловой скорости вращения стержня при отрыве ползуна от плоскости

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}\ .$$

Результаты, представленные в работе, применимы для решения задач строительной практики и машиностроения. Использование материалов данной статьи в учебном процессе высшей школы должно способствовать более глубокому усвоению соответствующих разделов механики.

Список литературы

1. Использование ЭВМ в учебном процессе при изучении курса «Теоретическая механика» : метод. пособие / В. В. Дубинин [и др.]. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 120 с.

2. Методические указания к решению задач и выполнению курсовых заданий по теме «Статика» / В. В. Дубинин [и др.]. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 52 с.

3. Плоская статика / В. В. Дубинин [и др.]. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. – 44 с.

4. Кокушкин, В. В. Пространственная статика / В. В. Кокушкин, С. Н. Саяпин, П. М. Шкапов ; под ред. П. М. Шкапова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. – 44 с.

5. Пространственная статика. Теория и решение типовых задач : метод. указ. к выполнению домашнего задания по курсу «Теоретическая механика» / В. В. Варенцов [и др.] ; под ред. П. М. Шкапова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. – 32 с.

6. Попов, А. И. Теоретическая механика. Сборник задач для творческого саморазвития личности студента : учеб. пособие / А. И. Попов. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 188 с.

7. Попов, А. И. Творческие задачи динамики : учеб. пособие / А. И. Попов. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 80 с.

8. Курс теоретической механики / Под ред. К. С. Колесникова, В. В. Дубинина. – 5-е изд. – М. : Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. – 584 с.

On Static Definability of Mechanical Systems with Two-Way and One-Way Connections

G. I. Dubrovina, V. V. Vitushkin

Department of Theoretical Mechanics, N.E. Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; fn3@bmstu.ru

Keywords: two-way and one-way connections; mechanical systems; loss of communication; mechanism operability; static definability.

Abstract: The article discusses the methods for estimating the static definition of mechanical systems with two-way connections and the influence of the geometric parameters of the systems and their possible changeson it. The features of solving problems of equilibrium of systems with internal one-way connections of three types (thrust bearing; dry friction; gearing) are shown. A method for investigating the operability of mechanisms with non-retaining constraints is given.

References

1. Dubinin V.V., Solokhin Ye.N., Remizov A.V. [et al.]. *Ispol'zovaniye EVM v uchebnom protsesse pri izuchenii kursa «Teoreticheskaya mekhanika»* [Use of Computers in the Learning Process in the Course "Theoretical Mechanics"], Moscow: Izdatel'stvo MGTU im. N. E. Baumana, 2000, 120 p. (In Russ.)

2. Dubinin V.V., Bondarenko N.I., Korovaytseva N.S., Kudrin V.S., Dubinin V.V. [Ed.]. *Metodicheskiye ukazaniya k resheniyu zadach i vypolneniyu kursovykh zadaniy*

po teme «Statika» [Methodological Instructions for Solving Problems and Performing Course Tasks on the Topic "Statics"], Moscow: Izdatel'stvo MGTU im. N. E. Baumana, 2003, 52 p. (In Russ.)

3. Dubinin V.V., Borokhova N.V., Pashkov A.V., Remizov A.V., Dubinin V.V. [Ed.]. *Ploskaya statika* [Flat Statics], Moscow: Izdatel'stvo MGTU im. N. E. Baumana, 2015, 44 p. (In Russ.)
4. Kokushkin V.V., Sayapin S.N., Shkapov P.M., Shkapov P.M. [Ed.]. *Prostranstvennaya statika* [Spatial Statics], Moscow: MGTU im. N. E. Baumana, 2015, 44 p. (In Russ.)
5. Varentsov V.V., Kokushkin V.V., Sayapin S.N., Shkapov P.M., Shkapov P.M. [Ed.]. *Prostranstvennaya statika. Teoriya i resheniye tipovykh zadach: metodicheskiye ukazaniya k vypolneniyu domashnego zadaniya po kursu «Teoreticheskaya mekhanika»* [Spatial Statics. Theory and Solution of Typical Problems: Methodological Instructions for the Homework at the Course "Theoretical Mechanics"], Moscow: Izdatel'stvo MGTU im. N. E. Baumana, 2016, 32 p. (In Russ.)
6. Popov A.I. *Teoreticheskaya mekhanika. Sbornik zadach dlya tvorcheskogo samorazvitiya lichnosti studenta* [Theoretical Mechanics. Collection of Tasks for Creative Codevelopment of the Student's Personality], Tambov: TGTU, 2010, 188 p. (In Russ.)
7. Popov A.I. *Tvorcheskiye zadachi dinamiki* [Creative Problems of Dynamics], Tambov: Izdatel'stvo FGBOU VPO "TGTU", 2012, 80 p. (In Russ.)
8. Kolesnikov K.S., Dubinin V.V. [Eds.]. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* [Course of Theoretical Mechanics], Moscow: MGTU im. N. E. Baumana, 2017, 584 p. (In Russ.)

Über statische Bestimmung der mechanischen Systeme mit bilateralen und einseitigen Bindungen

Zusammenfassung: In dem Artikel sind die Methoden zur Bewertung der statischen Bestimmung mechanischer Systeme mit zweiseitigen Verbindungen und der Einfluss auf diese geometrischer Parameter der Systeme und ihrer möglichen Änderungen beschrieben. Die Eigenschaften der Lösung der Gleichgewichtsprobleme von Systemen mit internen Einwegverbindungen dreier Typen (Axiallager; trockene Reibung; Verzahnung) werden gezeigt. Es ist eine Methode zur Untersuchung der Funktionsfähigkeit von Mechanismen mit unaufhaltsamen Bindungen angegeben.

Sur la détermination statique des systèmes mécaniques avec des liaisons bilatérales et unilatérales

Résumé: Dans l'article sont examinées les méthodes d'évaluation de la détermination statique des systèmes mécaniques avec des liaisons bilatérales et leur impact sur les paramètres géométriques des systèmes et les modifications éventuelles. Sont montrées les caractéristiques de la solution des problèmes de l'équilibre des systèmes avec les liaisons unidirectionnelles internes de trois types (support; frottement sec; engrenage). Est citée la méthode d'étude de l'efficacité des mécanismes avec des liens sans retenue.

Авторы: ***Дубровина Галина Ивановна*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика»; ***Витушкин Вячеслав Валентинович*** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика», ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана», г. Москва, Россия.

Рецензент: ***Пожалостин Алексей Алексеевич*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Теоретическая механика», ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва, Россия.