УДК 517.518
DOI: 10.17277/vestnik.2018.03.pp.492-511

ЗАДАЧИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ДИРИХЛЕ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

Б. П. Осиленкер[1], А. Д. Нахман[2]

Кафедра «Прикладная математика»,
ФБГОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (1), г. Москва, Россия;
кафедра «Техническая механика и детали машин»,
ФБГОУ ВО «ТГТУ» (2), г. Тамбов, Россия;
alextmb@mail.ru

Ключевые слова: весовые оценки максимальных операторов; полунепрерывные методы суммирования; суммируемость почти всюду.

Аннотация: Рассмотрено современное состояние проблемы суммируемости рядов Фурье полунепрерывными методами. Получены оценки средних в терминах максимальной функции Харди. Приведены условия равномерной ограниченности семейства соответствующих операторов в весовых лебеговых пространствах, а также утверждения о сходимости в метрике и почти всюду. В связи с представлением Дирихле полугруппы операторов, коммутирующих со сдвигами, значительное внимание уделено экспоненциальным методам. Соответствующие утверждения установлены в виде следствий для кусочно-выпуклых суммирующих последовательностей. Получены приложения результатов к некасательной суммируемости степенных разложений функций классов Харди. Систематизированы и обобщены, в частности, результаты, полученные в указанных направлениях авторами.

Введение. Постановка задачи

Задача суммирования рядов Фурье имеет, по меньшей мере, два «операторных» аспекта. Для соответствующих формулировок потребуется ряд следующих определений и обозначений. Пусть $L^p_\nu = L^p_\nu(Q)$ – класс измеримых на $Q = (-\pi, \pi]$ 2π-периодических функций f, таких что

$$\| f \|_{\nu, p} = \left(\int_Q | f(x) |^p \, \nu(x) dx \right)^{1/p} < \infty, \ p \geq 1 .$$

Здесь весовая функция $\nu = \nu(x) \geq 0$ также измерима на $Q = (-\pi, \pi]$ и 2π-периодична; в случае $\nu \equiv 1$ имеем классические лебеговские пространства $L^p = L^p(Q)$; $L = L^1(Q)$. Положим

$$A_p(\nu;J)=\left(\frac{1}{|J|}\int_J \nu(t)dt\right)\left(\frac{1}{|J|}\int_J \nu^{-1/(p-1)}(t)dt\right)^{p-1}, \quad p\geq 1,$$

где J – произвольный интервал, а множитель $\left(\int_J \nu^{-1/(p-1)}(t)dt\right)^{p-1}$ считается по определению равным $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in J}\frac{1}{\nu(t)}$ при $p=1$.

Говорят, что выполнено A_p – условие Розенблюма–Макенхоупта [1, 2], и применяют обозначение $\nu\in A_p$, если $\sup_J A_p(\nu;\Omega)<\infty$, $p\geq 1$. В настоящей работе, как и в [2], полагаем, что $0\cdot\infty=0$. Тогда [3]

$$\left(\int_Q \nu^{-1/(p-1)}(t)dt\right)^{p-1}<\infty \text{ для } \nu\in A_p \ (p\geq 1),$$

и можно считать, что каждая $f\in L_\nu^p(Q)$ является также функцией из класса $L(Q)$, что соответствует случаю $\nu\equiv 1$, $p=1$.

Рассмотрим последовательность коэффициентов Фурье функции f

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-ikt)\,dt, \quad k=0,\pm 1,\pm 2,... \tag{1}$$

Первый из вышеупомянутых аспектов состоит в рассмотрении операторного уравнения $Tf=\{c_k\}$ в случае $\{c_k\}\in l_{p'}$ [4, т. 2, с. 154, теорема Рисса]. Имеем, таким образом, задачу восстановления функции $f\in L_\nu^p\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ 1<p\leq 2\right)$, то есть задачу суммирования ее ряда Фурье.

В общем случае проблема формулируется следующим образом: какие условия следует наложить на элементы бесконечной последовательности

$$\Lambda=\{\lambda_k(h),\ h>0,\ k=0,1,...;\ \lambda_0(h)=1\}, \tag{2}$$

чтобы семейство соответствующих средних

$$U_h(f)=U(f,x;\lambda,h)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_{|k|}(h)c_k(f)\exp(ikx) \tag{3}$$

при $h\to+0$ аппроксимировало функцию f:

а) в каждой точке непрерывности;

б) равномерно по x для всякой непрерывной функции;

в) в метрике весовых лебеговых пространств;

г) почти всюду в Q.

Имеется серия работ, исследующих поведение (3) при $h\to+0$ в тех случаях, когда суммирующая последовательность (2) определяется дискретными значениями параметра h, а именно, имеет вид треугольной матрицы

$$\Lambda=\{\lambda_k^n;\ k=0,1,...,n;\ n=0,1,...;\ \lambda_0^n=1,\ \lambda_k^n=0,\ k>n\}.$$

Так, А. В. Ефимов [5], улучшая результаты С. М. Никольского [6] и Б. Надя [7], получил условия на матрицу Λ, обеспечивающие суммируемость рядов Фурье в точках Лебега функций $f \in L(Q)$ и в метрике пространства непрерывных функций. Баусов Л. И. [8] усилил результаты Караматы и Томич [9] и обобщил результаты А. В. Ефимова на случай прямоугольных суммирующих матриц Λ.

1. Представление Дирихле

Переходя ко второму «операторному» аспекту, рассмотрим полунепрерывные методы суммирования, соответствующие случаю

$$\lambda_k(h) = \lambda(x,h)|_{x=k}, \quad k = 0, 1, ...,$$

где

$$\lambda(x,h) = \exp(-h\varphi(x)), \tag{4}$$

полагая при этом, что $\varphi(0) = 0$, функция $\varphi(x) \in C^2(0,+\infty)$ и возрастает к $+\infty$. Важнейшим примером является метод Пуассона–Абеля [4, т. 1, с. 160 – 165], соответствующий случаю $\lambda(x,h) = \exp(-hx)$.

Интерес к случаю экспоненциальных методов суммирования (4) во многом обусловлен так называемым представлением Дирихле полугруппы операторов в L^p_ν, $p \ge 1$, коммутирующих со сдвигами.

Речь идет о произвольной полугруппе $G = \{T(h),\ h > 0\}$ линейных ограниченных операторов, перестановочной с группой действительных переносов по независимому переменному и преобразующих в себя L^p_ν или пространство $C = C(Q)$ непрерывных 2π-периодических функций.

Согласно общей теории тригонометрических полугрупп [10, с. 561 – 565], каждый оператор $T(h)$ представляет собой преобразование посредством последовательности некоторых мультипликаторов

$$T(h)f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{|k|}(h)c_k(f)\exp(-ikx), \quad f \in L^p \text{ или } f \in C, \tag{5}$$

причем $\lambda_k(h_1 + h_2) = \lambda_k(h_1)\lambda_k(h_2)$.

Если, кроме того, $T(h)$ слабоизмеримы, то $T(h)$ непрерывны в сильной операторной топологии при $h > 0$.

Доказательство данного утверждения, приведенное в [10, с. 561, п. 20.3, теорема 2.30.1] для классов C и L^p, сохранится при переходе к L^p_ν $(\nu \in A_p,\ p \ge 1)$, поскольку основано только на свойстве коммутирования оператора $T(h)$ с переносами, его линейности и ограниченности.

Далее, согласно [10, с. 159, п. 4.17, следствие 4.17.1], если $T(h)$ слабоизмеримы, то $\lambda_k(h)$ имеют экспоненциальный вид, а именно, справедливо следующее представление Дирихле полугруппы $G = \{T(h),\ h > 0\}$

$$T(h)f \sim \sum_{k\in\Omega} \exp(-h\varphi_k)c_k(f)\exp(-ikx), \tag{6}$$

где $\{\varphi_k,\ k \in \Omega\}$ – некоторая последовательность комплексных чисел, $\Omega \subseteq \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.

Обратно [10, с. 159, теорема 2.30.2] семейство операторов, определенных на L^p посредством (6), представляет собой полугруппу линейных ограниченных операторов, перестановочных с переносами. Эта полугруппа непрерывна при $h > 0$ в сильной операторной топологии.

В частности [11, с. 698, гл. 8], такую полугруппу порождает семейство сверток функций f с так называемой θ_3-функцией

$$T(h) f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-hk^2) c_k(f) \exp(-ikx).$$

Возникает вопрос об эффективных достаточных условиях на мультипликаторы экспоненциального вида, порождающих соответствующую полугруппу операторов; здесь в качестве мультипликаторов рассматриваем случай последовательности действительных чисел (4) и предлагаем, в частности, решение данной задачи в случае операторов из L_ν^p в L_ν^p ($\nu \in A_p$, $p \ge 1$) или же из C в C Удобнее применить обозначение $T_h = T_h(f)$ вместо $T(h) = T(h) f$. Речь пойдет об операторах вида

$$T_h(f) = T_h(f; x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-h\varphi(k))\, c_k(f)\, \exp(-ikx). \tag{7}$$

Согласно [12, с. 79, п. 4.1], метод суммирования (2) является регулярным (сохраняющим сходимость), если выполнены условия:

а) $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k(h) = 0;\ \ h > 0;$

б) $\lim\limits_{h\to 0} \lambda_k(h) = 1;\ \ k = 0, 1, \ldots;$

в) суммы $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\lambda_k(h) - \lambda_{k+1}(h)|$ равномерно по h ограничены.

Очевидно, что при выполнении условия

$$\sup_{h>0} \sum_{k=0}^{\infty} |\exp(-h\varphi(k)) - \exp(-h\varphi(k+1))| < \infty \tag{8}$$

метод суммирования (4) оказывается регулярным. При этом условие (8) в нашем случае имеет место, поскольку $\{\varphi(k)\}$, $k = 0, 1, \ldots$, не возрастает, так что сумма ряда в (8) есть $\exp(-h\varphi(0)) = 1$.

Для регулярных методов наиболее простым является случай L_ν^p, $\nu \in A_p$, $p > 1$. В этом случае семейство операторов (7) равномерно по h ограниченно в L_ν^p, $\nu \in A_p$, $p > 1$; при этом

$$\lim_{h\to 0} \| T_h(f) - f \|_{\nu,p} = 0, \quad p > 1. \tag{9}$$

Первое из утверждений вытекает из оценки [13, теорема 8]

$$\sup_k \| s_k(f) \|_{\nu,p} \le C_{\nu,p} \| f \|_{\nu,p},$$

в которой $\{ s_k(f),\ k = 0, 1, \ldots \}$ – последовательность частных сумм ряда Фурье; здесь и в дальнейшем C постоянные (вообще говоря, различные), которые могут зависеть лишь от указанных индексов.

Далее, соотношение (9) вытекает из сходимости [13, теорема 8]

$$\| s_k(f) - f \|_{\nu,p} \to 0; \quad k \to \infty \ (\nu \in A_p,\ p > 1)$$

и регулярности метода суммирования (4). Более общий результат будет представлен ниже в п. 6.

2. Весовые оценки максимальной функции Харди–Литтлвуда

Пусть E – множество, измеримое по Лебегу. Введем следующую меру E: $\mu\{E\} = \int_E \nu(x)dx$. Мера каждого такого E конечна, поскольку из A_p-условия вытекает, что $\int_Q \nu(x)dx < \infty$, если исключить из рассмотрения тривиальный случай $\nu(x) \sim \infty$.

Для всякой $f \in L$ определена максимальная функция Харди–Литтлвуда [4, т. 1, с. 60 – 61]

$$f^* = f^*(x) = \sup_{\eta>0} \frac{1}{\eta} \int_{x-\eta}^{x+\eta} | f(t) | \, dt .$$

Согласно результатам [2], оценка «сильного типа»

$$\| f^* \|_{\nu,p} \le C_{\nu,p} \, \| f \|_{\nu,p} \tag{10}$$

равносильна условию $\nu \in A_p$, если $p > 1$. Кроме того, оценка «слабого типа»

$$\mu\{x \in Q \mid f^*(x) > \varsigma > 0\} \le C_{\nu,p} \left(\frac{\| f \|_{\nu,p}}{\varsigma} \right)^p \tag{11}$$

равносильна условию $\nu \in A_p$, $p \ge 1$.

3. Оценки средних

Положим $\Delta\lambda_k(h) = \lambda_k(h) - \lambda_{k+1}(h)$ и $\Delta^2\lambda_k(h) = \Delta(\Delta\lambda_k(h))$, $k = 0, 1, \ldots$. Пусть, далее, $m \ge 0$ – произвольное целое число (m может зависеть от h),

$$\sum(h,\lambda,m) = \max_{k=0,1,\ldots} |\lambda_k(h)| + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(|m-k|+1)}{m+k+1} \ln \frac{2(m+k+1)}{|m-k|+1} |\Delta^2\lambda_k(h)| \tag{12}$$

и $\rho = [m/2]$.

Лемма 3.1. При всех $N = 0, 1, \ldots$ имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{k=0}^{N} |\Delta\ \lambda_k(h)| \le \max_{k=0,1,\ldots} |\lambda_k(h)| + \sum_{k=0}^{N} \frac{(k+1)(|m-k|+1)}{m+k+1} \ln \frac{2(m+k+1)}{|m-k|+1} |\Delta^2\lambda_k(h)|; \tag{13}$$

$$\lambda_N(h) = \sum_{s=N}^{\infty} \Delta\lambda_k(h); \tag{14}$$

$$(N+1)\,|\Delta\lambda_N(h)| \le \sum_{k=N}^{\infty} (k+1) |\Delta^2\lambda_k(h)|; \tag{15}$$

$$(\rho+1)\ \Delta\lambda_{\rho+1}(h)=\lambda_0(h)-\lambda_{\rho+1}(h)+\sum_{k=0}^{\rho}(k+1)\Delta^2\lambda_k(h). \qquad (16)$$

В частности, при выполнении условий

$$\sup_{h,m}\sum(h,\lambda,m)<\infty; \qquad (17)$$

$$\lim_{h\to 0}\lambda_k(h)=1;\quad k=0,1,... \qquad (18)$$

метод суммирования (4) является регулярным.

Соотношения (14) – (16) могут быть установлены стандартным образом [5]. Что касается условий регулярности (п. 1, а) и в)), то неравенство (13) вытекает из оценки (2.7) работы [5], и, согласно (17), тогда выполняется условие в); условие а) непосредственно следует из (14) и условия в).

Имеет место следующая

Теорема 3.1. Пусть члены последовательности (2) при каждом $h>0$ удовлетворяют условиям (17) и

$$\lambda_k(h)=O\left(\frac{1}{\ln k}\right),\ k\to\infty. \qquad (19)$$

Тогда для почти всех x ряд (3) сходится и для любого $h>0$ имеет место оценка

$$|U(f,x;\lambda,h)|\le C f^*(x)\sum(h,\Lambda,m). \qquad (20)$$

Доказательство. Рассмотрим ядра Дирихле, Фейера [4, т. 1, с. 86, 148] и Валле-Пуссена [5], соответственно:

$$D_k(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{k}\cos\nu t=\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t};$$

$$F_k(t)=\frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k}D_\nu(t)=\frac{\sin^2\frac{k+1}{2}t}{2(k+1)\sin^2\frac{1}{2}t},\quad F_{-1}(t)\equiv 0;$$

$$V_{m,k}(t)=\frac{\sin\frac{m-k+1}{2}t\cdot\sin\frac{m+k+1}{2}t}{2(m-k+1)\sin^2\frac{t}{2}},\quad V_{m,m+1}(t)=\frac{t\sin(m+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Легко проверить, что при всех $k=0,1,...,$ $m=0,1,...$

$$D_k(t)=(k+1)F_k(t)-kF_{k-1}(t); \qquad (21)$$

$$D_k(t)=(m-k+1)V_{m,k}(t)-(m-k)V_{m,k+1}(t). \qquad (22)$$

Далее, перейдем к интегральной форме (3), воспользовавшись представлением (1) коэффициентов Фурье и преобразованием Абеля [4, т. 1, с. 15]. Получаем

$$U(f,x;\lambda,h)=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(h)\cos k(x-t)\right\}dt=$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(h)(D_k(t) - D_{k-1}(t)) \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{N\to+\infty} \left\{ \lambda_N(h) \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, D_N(t)\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) + \sum_{k=0}^{N-1} \Delta\lambda_k(h) D_k(t) dt \right\}.$$

Заметим, что для каждой $f \in L(Q)$ при $N \to \infty$ почти всюду (а именно, в каждой точке Лебега) имеет место соотношение [4, т. 1, с. 113]

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t)\, dt \right| = o(\ln N).$$

Значит, согласно (21) и (22) для почти всех x

$$U(f, x; \lambda, h) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\ \Delta\lambda_k(h) D_k(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \sum_{k=0}^{\rho} \Delta\lambda_k(h)\big((k+1)F_k(t) - kF_{k-1}(t)\big) \right\} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \sum_{k=\rho+1}^{N} \Delta\lambda_k(h)\Big((m-k+1)V_{m,k}(t) - (m-k)V_{m,k+1}(t)\Big) \right\} dt. \qquad (23)$$

Применяя преобразование Абеля, будем иметь из равенства (23)

$$U(f, x; \lambda, h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\big(x+t\big) \left\{ \Delta\lambda_\rho(h)(\rho+1)F_\rho(t) + \sum_{k=0}^{\rho-1} \Delta^2\lambda_k(h)(k+1)F_k(t) \right\} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \Delta\ \lambda_{\rho+1}(h)(m-\rho)V_{m,\rho+1}(t) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ -\Delta\lambda_N(h)(m-N)V_{m,N+1}(t) - \sum_{k=\rho+1}^{N-1} \Delta^2\lambda_k(h)(m-k)V_{m,k+1}(t) \right\} dt. \quad (24)$$

Далее [3], имеют место следующие оценки для интегралов, содержащихся в правой части (24):

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\, f(x+t)\,|\ F_k(t)\, dt\ \le C\ f^*(x)\,,\ \ k = 0, 1, ...;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\, f(x+t)\,|\, |\, V_{m,k}(t)\,|\, dt \le C\ \ln \frac{2(m+k+1)}{|\, m-k\,| + 1}\ f^*(x)\,,\ k = 0, 1, ...;\ m = 0, 1, ... \qquad (25)$$

Применяя эти оценки интегралов к (24) и учитывая, что отношение $\dfrac{m+\rho+2}{m-\rho+1}$ (возникающее под знаком логарифма) заключено между двумя положительными постоянными, будем иметь

$$|\, U(f, x; \lambda, h)\,| \le Cf^*(x) \left\{ |\, \Delta\lambda_\rho(h)\,|\,(\rho+1) + \sum_{k=0}^{\rho-1} |\, \Delta^2\lambda_k(h)\,|\,(k+1) + \right.$$

$$+|\Delta\lambda_{\rho+1}(h)|(m-\rho)+\lim_{N\to\infty}\left\{|\Delta\lambda_N(h)|\left(|m-N|+1\right)\ln\frac{2(m+N+1)}{|m-N|+1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=\rho+1}^{N-1}|\Delta^2\lambda_k(h)|\left(|m-k|+1\right)\ln\frac{2(m+k+1)}{|m-k|+1}\right\}\right\}. \tag{26}$$

Заметим, что

$$\lim_{N\to\infty}|\Delta\lambda_N(h)|(|m-N|+1)\ \ln\frac{2(m+N+1)}{|m-N|+1}=0 \tag{27}$$

благодаря (15) и двухсторонней оценке

$$C_1(k+1)\le\frac{(k+1)(|m-k|+1)}{m+k+1}\ln\frac{2(m+k+1)}{|m-k|+1}\le C_2(k+1),\ 0\le k\le\rho,\ \ k\ge 2m \tag{28}$$

(и, в частности, при $k\ge N\ge 2m)$; здесь C_1 и C_2 – положительные абсолютные постоянные.

Теперь, согласно (25) и (27), ряд, записанный в (24), оказывается мажорируемым рядом, который, следовательно, сходится для почти всех x. Далее, в силу (16), получаем из соотношения (27) утверждение (20). Теорема полностью доказана.

Замечание 3.1. В работе [3] утверждение (20) было доказано с использованием суммы

$$\sum\nolimits_*(h,\lambda,m)=\max_{k=0,1,\ldots}|\lambda_k(h)|+\sum_{k=0}^{\rho}(k+1)|\Delta^2\lambda_k(h)|+\sum_{k=2m}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_k(h)|+$$

$$+\sum_{k=\rho+1}^{2m-1}(|m-k|+1)\ln\frac{2(m+k+1)}{|m-k|+1}|\Delta^2\lambda_k(h)|$$

вместо (12). Благодаря двухсторонней оценке (28) отношение сумм $\sum(h,\lambda,m)$ и $\sum_*(h,\lambda,m)$ заключено между двумя положительными постоянными, так что результаты доказанной здесь теоремы 3.1 и теоремы 2.1 работы [3] эквивалентны.

Замечание 3.2. Если параметр h пробегает дискретные значения $h=h_m=\frac{1}{m+1}$, $m=0,1,\ldots$, так что $\lambda_k(h)=\lambda_k^m$ в (2) и $\lambda_k^m=0$ при $k=0,1,\ldots$, то в правой части (8) получаем сумму Б. Надя [5]:

$$U(f,x;\lambda,h_m)\le Cf^*(x)\left\{\max_{k=0,1,..,m}|\lambda_k^m|+\sum_{k=0}^{\rho}|\Delta^2\lambda_k^m|(k+1)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=\rho+1}^{m}|\Delta^2\lambda_k^m|(m-k+1)\ln\frac{2(m+k+1)}{m-k+1}\right\}.$$

4. Весовые оценки максимального оператора и суммируемость рядов Фурье

Положим $U_*(f)=U_*(f,x;\lambda)=\sup\limits_{h>0;\ m=0,1,\ldots}\dfrac{U_*(f,x;\lambda)}{\Sigma(h,\lambda,m)}$.

Теорема 4.1. Пусть последовательность (2) при всех $h>0$ удовлетворяет условиям (17), (19) и $\nu\in A_p$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$\| U_*(f) \|_{\nu,p} \le C_{\lambda,p} \| f \|_{\nu,p}, \quad p > 1; \tag{29}$$

$$\mu\{x \in Q \mid U_*(f,x;\lambda) > \varsigma > 0\} \le C_{\lambda,p} \left(\frac{\| f \|_{\nu,p}}{\varsigma} \right)^p, \quad p \ge 1. \tag{30}$$

Результат немедленно вытекает из (20) и оценок, соответственно, сильного и слабого типов (10), (11).

Теорема 4.2. Пусть последовательность (2) удовлетворяет условиям (17) – (19). Тогда соотношение

$$\lim_{h \to 0} U_h(f) = f \tag{31}$$

имеет место:

а) в метрике пространства $C = C(Q)$ 2π-периодических функций, непрерывных на Q;

б) в метрике каждого из пространств L_ν^p, $p \ge 1$, если $\nu \in A_p$;

в) μ-почти всюду для каждой $f \in L_\nu^p$, $p \ge 1$, если $\nu \in A_p$.

Доказательство а) вытекает из равномерной ограниченности семейства констант Лебега метода суммирования (2) условия (18) и теоремы Банаха–Штейнгауза. Далее, согласно (29) имеем равномерную (по h) ограниченность семейства норм операторов, действующих из L_ν^p в L_ν^p, если $\nu \in A_p$, $p > 1$. В случае $p = 1$ из (24) с помощью замены переменных $\tau = x + t$ будем иметь

$$\| U_h(f) \|_{\nu,1} \le C \sum (h,\lambda,m) \left(\int_{-\pi}^{\pi} | f(\tau) | \nu^*(\tau) d\tau \right). \tag{32}$$

Как хорошо известно [2], условие $\nu \in A_1$ равносильно

$$\nu^*(\tau) \le C\nu(\tau), \tag{33}$$

так что из (32), (33) вытекает оценка

$$\| U_h(f) \|_{\nu,1} \le C \| f \|_{\nu,1} \sum (h,\lambda,m). \tag{34}$$

Итак, согласно (31), (26) и (34) семейства норм операторов $U_h(f)$ ограничены из C в C и из L_ν^p в L_ν^p, если $\nu \in A_p$, $p \ge 1$ и остается применить теорему Банаха–Штейнгауза. Утверждение в) вытекает стандартным образом [4, т. 2, с. 464 – 465] из оценки слабого типа (30) и результатов а) и б).

5. Выпуклые и кусочно-выпуклые методы суммирования

Последовательность (2) называется выпуклой (вогнутой), если $\Delta^2\lambda_k(h) \ge 0$ $(\Delta^2\lambda_k(h) \le 0)$ при всех $k = 0, 1, \ldots$. Последовательность (2) называется кусочно-выпуклой, если вторые конечные разности $\Delta^2\lambda_k(h)$ имеют конечное число перемен знаков (значения k, при которых происходит перемена знака, могут зависеть от h).

Теорема 5.1. Если выпуклая (вогнутая) последовательность (2) удовлетворяет условию (19) и $\nu \in A_p$, то (при соответствующих значениях p) имеют место оценки (27), (28).

Если выполнено также условие (18), то справедливы утверждения о сходимости а) – в) теоремы 4.2.

Теорема 5.2. Пусть кусочно-выпуклая последовательность (2) удовлетворяет условию (19), и существует постоянная C_λ, такая, что для всех $h>0$, $k=1, 2, ...$

$$|\lambda_k(h)|+k|\Delta\lambda_k(h)|\le C_\lambda \tag{35}$$

Если $\nu\in A_p$, то (при соответствующих значениях p) имеют место оценки (29), (30).

Если выполнено также условие (19), то справедливы утверждения о сходимости а) – в) теоремы 4.2.

Доказательства, как и выше, основаны на оценке $U_*\left(f,x;\lambda\right)\le C_\lambda f^*\left(x\right)$. В свою очередь ее получение базируется на соотношениях (19), (17) и

$$(N+1)|\Delta\lambda_N(h)|\to 0,\ N\to\infty. \tag{36}$$

Соотношение (36) справедливо для всякой выпуклой последовательности [4, т. 1, с. 15], а значит, остается выполненным и для всякой кусочно-выпуклой последовательности (ясно, что всякая кусочно-выпуклая последовательность (2) становится выпуклой или вогнутой для достаточно больших значений k).

Как показано в [3], условие (17) выполнено для всякой кусочно-выпуклой последовательности при $m=0$ [14, с. 476–477].

6. Экспоненциальные методы суммирования

Интерес к экспоненциальным методам (4), помимо представления Дирихле, вызван рядом задач. Так, в недавних работах [15, 16] установлена связь проблемы сходимости средних в метриках пространств $C(Q)$, $L^p(p\ge1)$ и в точках Лебега, со свойствами преобразования Фурье «суммирующей» экспоненциальной функции. Результаты [15, 16] тем самым актуализируют задачу об эффективных условиях на «суммирующую» последовательность, которые обеспечивают сходимость соответствующих средних рядов Фурье, и, в частности, экспоненциальных средних. Далее, семейство экспоненциальных средних является универсальной обобщенной математической моделью ряда процессов тепломассопереноса [17].

Задача исследования этих средних была поставлена первым из авторов настоящей работы. Начальные результаты в соответствующем направлении были затем получены в [18]. Некоторые общие подходы к решению данной задачи предложены в [19].

Согласно (4) и теореме Лагранжа, исследование свойства кусочной выпуклости экспоненциальной суммирующей последовательности сводится к исследованию знаков функций

$$\psi(x)=h(\varphi'(x))^2-\varphi''(x),\ x>0 \tag{37}$$

и $\varphi''(x)$, соответственно.

Следствие 6.1. Если функция $\varphi(x)$, определенная в (4), удовлетворяет условию

$$\exp(-h\varphi(x))\ln x=O(1),\quad x\to+\infty,\quad h>0, \tag{38}$$

и $\varphi''(x)\le0$ на $(0,+\infty)$, то для $\nu\in A_p$ (при соответствующих значениях p) имеют место оценки (29), (30) и справедливы утверждения о сходимости а) – в) теоремы 4.2.

Действительно, при условии (38) будет выполнено (19) и последовательность (4) является выпуклой.

Следствие 6.2. Пусть функция $\varphi(x)$, определенная в (4), удовлетворяет условию (38), существует постоянная C_φ, такая что

$$h x \varphi'(x) \exp(-h\varphi(x)) \le C_\varphi \text{ на } (0,+\infty) \tag{39}$$

и функция $\psi(x)$ в (37) меняет на $(0,+\infty)$ знак конечное число раз. Тогда для $\nu \in A_p$ (при соответствующих значениях p) имеют место оценки (29), (30) и справедливы утверждения о сходимости а) – в) теоремы 4.2.

Действительно, в силу (38) и (39) будут выполнены условия (19) и (35) соответственно; последовательность (4) при этом будет кусочно-выпуклой.

Возвращаясь к представлению Дирихле (7), получаем теперь, что если последовательность мультипликаторов $\{\exp(-h\varphi(k))\}$ определена соотношением (4) и выполнены условия следствия 6.1 либо 6.2, то для $\sup\limits_{h>0} |T(h,x)|$ справедливы оценки вида (29), (30). В частности, семейство $T(h,x)$ равномерно (по $h>0$) ограничено в L_ν^p, $p \ge 1$; при этом соотношение

$$\lim_{h\to 0} T_h(f) = f$$

имеет место в смысле пп. а) – в) теоремы 4.2.

7. Примеры

Примеры полунепрерывных методов суммирования, которые могут быть применены к рядам Фурье, представлены в работе [20]. Остановимся на примерах экспоненциальных методов (4), удовлетворяющих условиям теорем 4.1, 4.2 [3, 19]:

1) метод, определяемый функцией

$$\varphi(x) = \ln^\alpha (x+1), \quad x>0,\ \alpha>0;$$

2) случай функции

$$\varphi(x) = x^\alpha,\ x>0,\ \alpha>0;$$

3) полиномиально-экспоненциальный метод, определяемый функцией

$$\varphi(x) = P_n(x),\ x>0;\ P_n(0)=0,$$

здесь $P_n(x)$ – некоторый полином с положительным старшим коэффициентом, $n = 1, 2, \ldots$.

Отметим также случаи средних (C,α), $\alpha>0$ Чезаро–Абеля [4, т. 1, с. 131], которые определены элементами треугольной матрицы

$$\Lambda = \left\{ \lambda_k^m = \frac{A_{m-k}^\alpha}{A_m^\alpha};\ k=0,1,\ldots,m;\ m=0,1,\ldots;\ \lambda_k^m = 0,\ k>m \right\},$$

где $A_m^\alpha = \dfrac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+m)}{m!}$. Как известно [14, с. 482–483], данный метод суммирования удовлетворяет условию Б. Надя (см. замечание 3.2), следовательно, для соответствующих средних справедливы утверждения теорем 4.1 и 4.2.

8. Некасательная суммируемость

Рассмотрим поведение средних $U_h(f) = U(f,y;\Lambda,h)$ при $(y,h)\to(x,0)$ в том случае, когда точка (y,h) остается в границах «угловой» области

$$\Gamma_d(x) = \left\{ (y,h) \mid y \in [-\pi,\pi],\ h>0,\ \frac{|y-x|}{h} \le d \right\},\ d = \text{const},\ d>0.$$

Положим $m=[1/2dh]$;

$$\Sigma^{\#}(h,\lambda)\;=\max_{k=0,1,\ldots}|\lambda_k(h)|+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(|m-k|+1)}{m}\ln\frac{2(m+k+1)}{|m-k|+1}|\Delta^2\lambda_k(h)|;$$

$$U_{**}\left(f,x;\lambda\right)=\sup_{(y,\,h)\in\Gamma_d(x)}\frac{U\left(f,y;\lambda,h\right)}{\Sigma^{\#}\left(h,\lambda\right)}.$$

Следующий результат является обобщением утверждения теоремы 1 статьи [21].

Теорема 8.1. Если члены последовательности (2) при каждом $h>0$ удовлетворяют условию

$$|\lambda_N(h)|\,N+|\Delta\lambda_N(h)|N^2=o(1),\;N\to\infty, \qquad (40)$$

то имеет место оценка

$$U_{**}(f,x;\lambda)\le C_\lambda f^*(x).$$

Доказательство состоит из нескольких этапов. В силу неравенства $\frac{1}{m}\ge 2dh$ оказывается справедливым соотношение $|y-t|\ge\frac{1}{2}|x-t|$ при всех t, удовлетворяющих условию $|x-t|\ge\frac{1}{m}$. В этом случае могут быть установлены следующие оценки [22]:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(t)V_{m,k}(y-t)\,dt\right|\le C\ln\frac{2(m+1)}{|m-k|+1}f^*(x),\quad \left(1\le k\le 2m-1,\,(y,h)\in\Gamma_d(x)\right); \qquad (41)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)\right|F_k(y-t)\,dt\le C\frac{m+k+1}{m}f^*(x),\left(k=0,\ldots,\rho;\,k=2m-1,\,2m,\ldots.(y,h)\in\Gamma_d(x)\right).(42)$$

В частности, при $k=m$ и всех $(y,h)\in\Gamma_d(x)$ из соотношения (41) вытекает неравенство

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_m(y-t)\,dt\right|\le C\;\;\ln\left(m+1\right)\;f^*\left(x\right),$$

имеющее и самостоятельный интерес.

На втором этапе доказательства применяется преобразование (17). Результат теоремы будет тогда вытекать из оценок (41), (42) и условия (40).

Из теоремы 8.1 и оценок (10), (11) получаем следующий результат.

Теорема 8.2. 1) Пусть последовательность (2) при всех $h>0$ удовлетворяет условию (40) и $\nu\in A_p$. Тогда имеют место оценки:

$$\|U_{**}(f)\|_{\nu,p}\le C_{\lambda,p}\,\|f\|_{\nu,p},\quad p>1;$$

$$\mu\{x\in Q\,|\,U_{**}(f,x;\lambda)>\varsigma>0\}\le C_{\lambda,p}\left(\frac{\|f\|_{\nu,p}}{\varsigma}\right)^p,\;p\ge 1.$$

2) Если, кроме того, последовательность (2) удовлетворяет условиям (18) и

$$\Sigma^{\#}(h,\lambda)\le C_\lambda,$$

то μ-почти всюду имеет место соотношение

$$\lim_{\substack{(y,h)\to(x,0)\\(y,h)\in\Gamma_d(x)}} U(f,y;\lambda,h)=f(x).$$

9. Некасательная суммируемость: кусочно-выпуклые методы

Как показано в работе [3], всякая кусочно-выпуклая последовательность, убывающая столь быстро, что выполнено соотношение (40), удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,|\,\Delta^2\lambda_k(h)\,|\;\le C_\lambda.$$

Далее, заметим, что при $k\ge\rho\ge1$

$$\frac{(k+1)(|\,m-k\,|+1)}{m}\ln\frac{2(m+k+1)}{|\,m-k\,|+1}\le\frac{(k+1)(|\,m-k\,|+1)}{m}\,\frac{2(m+k+1)}{|\,m-k\,|+1}\le C\frac{k^2}{m};$$

$$\frac{(k+1)(|\,m-k\,|+1)}{m}\ln\frac{2(m+k+1)}{|\,m-k\,|+1}\le Ck,\quad 1\le k\le\rho,$$

и, таким образом, сумма $\Sigma^{\#}(h,\lambda)$ не превосходит $C\Sigma^{\#\#}(h,\lambda)$, где

$$\Sigma^{\#\#}(h,\lambda)=\max_{k=0,1,\ldots}|\,\lambda_k(h)\,|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(k+m)}{m}\,|\,\Delta^2\lambda_k(h)\,|;$$

$$\Sigma^{\#\#}(h,\lambda)\le\max_{k=0,1,\ldots}|\,\lambda_k(h)\,|+\sum_{k=1}^{m-1}k\,|\,\Delta^2\lambda_k(h)\,|+\sum_{k=m}^{\infty}\frac{k^2}{m}\,|\,\Delta^2\lambda_k(h)\,|. \qquad (43)$$

Будем считать, что при всех $k\ge m$ последовательность (2) уже сохраняет свой знак; пусть для определенности, это будет знак плюс. Применив ко второй сумме в (43) дважды преобразование Абеля, в силу (40) будем иметь

$$\sum_{k=m}^{\infty}|\,\Delta^2\lambda_k(h)\,|\frac{k^2}{m}=\frac{1}{m}\sum_{k=m}^{\infty}k^2\Delta^2\lambda_k(h)=\frac{1}{m}(m^2\Delta^2\lambda_m(h)+\sum_{k=m+1}^{\infty}(2k-1)\Delta\lambda_k(h))=$$

$$=m\Delta^2\lambda_m(h)+\frac{2m+1}{m}\Delta\lambda_{m+1}(h)+\frac{1}{m}\sum_{k=m+2}^{\infty}\lambda_k(h)\;. \qquad (44)$$

Согласно (40), первые два слагаемых в правой части (44) равномерно ограничены; таким образом, при выполнении условия

$$\frac{1}{m}\sum_{k=m+2}^{\infty}|\,\lambda_k(h)\,|\;\le C_\lambda \qquad (45)$$

утверждение 1) теоремы 8.2 имеет место для всякой кусочно-выпуклой последовательности (2). В случае, когда выполнено условие (18), справедливо и утверждение 2) данной теоремы.

Рассмотрим в качестве примера экспоненциальный метод суммирования

$$\lambda_k(h)=\exp(-hk^{\alpha}),\ \alpha\ge1, \qquad (46)$$

определяемый функцией $\lambda(x,h)=\exp(-hx^{\alpha})$, $\alpha\ge1$. Классический случай $\alpha=1$ (случай средних Пуассона–Абеля) хорошо изучен [4, т. 1, с. 167], поэтому ограничимся рассмотрением $\alpha>1$. Как отмечено в п. 7, последовательность (46) кусочно-выпукла, а именно (см. (37)), ее вторые разности сохраняют знак плюс при выполнении условия $h\alpha^2 x^{2\alpha-2} - \alpha(\alpha-1)x^{2\alpha-2} \ge 0$, то есть при всех

$$k \ge \left(\frac{\alpha-1}{\alpha h}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Проверим выполнимость условия (45). С учетом выбора $m = \left[\frac{1}{2dh}\right]$, достаточно тогда, чтобы во второй сумме в (43) целое m удовлетворяло неравенству

$$m \ge \left(\frac{2d(\alpha-1)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} m^{\frac{1}{\alpha}}, \text{ то есть } m \ge \left(\frac{2d(\alpha-1)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

В свою очередь это неравенство выполнено при выборе достаточно малых положительных значений h (меньших некоторой постоянной, зависящей лишь от α и d). Ввиду убывания функции $\lambda(x,h) = \exp(-hx^{\alpha})$, $\alpha \ge 1$, имеем тогда сумму в (45) не превосходящей

$$\frac{1}{m}\sum_{k=2}^{\infty} |\lambda_k(h)| \le \frac{1}{m}\int_0^{\infty} \exp(-hx^{\alpha})dx = \frac{1}{\alpha m} h^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{\alpha}-1} \exp(-t)dt \le C_{\alpha} h^{1-\frac{1}{\alpha}} \Gamma(\frac{1}{\alpha}), \quad (47)$$

где $\Gamma = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ – гамма-функция Эйлера. При $\alpha > 1$ правая часть (47) не больше некоторой постоянной, зависящей лишь от α. В случае (46) легко проверить также выполнимость условий (40). Таким образом, утверждения теоремы 8.2 имеют место для экспоненциальных методов суммирования (46).

10. Приложение к некасательной суммируемости степенных разложений функций классов Харди

Пусть $H_{\nu}^{p} = H_{\nu}^{p}(Q)$ – класс функций $\Phi = \Phi(z)$ комплексного переменного $z = r\exp(ix)$, $0 < r < 1$, $x \in Q$, аналитических в круге $|z| < 1$, для каждой из которых

$$\|\Phi\|_{\nu,p} = \sup_{0 \le r < 1} \int_Q |\Phi(r\exp(ix))|^p \, \nu(x)\, dx < \infty \text{ и } \operatorname{Im}\Phi(0) = 0.$$

Частными случаями H_{ν}^{p} являются классы Харди $H^p = H^p(Q)$ (случай $\nu \equiv 1$); при $p = 1$ используем обозначение $H = H(Q)$ [4, т. 1, с. 431]. Если $\nu \in A_p$, $p \ge 1$, то (подобно ситуации в п. 1) можно считать, что $\Phi \in H(Q)$. Поведение степенного ряда

$$\Phi(r\exp(ix)) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k(\Phi)\, r^k \exp(ikx) \quad (48)$$

функций $\Phi \in H^p$, $p \ge 1$ на границе круга сходимости, то есть при $r \to 1-0$, хорошо изучено. Так [14, с. 541] почти всюду существует

$$\Phi(\exp(ix)) = \lim_{r \to 1-0} \Phi(r\exp(ix)) = f(x) + ig(x), \quad (49)$$

где $f, g \in L^p$; коэффициенты $\tau_k(\Phi)$ в разложении (48) могут быть найдены в виде

$$\tau_k(\Phi)=\frac{1}{2\pi}\int_Q \Phi(\exp(it))\exp(-ikt)\,dt\,,\ k=0,1,\ldots;$$

естественно считать, что $\tau_k(\Phi)=0$ при $k<0$. Если положить

$$\Phi(\exp(ix))\sim\sum_{k=0}^{\infty}\tau_k(\Phi)\exp(ikx)\,, \tag{50}$$

то (48) можно рассматривать как семейство средних Пуассона–Абеля степенного ряда (50) на границе круга сходимости. Существенное усиление результата (49) состоит в следующем [4, т. 1, с. 438]. Для всякой функции $\Phi\in H^p$ предельные значения

$$\Phi(\exp(ix))=\lim_{(y,r)\to(x,1)}\Phi(r\exp(ix))$$

существуют для почти всех x, если точка (y,r) стремится к $(x,1)$, оставаясь в «угловой» области, характеризующейся условием

$$\frac{|y-x|}{1-r}\le d,\ d=\text{const},\ d>0$$

(стремление по некасательным направлениям). В дальнейшем будет удобно изменить обозначение, приняв $h=\ln\frac{1}{r}$, так что $h\sim 1-r\ \ (r\to 1-0)$. Теперь некасательные пути для $(y,h)\ \to(x,+0)$ – пути, лежащие в области $\Gamma_d(x)$ (см. п. 9).

Указанный подход к поведению степенных разложений функции $\Phi\in H^p$ на границе круга сходимости может быть обобщен путем изучения поведения λ-средних

$$\Theta_h(\Phi)=\Theta(\Phi,y;\lambda,h)=\sum_{k=0}^{\infty}\tau_k(\Phi)\lambda_k(h)\exp(iky) \tag{51}$$

ряда (50) при $(y,h)\to(x,0),\ (y,h)\in\Gamma_d(x)$. Наряду с вышеизученными λ-средними ряда Фурье функции $f\in L^p_\nu(Q)$, $p\ge 1$, рассмотрим λ-средние сопряженного ряда Фурье

$$\tilde U_h(f)=\tilde U(f,y;\lambda,h)=-i\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\operatorname{sgn}k)\lambda_{|k|}(h)c_k(f)\exp(iky), \tag{52}$$

здесь $\{c_k(f)\}$ – последовательность комплексных коэффициентов Фурье (1).

В основе рассуждений будет лежать соотношение

$$\Theta(\Phi,y;\lambda,h)=U(f,y;\lambda,h)+i\tilde U(f,y;\lambda,h), \tag{53}$$

справедливое для всякой $\Phi\in H^p_\nu$ и установленное в теореме 3.1 статьи [22] с помощью рассуждений типа [14, с. 542 – 545].

Положим, как и выше, $m=\left[\frac{1}{2dh}\right]$. Ограничимся рассмотрением простейшего варианта суммы $\Sigma^{\#}(h,\lambda)$, а именно рассмотрим сумму $\Sigma^{\#\#}(h,\lambda)$. Пусть

$$\Theta_*(\Phi)=\Theta_*(\Phi,x;\lambda)=\sup_{(y,h)\in\Gamma_d(x)}\frac{|\Theta(\Phi,x;\lambda,h)|}{\Sigma^{\#\#}(h,\lambda)}\,.$$

При выполнении условия (40) результаты, относящиеся к средним (51), будут основаны на соотношениях типа (29) и (30) с заменой в них $U_*(f)$ на соответствующий максимальный оператор для сопряженных средних (52).

Теорема 10.1. Пусть существует постоянная $C = C_\lambda$ такая, что последовательность (2) при всех $h > 0$ удовлетворяет условиям (40) и $\nu \in A_p$. Тогда имеют место оценки:

$$\| \Theta_*(\Phi) \|_{\nu,p} \le C_{\lambda,p} \| \Phi \|_{\nu,p}, \quad p > 1 \tag{54}$$

и

$$\mu\{x \in Q \,|\, \Theta_*(\Phi, x; \lambda) > \varsigma > 0\} \le C_{\lambda,p} \left(\frac{|\,\Phi\|_{\nu,p}}{\varsigma} \right)^p, \; p \ge 1. \tag{55}$$

Результат теоремы 10.1 есть немедленное следствие теоремы 4.1, ее аналога для (52), а также соотношения (53).

Теорема 10.2. Если последовательность (2) удовлетворяет условиям (40), (18) и

$$\sup_h \sum{}^{\#\#}(h, \lambda) < \infty,$$

то соотношение

$$\lim_{\substack{(y,h)\to(x,0) \\ (y,h)\in\Gamma_d(x)}} \theta(\Phi, y; \lambda, h) = \Phi(\exp(ix)) \tag{56}$$

имеет место μ-почти всюду для всякой $\Phi \in H_\nu^p$ при $\nu \in A_p$, $p \ge 1$.

Как и выше, утверждение (56) о некасательной суммируемости является стандартным следствием условия (29) и оценок (54), (55).

Примером метода суммирования, удовлетворяющего условиям теоремы 10.2, является метод (46). В частности, при $\alpha = 1$, утверждение теоремы включает в себя цитированный выше результат о существовании почти всюду предельных значений функции $\Phi \in H^p$ на границе круга сходимости при стремлении точки круга к граничной точке по любому из некасательных направлений.

11. Обсуждение результатов

В работе [8] показано, что при выполнении для прямоугольных суммирующих матриц $\Lambda = \{\lambda_k^n\}$ условия

$$\sum_{k=1}^{\rho} k \,|\, \Delta^2 \lambda_{k-1}^n \,| + \sum_{k=\rho+1}^{\infty} |\, m - k \,| \cdot |\, \Delta^2 \lambda_{k-1}^n \,| \le C \tag{57}$$

($m > 0$ – некоторое целое; возможно, что $m = n$), соотношения (18), (19) и

$$|\, \lambda_0^n \,| + |\, \lambda_m^n \,| + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{|\, \lambda_{m-k}^n - \lambda_{m+k}^n \,|}{k} \le C \tag{58}$$

необходимы и достаточны:

а) для равномерной сходимости к $f \in C(Q)$ ряда (3);

б) сходимости к $f \in L(Q)$ в каждой точке Лебега (а, значит, почти всюду).

Несмотря на различие подходов, предлагаемых в настоящей работе и [8], полезно сравнить условия суммируемости (17) и (57); ограничимся случаем $m = n$

в (57), (58) и $h = h_m$, $m = 0, 1, \ldots$ в (12). Потребовав $\max\limits_{k=0,1,\ldots} |\lambda_k^m| \le C$, запишем условие (17) в виде

$$\sum_{k=0}^{\rho}(k+1)\,|\,\Delta^2\lambda_k^m\,| + \sum_{k=2m}^{\infty}(k+1)\,|\,\Delta^2\lambda_k^m\,| + \sum_{k=\rho+1}^{2m-1}(|\,m-k\,|+1)\ln\frac{2(m+k+1)}{|\,m-k\,|+1}\,|\,\Delta^2\lambda_k^m\,| \le C, \quad (59)$$

а условие (59) следующим равносильным образом

$$\sum_{k=0}^{\rho}(k+1)\,|\,\Delta^2\lambda_k^m\,| + \sum_{k=2m}^{\infty}(k+1)\,|\,\Delta^2\lambda_k^m\,| + \sum_{k=\rho+1}^{2m-1}(|\,m-k\,|+1)\,|\,\Delta^2\lambda_k^m\,| \le C. \quad (60)$$

Видим, что требование (60) является менее ограничительным, чем (59) лишь в части суммы по $k \in \{\rho+1, \ldots, 2m-1\}$, тогда как остальные суммы, содержащиеся в (59) и (60), соответственно, совпадают. В то же время, требование (59) избавляет от необходимости проверки (58) в случае использования его как достаточного условия суммируемости. Далее, переход от дискретных значений $h = h_m$, $m = 0, 1, \ldots$ к «непрерывным» значительно расширяет класс рассматриваемых методов суммирования и позволяет изучать, в частности, вопросы некасательной суммируемости.

Список литературы

1. Rozenblum, M. Summability of Fourier Series in L^p $(d\mu)$ / M. Rozenblum // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 105. – P. 32 – 42.

2. Muckenhoupt, B. Weighted Norm Inequalities for the Hardy Maximal Function / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 165. – P. 207 – 226.

3. Нахман, А. Д. Регулярные полунепрерывные методы суммирования рядов Фурье / А. Д. Нахман, Б. П. Осиленкер // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2017. – Т. 23, № 1. – С. 135 – 148.

4. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : пер. с англ. : в 2 т. / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – 2 т.

5. Ефимов, А. В. О линейных методах суммирования рядов Фурье / А. В. Ефимов // Изв. Акад. наук СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук. Сер. мат. – 1960. – № 24. – С. 743 – 756.

6. Никольский, С. М. О линейных методах суммирования рядов Фурье / С. М. Никольский // Изв. Акад. наук СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук. Сер. мат. – 1948. – № 12. – С.259 – 278.

7. Nagy, B. Sz. Methodes de Sommation des Series de Fourier / B. Sz. Nagy// Acta Sci. Math. Szeged, XII, pars. B. – 1950. – P. 204 – 210.

8. Баусов, Л. И. О линейных методах суммирования рядов Фурье / Л. И. Баусов // Математический сборник. – 1965. – Т. 68 (110), № 3. – С. 313 – 327.

9. Karamata, J. Sur la Sommation des Series de Fourier des Functions Continue / J. Karamata, M. Tomic // Publ. Inst. Math. Acad. Serbe scL. – 1955. – No. 8. – P. 123 – 138.

10. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы : пер. с англ. / Э. Хилле, Р. Филлипс. – 2-е изд., перераб. – М. : Изд-во иностр. литературы, 1962. – 829 с.

11. Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Д. Шварц – М.: Изд-во иностр. литературы, 1962. – 874 с.

12. Кук, Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей : монография / Р. Кук. – М. : ГИФМЛ, 1960. – 471 с.

13. Hunt, R. Weighted Norm Inequalities for Conjugate Function and Hilbert Transform / R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 176. – P. 227 – 251.

14. Бари, Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 936 с.

15. Тригуб, Р. М. Обобщение метода Абеля–Пуассона суммирования тригонометрических рядов Фурье / Р. М. Тригуб // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 3. – С. 473 – 475.

16. Тригуб, Р. М. Суммируемость тригонометрических рядов Фурье в *d*-точках и обобщение метода Абеля–Пуассона / Р. М. Тригуб // Изв. РАН. Сер. матем., 2015. – Т. 79, № 4. – С. 205 – 224.

17. Nakhman, A. D. Generalized Solution of the Heat and Mass Transfer Problem / A. D. Nakhman, Yu. V. Rodionov // Advanced Materials & Technologies, 2017. – No. 4. – P. 56 – 63.

18. Nakhman, A. D. Weighted Norm Inequalities for the Convolution Operators / A. D. Nakhman // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2009. – Т. 15, № 3. – С. 653 – 659.

19. Nakhman, A. D. Exponential Methods of Summation of the Fourier Series / A. D. Nakhman, B. P. Osilenker // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 101 – 109.

20. Зиза, О. А. Суммирование ортогональных рядов / О. А. Зиза. – М. : Едиториал УРСС, 2010. – 288 с.

21. Nakhman, A. D. Non-Tangential Convergence of the Generalized Poisson Integral / A. D. Nakhman, B. P. Osilenker // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2015. – Т. 21, № 4. – С. 660 – 668.

22. Nakhman, A. D. Summation of Power Series of Functions of Classes H_{ν}^{p} on Boundary of the Convergence Circle / A. D. Nakhman // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 530 – 538.

Problems Associated with Dirichlet's Representation of Semigroup of Operators

B. P. Osilenker[1], A. D. Nakhman[2]

Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering (1), Moscow, Russia;
Department of Technical Mechanics and Machine Parts, TSTU (2), Tambov, Russia; alextmb@mail.ru,

Keywords: semicontinuous summation methods; summability almost everywhere; weighted estimates of maximal operators.

Absract: A modern state of the problem of the summability of Fourier series by semicontinuous methods is considered. The estimates of means in terms of the maximal Hardy function are obtained. Conditions for the uniform boundedness of the family of corresponding operators in weighted Lebesgue spaces are given, as well as statements about convergence in the metric and almost everywhere. In connection with the Dirichlet representation of the semigroup of operators commuting with shifts, considerable attention is paid to exponential methods. The corresponding assertions are established in the form of corollaries for piecewise convex summing sequences. Applications of the results to non-tangent summability of power expansions of functions of Hardy classes are obtained. In particular, the results obtained in these directions are systematized and generalized.

References

1. Rozenblum M. Summability of Fourier Series in L^p ($d\mu$), *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1962, vol. 105, pp. 32-42.

2. Muckenhoupt B. Weighted Norm Inequalities for the Hardy Maximal Function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, vol. 165, pp. 207-226.

3. Nakhman A.D. [Regular Semi-Continuous Methods for Summing Fourier Series], *Transactions of the Tambov State Technical University,* 2017, vol. 23, no. 1, pp. 135-148. (In Eng., abstract in Russ.)

4. Zygmund A. *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959.

5. Efimov A.V. [On Linear Methods of Summation of Fourier Series], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Otdelenie matematicheskikh i estestvennykh nauk. Seriya Matematicheskaya* [Izvestiya of the USSR Academy of Sciences. Branch of Mathematical and Natural Sciences. Mathematical Series], 1960, no. 24, pp. 743-756. (In Russ.)

6. Nikol'skij C.M. [On Linear Methods of Summation of Fourier Series], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Otdelenie matematicheskikh i estestvennykh nauk. Seriya Matematicheskaya* [Izvestiya of the USSR Academy of Sciences. Branch of Mathematical and Natural Sciences. Mathematical Series], 1948, no. 12, pp. 259-278. (In Russ.)

7. Nagy B.Sz. Methodes de Sommation des Series de Fourier, *Acta Sci. Math. Szeged,* XII., pars. B, 1950, pp. 204-210.

8. Bausov L.I. [On Linear Methods of Summation of Fourier Series], *Matematicheskiy sbornik* [Matematicheskii Sbornik], 1965, vol. 68 (110), no. 3, pp. 313-327. (In Russ.)

9. Karamata J., Tomic M. Sur la Sommation des Series de Fourier des Functions Continue, *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe scL.*, 1955, no. 8, pp. 123-138.

10. Khille E., Fillips R. *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semigroups], Moscow: Izdatel'stvo inostr. literatury, 1962, 829 p. (In Russ.)

11. Danford N., Shvarts D. *Lineynyye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators. General Theory], Moscow: Izdatel'stvo inostr. literatury, 1962, 874 p. (In Russ.)

12. Cooke R.G. *Infinite Matrices and Sequence Spaces*, London: Macmillan, 1950.

13. Hunt R., Muckenhoupt B., Wheeden R. [Weighted Norm Inequalities for Conjugate Function and Hilbert Transform], *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1973, vol. 176, pp. 227-251.

14. Bari N.K. *Trigonometricheskiye ryady* [Trigonometric Series], Moscow: GIFML, 1961, 936 p. (In Russ.)

15. Trigub R.M. [A Generalization of the Abel-Poisson Method of Summation of Trigonometric Fourier Series], *Matematicheskie zametki* [Matematicheskie Notes], 2014, vol. 96, no. 3, pp. 473-475. (In Russ.)

16. Trigub R.M. [Summability of Trigonometric Fourier Series at *d*-points and Generalization of the Abel-Poisson Method], *Izvestiya RAN. Seriya matematicheskaya* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mathematical series], 2015, vol. 79, no. 4, pp. 205-224. (In Russ.)

17. Nakhman A.D., Rodionov Yu.V. Generalized Solution of the Heat and Mass Transfer Problem, *Advanced Materials & Technologies*, 2017, no. 4, pp. 56-63. (In Eng., abstract in Russ.)

18. Nakhman A.D. [Weighted Norm Inequalities for the Convolution Operators], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 653-659. (In Eng., abstract in Russ.)

19. Nakhman A.D., Osilenker B.P. [Exponential Methods of Summation of the Fourier Series], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 101-109. (In Eng., abstract in Russ.)

20. Ziza O.A. *Cummirovaniye ortogonal'nykh ryadov* [Summation of Orthogonal Series], Moscow:Yeditorial URSS, 2010, 288 p. (In Russ.)

21. Nakhman A.D., Osilenker B.P. [Non-tangential Convergence of the Generalized Poisson Integral], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 660-668. (In Eng., abstract in Russ.)

22. Nakhman A.D. [Summation of Power Series of Functions of Classes H_v^p on Boundary of the Convergence Circle], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 3, pp. 530-538. (In Eng., abstract in Russ.)

Aufgaben, die mit der Vorstellung von Dirichlet der Halbgruppe der Operatoren assoziiert sind

Zusammenfassung: Es wird ein moderner Stand des Problems der Summierbarkeit von Fourier-Reihen durch semikontinuierliche Methoden betrachtet. Mittelwerte in Bezug auf die maximale Hardy-Funktion sind erhalten. Bedingungen für die einheitliche Beschränktheit der Familie der entsprechenden Operatoren in Lebesguesches Gewichtsräumen sind ebenso gegeben wie Aussagen über Konvergenz in der Metrik und fast überall. In Verbindung mit der Vorstellung von Dirichlet der Halbgruppe von Operatoren, die mit Verschiebungen kommutieren, wird exponentiellen Methoden besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Die entsprechenden Aussagen werden in Form von Folgen für stückweise konvexe Summierungssequenzen installiert. Anhänge der Ergebnisse auf nichttangentiale Summierbarkeit der Potenzreihenentwicklungen von Funktionen der Hardy-Klassen sind erhalten. Systematisiert und verallgemeinert sind insbesondere die Ergebnisse, die in diesen Richtungen von den Autoren erhalten wurden.

Les problèmes associés à la représentation de Dirichlet du sous-groupe des opérateurs

Résumé: Est examiné l'état actuel du problème de la somme des séries de Fourier par des méthodes semi-permanentes. Sont obtenues des estimations moyennes en termes de fonction maximale Hardy. Sont citées les conditions de l'uniformité de la famille des opérateurs concernés dans les espaces de poids Lebesgue, ainsi que des affirmations sur la convergence dans la métrique et presque partout. En ce qui concerne la représentation de Dirichlet du sous-groupe des opérateurs de déplacement avec décalage, une grande attention est accordée aux méthodes exponentielles. Les assertions correspondantes sont établies sous la forme d'une conséquence pour les séquences de l synthèse en morceaux et convexes. Sont obtenues les annexes des résultats à une additionnalité non permanente des dégradations statiques des fonctions des classes de Hardy. Les résultats obtenus sont systématisés et résumés.

Авторы: ***Осиленкер Борис Петрович*** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная математика», ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия; ***Нахман Александр Давидович*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Техническая механика и детали машин», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.

Рецензент: ***Куликов Геннадий Михайлович*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий научно-исследовательской лабораторией «Механика интеллектуальных материалов и конструкций», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.