

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. В. Еремин

*Кафедра «Промышленная теплоэнергетика»,
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»,
г. Самара, Россия; a.v.eremin@list.ru*

Ключевые слова: дополнительные граничные условия; дополнительные искомые функции; зависимость коэффициента температуропроводности от температуры; интегральный метод теплового баланса; конечная скорость распространения теплоты; нелинейные задачи теплопроводности; фронт температурного возмущения.

Аннотация: Получено приближенное аналитическое решение нелинейной задачи теплопроводности для бесконечной пластины при степенной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры. В целях оценки точности полученных решений выполнен численный расчет температурных полей для исходной краевой задачи. Сделан вывод о возможности применения рассматриваемого метода для решения прикладных задач.

Применительно к нелинейным задачам методы построения решений в виде суммы частных решений неприменимы и, следовательно, принцип суперпозиции в данном случае оказывается несостоятельным. Какие-либо общие схемы получения точных аналитических решений подобных задач пока не найдены. Получение их решений обычно связано с использованием различного рода линеаризирующих подстановок, которые упрощают исходную математическую постановку задачи и, тем самым, снижают точность ее решения. Известны также методы, в которых используется понятие фронта температурного возмущения [1 – 11]. К ним относят методы М. Е. Швеца, И. А. Вейника, Т. Гудмена [6], М. Био, Ю. С. Постольника [8], методы, основанные на использовании дополнительных граничных условий [9, 10] и др. При использовании данных методов в рассмотрение вводятся новые искомые функции, а процесс теплопроводности разделяется на две стадии. Первая стадия характеризуется перемещением фронта температурного возмущения – границы прогретой и непрогретой областей исследуемого тела. При этом температурное поле определяется лишь в пределах термического слоя, то есть только в той области, где температура изменилась под действием граничных условий. Вторая стадия характеризуется изменением температуры во всем диапазоне пространственной переменной, то есть по всему объему тела. Введение в рассмотрение дополнительной функции $q_1(F_0)$ (фронта температурного возмущения) в первой стадии процесса (рис. 1) эквивалентно принятию допущения о конечной скорости распространения теплоты. Однако решению подлежит параболическое уравнение теплопроводности, в основу вывода которого заложена бесконечная ее скорость. Данное противоречие объясняется в работах [1, 11], в которых показано, что с увеличением числа приближений n промежутки времени F_{01} ,

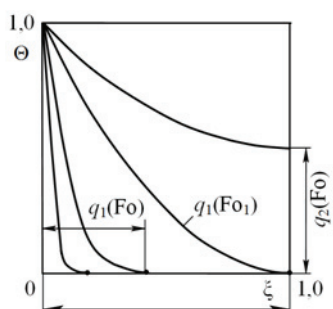


Рис. 1. Расчетная схема теплообмена

$q_2(Fo)$ будет изменяться тотчас же после приложения граничного условия к внешней поверхности пластины. Таким образом, область определения и область значений дополнительной искомой функции $q_2(Fo)$ и функции $\Theta(\xi, Fo)$ в точке $\xi = 1$ совпадают.

Применительно к обеим стадиям процесса используются дополнительные граничные условия, определяемые таким образом, чтобы их выполнение было эквивалентно удовлетворению исходного дифференциального уравнения задачи в граничных точках исследуемой области.

В качестве конкретного примера рассмотрим последовательность решения нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины при зависимости коэффициента температуропроводности от температуры вида $a(T) = a_0 T^\beta$. При граничных условиях первого рода математическая постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x, \tau)^\beta \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right), \quad \tau > 0; \quad 0 < x < \delta; \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$T(0, \tau) = T_{ст}; \quad (3)$$

$$\partial T(\delta, \tau) / \partial x = 0, \quad (4)$$

где T – температура; x – координата; τ – время; a_0 – коэффициент температуропроводности при $T = T_0$; β – коэффициент; T_0 – начальная температура; $T_{ст}$ – температура стенки; δ – половина толщины пластины.

Задача (1) – (4) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\Theta(\xi, Fo) + T_0)^\beta \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right), \quad Fo > 0, \quad 0 < \xi < 1; \quad (5)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (6)$$

$$\Theta(0, Fo) = \Delta T; \quad (7)$$

$$\partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi = 0, \quad (8)$$

где

$$\Theta = T - T_0; \quad \xi = x / \delta; \quad Fo = a_0 \tau / \delta^2; \quad \Delta T = T_{ст} - T_0. \quad (9)$$

за который фронт температурного возмущения достигает центра тела, уменьшается и при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю. При этом его скорость устремляется к бесконечному значению.

Во второй стадии процесса, используя понятие бесконечной скорости распространения теплоты, вводится дополнительная искомая функция $q_2(Fo)$, характеризующая изменение во времени температуры в центре пластины ($\xi = 1$). Ввиду бесконечной скорости распространения теплоты функция

$q_2(Fo)$ будет изменяться тотчас же после приложения граничного условия к внешней поверхности пластины. Таким образом, область определения и область значений дополнительной искомой функции $q_2(Fo)$ и функции $\Theta(\xi, Fo)$ в точке $\xi = 1$ совпадают.

Применительно к обеим стадиям процесса используются дополнительные граничные условия, определяемые таким образом, чтобы их выполнение было эквивалентно удовлетворению исходного дифференциального уравнения задачи в граничных точках исследуемой области.

В качестве конкретного примера рассмотрим последовательность решения нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины при зависимости коэффициента температуропроводности от температуры вида $a(T) = a_0 T^\beta$. При граничных условиях первого рода математическая постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x, \tau)^\beta \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right), \quad \tau > 0; \quad 0 < x < \delta; \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$T(0, \tau) = T_{ст}; \quad (3)$$

$$\partial T(\delta, \tau) / \partial x = 0, \quad (4)$$

где T – температура; x – координата; τ – время; a_0 – коэффициент температуропроводности при $T = T_0$; β – коэффициент; T_0 – начальная температура; $T_{ст}$ – температура стенки; δ – половина толщины пластины.

Задача (1) – (4) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\Theta(\xi, Fo) + T_0)^\beta \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right), \quad Fo > 0, \quad 0 < \xi < 1; \quad (5)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (6)$$

$$\Theta(0, Fo) = \Delta T; \quad (7)$$

$$\partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi = 0, \quad (8)$$

где

$$\Theta = T - T_0; \quad \xi = x / \delta; \quad Fo = a_0 \tau / \delta^2; \quad \Delta T = T_{ст} - T_0. \quad (9)$$

Разделим процесс теплообмена на две стадии по времени $0 \leq Fo \leq Fo_1$ и $Fo_1 \leq Fo < \infty$. Для этого введем в рассмотрение дополнительную искомую функцию $q_1(Fo)$ – движущуюся во времени границу прогретой $0 \leq \xi \leq q_1(Fo)$ и непрогретой $q_1(Fo) \leq \xi \leq 1$ областей исследуемого тела. Первая стадия процесса теплообмена заканчивается в момент времени $Fo = Fo_1$, когда фронт температурного возмущения достигает центра пластины ($\xi = 1$) (см. рис. 1).

Во второй стадии процесса изменение температуры происходит во всем объеме тела ($0 \leq \xi \leq 1$). На этой стадии в рассмотрение вводится функция $q_2(Fo) = \Theta(1, Fo)$, характеризующая изменение температуры во времени в центре пластины $\xi = 1$.

В первой стадии математическая постановка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\Theta(\xi, Fo) + T_0)^\beta \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right), \quad Fo > 0, \quad 0 < \xi < q_1(Fo); \quad (10)$$

$$\Theta(0, Fo) = \Delta T; \quad (11)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = 0; \quad (12)$$

$$\partial \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi = 0, \quad (13)$$

где соотношения (12), (13) представляют условия сопряжения прогретой и непрогретой зон.

Согласно условию (12), температура на фронте температурного возмущения равна начальной. Согласно (13), за пределами фронта температурного возмущения отсутствует тепловой поток.

Потребуем, чтобы искомое решение задачи (10) – (13) удовлетворяло не исходному дифференциальному уравнению (10), а некоторому осредненному в пределах толщины термического слоя $0 \leq \xi \leq q_1(Fo)$, то есть

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^{q_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\Theta + T_0)^\beta \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (14)$$

С учетом (11), (13) выражение (14) приводится к интегралу теплового баланса вида

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = -T_{ct}^\beta \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (15)$$

Решение задачи (10) – (13) находится в виде степенного ряда

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n b_k(q_1) \xi^k, \quad (16)$$

где $b_k(q_1)$ – неизвестные коэффициенты.

Подставляя (16) в (11) – (13), получаем систему трех алгебраических линейных уравнений относительно неизвестных $b_k(q_1)$, $k = 0, 1, 2$. После их определения соотношение (16) запишется в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \Delta T \left(1 - \frac{\xi}{q_1} \right)^2. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (15), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $q_1(\text{Fo})$

$$q_1 dq_1 = 6T_{\text{CT}}^\beta d\text{Fo} . \quad (18)$$

Его решение при начальном условии $q_1(0) = 0$ имеет вид

$$q_1(\text{Fo}) = 2\sqrt{3\text{Fo}T_{\text{CT}}^\beta} . \quad (19)$$

Соотношения (17), (19) представляют приближенное аналитическое решение задачи (10) – (13). Это решение точно удовлетворяет интегралу теплового баланса (15), граничным условиям (11) – (13) и приближенно (в третьем приближении) уравнению (10). Число приближений будем определять числом членов ряда (16).

Положив $q_1(\text{Fo}) = q_1(\text{Fo}_1) = 1$, из (19) определим интервал времени, за который фронт температурного возмущения достигнет центра пластины ($\xi = 1$)

$$\text{Fo}_1 = (12T_{\text{CT}}^\beta)^{-1} . \quad (20)$$

Введем относительную избыточную температуру по формуле

$$\bar{\Theta}(\xi, \text{Fo}) = \frac{\Theta(\xi, \text{Fo})}{\Delta T} , \quad (21)$$

которая с учетом (17), (19) приводится к виду

$$\bar{\Theta}(\xi, \text{Fo}) = \left(1 - \frac{\xi}{2\sqrt{3\text{Fo}T_{\text{CT}}^\beta}} \right)^2 . \quad (22)$$

Результаты модельных расчетов безразмерной температуры по формуле (22) при $\beta = 0,1$; $T_0 = 0$ °С; $T_{\text{CT}} = 100$ °С приведены на рис. 2 (кривая 1). Из их анализа следует, что расхождение с численным решением задачи в диапазоне $0,001 \leq \text{Fo} \leq \text{Fo}_1$ ($\text{Fo}_1 = 0,053$) не превышает 6 %. Для повышения точности полу-

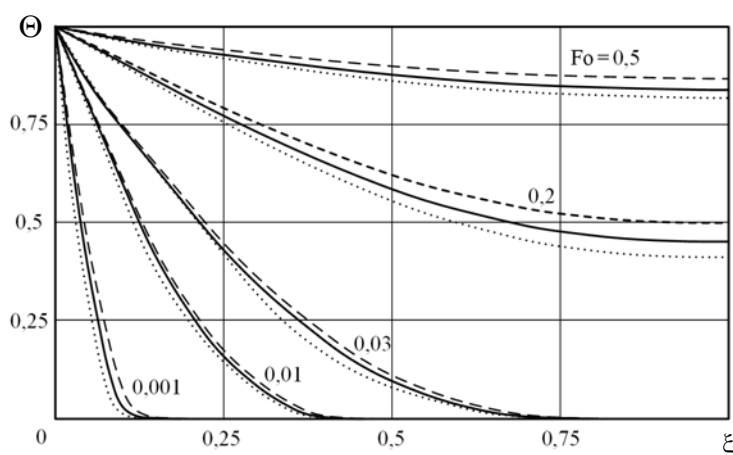


Рис. 2. Распределение температуры в пластине ($\beta = 0,1$):

----- по формуле (17); ———— по формуле (27); – численное решение

чаемых решений в последующих приближениях будем использовать дополнительные граничные условия. Для этого продифференцируем условия (11) – (13) по переменной Fo

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = 0; \quad \frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial Fo} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} = 0. \quad (23)$$

Соотношения (23) с учетом уравнения (10) приводятся к следующим дополнительным граничным условиям:

$$\beta T_{\text{ст}}^{\beta-1} \left(\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} \right)^2 + T_{\text{ст}}^{\beta} \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} = 0; \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^2} = 0; \quad (25)$$

$$\partial^3 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^3 = 0. \quad (26)$$

Подставляя (16) в основные (11) – (13) и дополнительные (24) – (26) граничные условия, получаем систему шести алгебраических линейных уравнений относительно $b_k(q_1)$, $k = \overline{0, 5}$. Выражение (16) с учетом найденных коэффициентов примет вид

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = \Delta T - \left(4\Delta T + \frac{\eta}{2\beta} \right) \frac{\xi}{q_1} + \left(6\Delta T + \frac{2\eta}{\beta} \right) \frac{\xi^2}{q_1^2} - \left(4\Delta T + \frac{3\eta}{\beta} \right) \frac{\xi^3}{q_1^3} + \\ + \left(\Delta T - \frac{2\eta}{\beta} \right) \frac{\xi^4}{q_1^4} + \frac{\eta}{2\beta} \frac{\xi^5}{q_1^5}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\eta = 8(\beta\Delta T + T_{\text{ст}}) - 4\sqrt{T_{\text{ст}}(5\beta\Delta T + 4T_{\text{ст}})}$.

Подставляя (27) в интеграл теплового баланса (15), получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $q_1(Fo)$

$$q_1(5\beta\Delta T + 2T_{\text{ст}}) dq_1 = (30T_{\text{ст}}\beta\eta_1 - 60T_{\text{ст}}^{\beta+1}) dFo, \quad (28)$$

где $\eta_1 = T_{\text{ст}}\sqrt{5\beta\Delta T + 4T_{\text{ст}}}$.

Интегрируя уравнение (28), находим

$$q_1(Fo) = 2\sqrt{\eta_2(T_{\text{ст}} - \eta_1)Fo} / (3T_{\text{ст}} + 5\beta\Delta T), \quad (29)$$

где $\eta_2 = -(45T_{\text{ст}} + 75\beta\Delta T)\exp(\beta \ln T_{\text{ст}})$.

Положив $q_1(Fo_1) = 1$, определим время окончания первой стадии $Fo_1 = 0,032824$ (при $\beta = 0,1$).

Соотношения (27), (29) представляют решение задачи (10) – (13) в шестом приближении. На рисунке 2 приведены результаты расчетов безразмерной температуры $\bar{\Theta} = \Theta/\Delta T$ по формуле (27) (кривая 2). Из их анализа следует, что в диапазоне $0,001 \leq Fo \leq Fo_1$ результаты расчетов по формуле (27) практически совпадают с результатами численного решения задачи. Отмечается также повышение точности получаемых решений в сравнении с третьим приближением.

Для дальнейшего повышения точности необходимо увеличивать степень полинома (16), привлекая дополнительные граничные условия, которые в девятом приближении примут вид

$$\frac{\partial^4 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^4} = 0; \quad \frac{\partial^5 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^5} = 0; \quad \frac{\partial^6 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^6} = 0. \quad (30)$$

Подставляя (16) в основные (11) – (13) и дополнительные (23), (30) граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов $b_k(q_1)$, $k = 0, 1, \dots, 8$, получим систему девяти алгебраических линейных уравнений. Подставляя (16) с учетом найденных значений коэффициентов $b_k(q_1)$ в интеграл теплового баланса (15), относительно функции $q_1(Fo)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение при начальном условии $q_1(0) = 0$. Дальнейшая последовательность решения повторяется.

Математическая постановка задачи для второй стадии процесса имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\Theta(\xi, Fo) + T_0)^\beta \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right], \quad Fo \geq Fo_1, \quad 0 < \xi < 1; \quad (31)$$

$$\Theta(0, Fo) = \Delta T; \quad (32)$$

$$\Theta(1, Fo) = q_2(Fo); \quad (33)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} = 0. \quad (34)$$

Ввиду бесконечной скорости распространения теплоты, температура в центре пластины будет изменяться тотчас же после приложения граничного условия первого рода на ее поверхности. В связи с чем, отсчет времени для второй стадии процесса будем выполнять от нулевого его значения ($Fo = 0$), то есть будем искать решение, удовлетворяющее начальному условию (34), полагая $Fo_1 = 0$.

Интеграл теплового баланса для второй стадии процесса с учетом (32), (34) имеет вид

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = -T_{cr}^\beta \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (35)$$

Решение задачи (31) – (34) принимается в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n b_k(q_2) \xi^k. \quad (36)$$

Подставляя (36) в основные граничные условия (32) – (34) получим систему трех алгебраических уравнений относительно $b_k(q_2)$, $k = 0, 1, 2$. После определения неизвестных коэффициентов соотношение (36) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \Delta T - \xi(2 - \xi)(\Delta T - q_2). \quad (37)$$

Неизвестная функция $q_2(Fo)$ находится из интеграла теплового баланса (35). Подставляя (37) в (35), получаем дифференциальное уравнение вида

$$dq_2/dFo = 3T_{CT}^\beta (\Delta T - q_2). \quad (38)$$

Его решение при начальном условии $q_2(Fo_1) = 0$

$$q_2(Fo) = \Delta T \left\{ 1 - \exp \left[-3T_{CT}^\beta (Fo - Fo_1) \right] \right\}. \quad (39)$$

Подставляя (39) в (37), найдем решение задачи (31) – (34) в третьем приближении

$$\frac{\Theta(\xi, Fo)}{\Delta T} = \bar{\Theta}(\xi, Fo) = 1 - \xi(2 - \xi) \exp \left[-3T_{CT}^\beta Fo \right]. \quad (40)$$

Результаты расчетов по формуле (40) при исходных данных, приведенных выше, в сравнении с численным решением даны на графиках (см. рис. 2). В диапазоне безразмерного времени $Fo_1 \leq Fo \leq \infty$ расхождение результатов не превышает 8 %. Для повышения точности, как и в первой стадии процесса, используются дополнительные граничные условия. Для их определения условия (32) – (34) дифференцируются по переменной Fo и сравниваются с исходным дифференциальным уравнением, либо с выражением, получаемым в результате его дифференцирования по координате ξ . В шестом приближении полученные таким образом дополнительные граничные условия имеют вид:

$$\frac{\beta}{T_{CT}} \left(\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} = 0; \quad (41)$$

$$(q_2(Fo) + T_0)^\beta \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial q_2(Fo)}{\partial Fo}; \quad (42)$$

$$\frac{\beta(\beta - 2)}{(q_2(Fo) + T_0)^2} \left(\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} \right)^3 + \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^3} = 0. \quad (43)$$

Подставляя (36) (при $n = 5$) в основные (32) – (34) и дополнительные (41) – (43) граничные условия, получаем систему шести алгебраических уравнений из решения которой находятся неизвестные коэффициенты b_k . Вычисляя интеграл в (35) с учетом найденных коэффициентов, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, решая которое при начальных условиях $q_2(Fo_1) = 0$ и $dq_2(Fo_1)/dFo = 0$ находится дополнительная искомая функция $q_2(Fo)$.

Для оценки точности получаемых приближенных аналитических решений было получено численное решение исходной краевой задачи. Для этого в соответствии с методом конечных разностей в рассматриваемой области вводилась пространственно-временная сетка с шагами: $\Delta \xi = 0,05$, $\Delta Fo = 0,00001$ соответственно по переменным ξ и Fo так, что

$$\xi_k = k \Delta \xi, \quad k = \overline{0, K}; \quad Fo_i = i \Delta Fo, \quad i = \overline{0, I}, \quad (44)$$

где $K = 20$, $I = 50000$ – число шагов по координатам ξ , Fo .

На сетке (44) вводятся сеточные функции $\Theta_k^i = \Theta(\xi_k, Fo_i)$. Используя принятую схему аппроксимации дифференциальных операторов, задача (5) – (8) записывается в виде:

$$\frac{\Theta_k^{i+1} - \Theta_k^i}{\Delta Fo} = \beta (\Theta_k^i + T_0)^{\beta-1} \left(\frac{\Theta_{k+1}^i - \Theta_k^i}{\Delta \xi} \right)^2 + (\Theta_k^i + T_0)^\beta \left(\frac{\Theta_{k-1}^i - 2\Theta_k^i + \Theta_{k+1}^i}{\Delta \xi^2} \right); \quad (45)$$

$$\Theta_k^0 = 0; \quad (46)$$

$$\Theta_0^i = \Delta T; \quad (47)$$

$$\frac{\Theta_K^i - \Theta_{K-1}^i}{\Delta \xi} = 0. \quad (48)$$

Полученные выше приближенные аналитические решения имеют ряд преимуществ в сравнении с численными. При точности, вполне достаточной для решения большинства прикладных задач, они обладают простой конструкцией, что позволяет выполнять глубокий анализ изучаемого процесса. В частности, могут быть построены изотермы и скорости их движения, вычислены коэффициенты, характеризующие теплофизические свойства материала, и т.д.

Принцип построения изотерм рассмотрим на примере третьего приближения первой стадии процесса. Выражая пространственную переменную ξ , как функцию $\bar{\Theta}(\xi, Fo)$ и Fo , соотношение (22) можно представить в виде

$$\xi(\bar{\Theta}, Fo) = -2 \left(\sqrt{\bar{\Theta}} - 1 \right) \sqrt{3FoT_{cr}^\beta}. \quad (49)$$

На рис. 3 приведены изотермические линии в координатах $\xi - Fo$. Из анализа представленных графиков, а также соотношений (19), (49) следует, что дополнительная искомая функция $q_1(Fo)$ определяет закон движения нулевой изотермы во времени. Выражения (19), (49) тождественны при $\Theta = 0$.

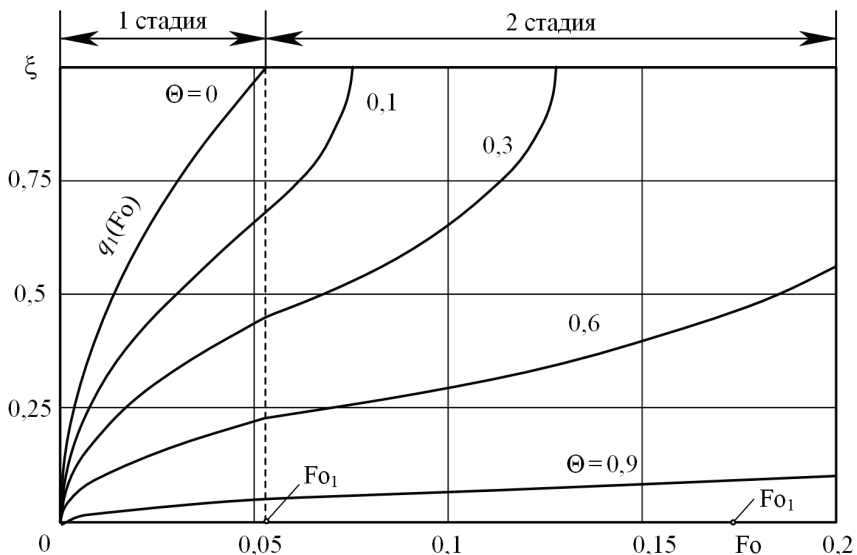


Рис. 3. Графики движения изотерм $\Theta = \text{const}$ по координате ξ во времени

Заключение

На основе использования дополнительных искомых функций и дополнительных граничных условий получено приближенное аналитическое решение нелинейной задачи теплопроводности для бесконечной пластины при степенной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры. В целях оценки точности полученных решений выполнен численный расчет температурных полей для исходной краевой задачи. Сделан вывод о возможности применения рассматриваемого метода для решения прикладных задач.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 18-79-00171.

Список литературы

1. Кудинов, В. А. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности / В. А. Кудинов, И. В. Кудинов. – М. : Либроком, 2011. – 280 с.
2. Кудинов, В. А. Техническая термодинамика и теплопередача / В. А. Кудинов, Э. М. Карташов, Е. В. Стефанюк. – 2-е изд. – М. : Юрайт, 2012. – 566 с.
3. Кудинов, В. А. Теплотехника / В. А. Кудинов, Э. М. Карташов, Е. В. Стефанюк. – М. : Абрис, 2012. – 423 с.
4. Кудинов, И. В. Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений теплопереноса / И. В. Кудинов, В. А. Кудинов. – М. : ИНФРА-М, 2013. – 391 с.
5. Беляев, Н. М. Методы нестационарной теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. – М. : Высшая школа, 1978. – 328 с.
6. Гудмен, Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена / Т. Гудмен // Проблемы теплообмена : сб. науч. тр. – М., 1967. – С. 41 – 96.
7. Глазунов, Ю.Т. Вариационные методы / Ю. Т. Глазунов. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 470 с.
8. Постольник, Ю. С. Метод осреднения функциональных поправок в задачах теплопроводности / Ю. С. Постольник // Тепло- и массоперенос : сб. тр. – Минск, 1972. – Т. 8. – С. 23 – 29.
9. Стефанюк, Е. В. Получение аналитических решений уравнений гидродинамического и теплового пограничного слоя на основе введения дополнительных граничных условий / Е. В. Стефанюк, В. А. Кудинов // Теплофизика высоких температур. – 2010. – Т. 48, № 2. – С. 290 – 302.
10. Еремин, А. В. Теплообмен в цилиндрическом канале при стабилизированном ламинарном течении жидкости / А. В. Еремин, В. А. Кудинов, Е. В. Стефанюк // Прикладная математика и механика. – 2018. – Т. 82, № 1. – С. 31 – 43.
11. Еремин, А. В. Об одном методе получения аналитического решения задачи Гретца–Нуссельта / А. В. Еремин, Н. М. Будыльников // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Серия : Физ.-мат. науки. – 2011. – Т. 13, № 3 (24). – С. 193 – 198.

About One Method for Solving Nonlinear Thermal Conductivity Problems

A. V. Eremin

*Department of Industrial Heat and Power Engineering,
Samara State Technical University, Samara, Russia; a.v.eremin@list.ru*

Keywords: additional boundary conditions; additional required functions; dependence of thermal diffusivity on temperature; integral heat balance method; final velocity of heat propagation; nonlinear heat conductivity problems; front temperature perturbation.

Abstract: An approximate analytical solution is obtained for a nonlinear heat conductivity problem for an infinite plate with a power-law dependence of the thermal diffusivity on temperature. In order to assess the accuracy of the solutions obtained, a numerical calculation of the temperature fields for the initial boundary value problem was also performed. The conclusion is made about the possibility of using the considered method for solving applied problems.

References

1. Kudinov V.A., Kudinov I.V. *Metody resheniya parabolicheskikh i giperbolicheskikh uravneniy teploprovodnosti* [Methods for Solving Parabolic and Hyperbolic Heat Conduction Equations], Moscow: Librokom, 2011, 280 p. (In Russ.)
2. Kudinov V.A., Kartashov E.M., Stefanyuk Ye.V. *Tekhnicheskaya termodinamika i teploperedacha* [Technical Thermodynamics and Heat Transfer], Moscow: Yurayt, 2012, 566 p. (In Russ.)
3. Kudinov V.A., Kartashov E.M., Stefanyuk Ye.V. *Teplotekhnika* [Teplotekhnika], Moscow: Abris, 2012, 423 p. (In Russ.)
4. Kudinov I.V., Kudinov V.A. *Analiticheskiye resheniya parabolicheskikh i giperbolicheskikh uravneniy teplomassoperenosa* [Analytic Solutions of Parabolic and Hyperbolic Heat and Mass Transfer Equations], Moscow: INFRA-M, 2013, 391 p. (In Russ.)
5. Belyayev N.M., Ryadno A.A. *Metody nestatsionarnoy teploprovodnosti* [Methods of Non-Stationary Heat Conduction], Moscow: Vysshaya shkola, 1978, 328 p. (In Russ.)
6. Gudmen T. *Primeneniye integral'nykh metodov v nelineynykh zadachakh nestatsionarnogo teploobmena*, Heat Transfer Problems: Collection of Scientific Papers, Moscow: Atomizdat, 1967, pp. 41-96. (In Russ.)
7. Glazunov Yu.T. *Variatsionnyye metody* [Variational Methods], Izhevsk: NITS "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2006, 470 p. (In Russ.)
8. Postol'nik Yu.S. [Averaging Method for Functional Corrections in Heat Conduction Problems], *Teplo- i massoperenos: sbornik trudov* [Heat and Mass Transfer: a Collection of Papers], Minsk, 1972, vol. 8, pp. 23-29. (In Russ.)
9. Stefanyuk Ye.V., Kudinov V.A. [Preparation of Analytical Solutions of the Equations of the Hydrodynamic and Thermal Boundary Layer on the Basis of the Introduction of Additional Boundary Conditions], *Teplofizika vysokikh temperatur* [Thermophysics of High Temperatures], 2010, vol. 48, no. 2, pp. 290-302. (In Russ.)
10. Yeremin A.V., Kudinov V.A., Stefanyuk Ye.V. [Heat Exchange in a Cylindrical Channel with a Stabilized Laminar Flow of Liquid], *Prikladnaya matematika*

i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 2018, vol. 82, no. 1, pp. 31-43. (In Russ.)

11. Yeregin A.V., Budylnikov N.M. [On a Method for Obtaining an Analytical Solution of the Gretz-Nusselt Problem], *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskiye nauki* [Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physics and Mathematics], 2011, vol. 13, no. 3 (24), pp. 193-198. (In Russ.)

Über eine Lösungsmethode der nichtlinearen Aufgaben der Wärmeleitung

Zusammenfassung: Eine ungefähre analytische Lösung ist für ein nichtlineares Wärmeleitungsproblem für eine unendliche Platte mit einer Potenzgesetzabhängigkeit des Koeffizienten der Temperaturleitfähigkeit von der Temperatur erhalten. Um die Genauigkeit der erhaltenen Lösungen zu bewerten, wurde auch eine numerische Berechnung der Temperaturfelder für das anfängliche Grenzwertproblem durchgeführt. Es ist die Schlussfolgerung über die Möglichkeit gemacht, die behandelnde Methode zur Lösung angewandter Probleme zu verwenden.

Sur une méthode de la résolution les problèmes non linéaires de la conductivité thermique

Résumé: A été obtenue une solution analytique approximative de la tâche non linéaire de la conductivité thermique pour la plaque infinie avec une dépendance de degré du coefficient de la conductivité thermique de la température. Afin d'évaluer l'exactitude des solutions obtenues, le calcul numérique des champs de température pour la tâche de bord d'origine est également effectué. Est conclu qu'il serait possible d'appliquer la méthode considérée pour la solution des problèmes appliqués.

Автор: Ерегин Антон Владимирович – кандидат технических наук, доцент, и.о. заведующего кафедрой «Промышленная теплоэнергетика», ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», г. Самара, Россия.

Рецензент: Майникова Нина Филипповна – доктор технических наук, профессор кафедры «Энергообеспечение предприятий и теплотехника», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.