УДК 517.51
DOI: 10.17277/vestnik.2018.02.pp.326-336

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. И. Фомин

Кафедра «Техническая механика и детали машин», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия; vasiliyfomin@bk.ru

Ключевые слова: интерполяционный многочлен Лагранжа; интерполяционный процесс; погрешность интерполирования; сходимость интерполяционного процесса; фундаментальная система решений.

Аннотация: Показано, как выбирать степень интерполяционного многочлена, чтобы проводить интерполяцию на данном промежутке с заданной точностью решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть для линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(m)}(x)+\sum_{i=1}^{m-1} a_i\, y^{(m-i)}(x)+a_m\, y(x)=0 \tag{1}$$

с постоянными коэффициентами a_i ($i=\overline{1;m}$) требуется интерполировать его решение

$$y(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i\, y_i(x) \tag{2}$$

на отрезке $[a,b]$ некоторым многочленом $P_N(x): y(x)\approx P_N(x)$ с заданной точностью $\delta: \|R_N\|\le\delta$, где $R_N(x)=y(x)-P_N(x)$ – погрешность интерполирования, $\|R_N\|=\max\limits_{x\in[a,b]}|R_n(x)|$ (здесь и в дальнейшем используется норма $\|u\|=\max\limits_{x\in[a,b]}|u(x)|$ пространства $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $u=u(x)$).

При решении данной задачи желательно минимизировать степень N интерполяционного многочлена $P_N(x)$, чтобы избежать неприемлемой вычислительной погрешности, возникающей при больших значениях степени интерполяционного многочлена.

Рассмотрим произвольный фиксированный набор положительных чисел $\{\delta_i\}=\{\delta_i\}_{i=1}^{m}$, удовлетворяющий условию

$$\sum_{i=1}^{m} |C_i| \delta_i \le \delta . \qquad 3)$$

Интерполируем на отрезке $[a,b]$ каждое решение $y_i(x)$ из фундаментальной системы решений (**ФСР**) уравнения (1) соответствующим интерполяционным многочленом Лагранжа $L_{n_i}(x)$

$$y_i(x) \approx L_{n_i}(x) \qquad (4)$$

с точностью δ_i

$$\| R_{n_i} \| \le \delta_i , \qquad (5)$$

где $R_{n_i}(x) = y_i(x) - L_{n_i}(x)$ ($i = \overline{1;m}$). Тогда решение (2) интерполируется на отрезке $[a,b]$ с заданной точностью δ многочленом

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i \, L_{n_i}(x) . \qquad (6)$$

Действительно, для интерполяционного процесса

$$y(x) \approx P_N(x) , \qquad (7)$$

где $P_N(x)$ задается формулой (6), погрешность интерполирования имеет следующий вид

$$R_N(x) = y(x) - P_N(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i \, [\, y_i(x) - L_{n_i}(x) \,] = \sum_{i=1}^{m} C_i \, R_{n_i}(x) .$$

Используя свойства нормы $\| u + v \| \le \| u \| + \| v \|$, $\| \lambda u \| = | \lambda | \, \| u \|$, получаем оценку

$$\| R_N \| \le \sum_{i=1}^{m} | C_i | \, \| R_{n_i} \| . \qquad (8)$$

Из соотношений (3), (5), (8) следует, что $\| R_N \| \le \delta$, то есть решение (2) интерполируется на отрезке $[a,b]$ многочленом (6) с заданной точностью δ.

Из оценки (8) видно, что если

$$\lim_{n_i \to \infty} \| R_{n_i} \| = 0 , \; i = \overline{1;m} ,$$

то $\lim\limits_{N \to \infty} \| R_N \| = 0$, то есть для сходимости интерполяционного процесса (7) достаточно, чтобы сходились интерполяционные процессы (4).

Заметим, что степень интерполяционного многочлена (6) определяется формулой

$$N = N(\{ \delta_i \}) = \max_{1 \le i \le m} n_i .$$

Варьируя величинами δ_i ($i = \overline{1;m}$), удовлетворяющими условию (3), и тем самым, степенями n_i интерполяционных многочленов Лагранжа $L_{n_i}(x)$, можно минимизировать степень интерполяционного многочлена (6) [1].

Известно [2, с. 398], что ФСР уравнения (1) образуют решения из класса функций *K*, состоящего из функций следующего вида:

$$x^k \ (k \ge 0); \tag{9}$$

$$e^{\alpha x}, \ \cos\beta x, \ \sin\beta x \ (\alpha \ne 0, \beta \ne 0); \tag{10}$$

$$x^k e^{\alpha x}, \ x^k \cos\beta x, \ x^k \sin\beta x \ (\alpha \ne 0, \beta \ne 0, k \ge 1); \tag{11}$$

$$x^k e^{\alpha x} \cos\beta x, \ x^k e^{\alpha x} \sin\beta x \ (\alpha \ne 0, \beta \ne 0, k \ge 1). \tag{12}$$

Таким образом, вопрос об интерполяции решений уравнения (1) сводится к следующей задаче: для каждой отдельной функции $f(x) \in K$ нужно подобрать степень *n* интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$ таким образом, чтобы $f(x) \approx L_n(x)$ на отрезке $[a, b]$ с заданной точностью $\delta_0 > 0$:

$$\| R_n \| \le \delta_0, \tag{13}$$

где $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$.

Заметим, что решения вида (9), будучи многочленами, в интерполяции не нуждаются.

Для решения поставленной задачи воспользуемся известной оценкой [3, с. 60]

$$\| R_n \| \le \frac{\left\| f^{(n)} \right\| (b-a)^n \, 2^{1-2n}}{n!}. \tag{14}$$

Вначале находится производная $f^{(n)}(x)$: для функций вида (10) – непосредственно; (11) – по формуле Лейбница [4, с. 185]; (12) – с помощью обобщения формулы Лейбница на случай трех сомножителей [5]. Затем находится верхняя оценка для $\left\| f^{(n)} \right\|$, с помощью которой и неравенства (14) получают новую верхнюю границу для $\| R_n \|$. Тогда для выполнения неравенства (13) достаточно потребовать, чтобы эта новая верхняя граница для $\| R_n \|$ не превосходила δ_0. Тем самым, будет указано условие на степень *n* интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$, при выполнении которого поставленная задача интерполяции для взятой конкретной функции $f(x) \in K$ будет решена (естественно, следует выбирать минимальное значение *n*, удовлетворяющее указанному условию).

Пусть, например, характеристическое уравнение для уравнения (1) имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ ($\alpha \ne 0, \beta \ne 0$) кратности $r = 2$. Тогда в ФСР уравнения (1) войдут четыре решения следующего вида:

$$e^{\alpha x} \cos\beta x, \ \ e^{\alpha x} \sin\beta x, \ \ x e^{\alpha x} \cos\beta x, \ \ x e^{\alpha x} \sin\beta x. \tag{15}$$

Решим поставленную выше задачу интерполяции для каждой из функций (15).

I. $f(x) = e^{\alpha x} \cos\beta x$.

Запишем функцию $f(x)$ в виде $f(x) = u(x)\, v(x)$, где $u(x) = e^{\alpha x}$, $v(x) = \cos\beta x.$ Используя формулу Лейбница

$$f^{(n)}(x) = u^{(n)}(x)\, v(x) + u(x)\, v^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \, u^{(n-k)}(x)\, v^{(k)}(x),$$

получаем

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le \left\| u^{(n)} v \right\| + \left\| u\, v^{(n)} \right\| + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \left\| u^{(n-k)} \, v^{(k)} \right\|. \tag{16}$$

Далее, $u^{(n)}(x)=\alpha^n e^{\alpha x}$, $u^{(n)}(x)\, v(x)=\alpha^n e^{\alpha x}\cos\beta x$,

$$\left\| u^{(n)}\, v \right\| = \max_{x\in[a,b]} \left| u^{(n)}(x)\, v(x) \right| = \max_{x\in[a,b]} \left| \alpha^n e^{\alpha x}\cos\beta x \right| =$$

$$= |\alpha|^n \max_{x\in[a,b]} \left| e^{\alpha x}\cos\beta x \right| = |\alpha|^n \, \| f \| \cdot$$

Итак,

$$\left\| u^{(n)}\, v \right\| = |\alpha|^n Q_{\alpha,\beta}, \tag{17}$$

где

$$Q_{\alpha,\beta} = \max_{x\in[a,b]} \left| e^{\alpha x}\cos\beta x \right|. \tag{18}$$

Заметим, что

$$v^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^l \beta^n \sin\beta x, & n=2l-1, \\ (-1)^l \beta^n \cos\beta x, & n=2l. \end{cases} \tag{19}$$

Тогда

$$u(x)\, v^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^l \beta^n e^{\alpha x} \sin\beta x, & n=2l-1, \\ (-1)^l \beta^n e^{\alpha x} \cos\beta x, & n=2l, \end{cases}$$

$$\left\| u\, v^{(n)} \right\| = \begin{cases} |\beta|^n P_{\alpha,\beta}, & n=2l-1, \\ |\beta|^n Q_{\alpha,\beta}, & n=2l, \end{cases} \tag{20}$$

где $Q_{\alpha,\beta}$ задается равенством (18),

$$P_{\alpha,\beta} = \max_{x\in[a,b]} \left| e^{\alpha x}\sin\beta x \right|. \tag{21}$$

Далее, $u^{(n-k)}(x)=\alpha^{n-k} e^{\alpha x}$. Используя формулу (19), получаем

$$v^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \beta^k \sin\beta x, & k=2m-1, \\ (-1)^m \beta^k \cos\beta x, & k=2m. \end{cases}$$

Тогда

$$u^{(n-k)}(x)\, v^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \alpha^{n-k} \beta^k e^{\alpha x} \sin\beta x, & k=2m-1, \\ (-1)^m \alpha^{n-k} \beta^k e^{\alpha x} \cos\beta x, & k=2m, \end{cases}$$

$$\left\| u^{(n-k)}\, v^{(k)} \right\| = \begin{cases} |\alpha|^{n-k} |\beta|^k P_{\alpha,\beta}, & k=2m-1, \\ |\alpha|^{n-k} |\beta|^k Q_{\alpha,\beta}, & k=2m. \end{cases} \tag{22}$$

Так как формула (20) является составной, то необходимо рассмотреть отдельно два случая: *n* нечетно и *n* четно. Так как формула (22) является составной, то в каждом из этих двух случаев надо сумму в правой части неравенства (16) разбить на две: в одну сумму объединить слагаемые с нечетными *k*, в другую – с четными *k*.

Рассмотрим первый случай: *n* нечетно. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \left\| u^{(n-k)}\, v^{(k)} \right\| = \sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2m-1} \left\| u^{(n-2m+1)}\, v^{(2m-1)} \right\| + \sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2m} \left\| u^{(n-2m)}\, v^{(2m)} \right\| \tag{23}$$

В силу соотношений (16), (17), (20), (22), (23)

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le \varphi(n, \alpha, \beta), \tag{24}$$

где

$$\varphi(n,\alpha,\beta) = |\alpha|^n Q_{\alpha,\beta} + |\beta|^n P_{\alpha,\beta} + P_{\alpha,\beta} \sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2m-1} |\alpha|^{n-2m+1} |\beta|^{2m-1} +$$

$$+ Q_{\alpha,\beta} \sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2m} |\alpha|^{n-2m} |\beta|^{2m}. \tag{25}$$

Рассмотрим второй случай: n четно. Проведя аналогичные выкладки, приходим к оценке вида

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le \psi(n, \alpha, \beta), \tag{26}$$

где

$$\psi(n,\alpha,\beta) = \left(|\alpha|^n + |\beta|^n\right) Q_{\alpha,\beta} + P_{\alpha,\beta} \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} C_n^{2m-1} |\alpha|^{n-2m+1} |\beta|^{2m-1} +$$

$$+ Q_{\alpha,\beta} \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}-1} C_n^{2m} |\alpha|^{n-2m} |\beta|^{2m}. \tag{27}$$

Положим

$$\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}, \; R_{\alpha,\beta} = \max\{P_{\alpha,\beta}, \; Q_{\alpha,\beta}\}.$$

Из неравенств (24), (26) видно, что в обоих случаях справедлива оценка

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le R_{\alpha,\beta} \, \gamma^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

или в силу равенства [6, с. 34]

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

получаем неравенство

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le R_{\alpha,\beta} \, (2\gamma)^n. \tag{28}$$

В силу соотношений (14), (28)

$$\| R_n \| \le \frac{R_{\alpha,\beta} \, (2\gamma)^n (b-a)^n \, 2^{1-2n}}{n!}. \tag{29}$$

Запишем оценку (29) в виде

$$\| R_n \| \le \frac{2 R_{\alpha,\beta}}{q^n \, n!}, \tag{30}$$

где

$$q = \frac{2^2}{2\gamma (b-a)}.$$

Покажем, что правая часть неравенства (30) сходится к нулю при $n \to \infty$ (из этого будет вытекать сходимость интерполяционного процесса). Для этого достаточно установить, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q^n\, n!} = 0 . \qquad (31)$$

Рассмотрим знакоположительный ряд с общим членом $a_n = (q^n\, n!)^{-1}$. Применяя признак Даламбера, приходим к выводу, что такой ряд является сходящимся. Следовательно, по необходимому признаку сходимости числового ряда, предел его общего члена равен нулю, то есть имеет место равенство (31). Сходимость интерполяционного процесса доказана.

Вернемся от огрубленной оценки (28) для $\left\| f^{(n)} \right\|$ к более точным оценкам (24), (26).

Пусть *n* нечетно. В силу соотношений (14), (24)

$$\left\| R_n \right\| \le \frac{(b-a)^n\, 2^{1-2n}}{n!}\, \varphi(n, \alpha, \beta) ,$$

где $\varphi(n, \alpha, \beta)$ задается формулой (25). Следовательно, для выполнения условия (13) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{(b-a)^n\, 2^{1-2n}}{n!}\, \varphi(n, \alpha, \beta) \le \delta_0 . \qquad (32)$$

Пусть *n* четно. В силу соотношений (14), (26)

$$\left\| R_n \right\| \le \frac{(b-a)^n\, 2^{1-2n}}{n!}\, \psi(n, \alpha, \beta) ,$$

где $\psi(n, \alpha, \beta)$ задается формулой (27). Следовательно, для выполнения условия (13) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{(b-a)^n\, 2^{1-2n}}{n!}\, \psi(n, \alpha, \beta) \le \delta_0 . \qquad (33)$$

Приходим к следующим выводам.

Если подбирается интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ с нечетным показателем степени *n*, интерполирующий функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с заданной точностью δ_0, то нужно взять минимальное значение *n*, удовлетворяющее неравенству (32).

Если подбирается интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ с четным показателем степени *n*, интерполирующий функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с заданной точностью δ_0, то следует взять минимальное значение *n*, удовлетворяющее неравенству (33).

Такие минимальные значения *n* существуют, ибо левые части неравенств (32), (33) сходятся к нулю при $n \to \infty$, что следует из сходимости к нулю при $n \to \infty$ правой части (29), которая не меньше, чем левые части неравенств (32), (33).

Отыскание таких минимальных значений *n* осуществляется на ЭВМ простым перебором значений *n*.

Если необходимо интерполировать на отрезке $[a,b]$ класс функций

$$\left\{ e^{\alpha x} \cos\beta x \right\}_{\substack{\alpha\in[c,d] \\ \beta\in[\mu,\nu]}}$$

с точностью δ_0, то в условиях (32), (33) вместо констант $|\alpha|$, $|\beta|$, $Q_{\alpha,\beta}$, $P_{\alpha,\beta}$ записываются соответственно константы

$$\alpha^* = \max_{\alpha\in[c,d]} |\alpha|; \quad \beta^* = \max_{\beta\in[\mu,\nu]} |\beta|;$$

$$Q^* = \max_{\substack{\alpha\in[c,d] \\ \beta\in[\mu,\nu]}} Q_{\alpha,\beta}; \quad P^* = \max_{\substack{\alpha\in[c,d] \\ \beta\in[\mu,\nu]}} P_{\alpha,\beta}.$$

II. $f(x) = e^{\alpha x} \sin\beta x$.

Проделав такие же выкладки, что и в пункте I, получаем следующие оценки: в случае нечетности n

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le \mu(n,\alpha,\beta), \tag{34}$$

где

$$\mu(n,\alpha,\beta) = |\alpha|^n P_{\alpha,\beta} + |\beta|^n Q_{\alpha,\beta} + Q_{\alpha,\beta} \sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2m-1} |\alpha|^{n-2m+1} |\beta|^{2m-1} +$$

$$+ P_{\alpha,\beta} \sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2m} |\alpha|^{n-2m} |\beta|^{2m}; \tag{35}$$

в случае четности n

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le \nu(n,\alpha,\beta), \tag{36}$$

где

$$\nu(n,\alpha,\beta) = \left(|\alpha|^n + |\beta|^n\right) P_{\alpha,\beta} + Q_{\alpha,\beta} \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} C_n^{2m-1} |\alpha|^{n-2m+1} |\beta|^{2m-1} +$$

$$+ P_{\alpha,\beta} \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}-1} C_n^{2m} |\alpha|^{n-2m} |\beta|^{2m}. \tag{37}$$

Оценки (34), (36) аналогичны соответственно оценкам (24), (26) (константы $P_{\alpha,\beta}$ и $Q_{\alpha,\beta}$ поменялись ролями). Следовательно, интерполяционный процесс является сходящимся (доказательство точно такое же, как и в пункте I).

Пусть n нечетно. В силу неравенств (14), (34)

$$\left\| R_n \right\| \le \frac{(b-a)^n \, 2^{1-2n}}{n!} \, \mu(n,\alpha,\beta),$$

где $\mu(n,\alpha,\beta)$ задается формулой (35). Следовательно, для выполнения условия (13) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{(b-a)^n \, 2^{1-2n}}{n!} \, \mu(n,\alpha,\beta) \le \delta_0. \tag{38}$$

Пусть n четно. В силу соотношений (14), (36)

$$\left\| R_n \right\| \le \frac{(b-a)^n \, 2^{1-2n}}{n\,!} \; \nu(n,\alpha,\beta)\,,$$

где $\nu(n,\alpha,\beta)$ задается формулой (37). Следовательно, для выполнения условия (13) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{(b-a)^n \, 2^{1-2n}}{n\,!} \; \nu(n,\alpha,\beta) \le \delta_0\,. \tag{39}$$

Таким образом, чтобы интерполировать рассматриваемую функцию $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ на отрезке $[a,b]$ с заданной точностью δ_0, надо в качестве степени интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$ взять в случае нечетного n минимальное значение n, удовлетворяющее условию (38); в случае четного n – минимальное значение n, удовлетворяющее условию (39).

III. $f(x)=x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$.

Запишем функцию $f(x)$ в виде $f(x)=x\,g(x)$, где $g(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ – функция, рассмотренная в пункте I. Применяя формулу Лейбница, получаем

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^{(n-k)} \; g^{(k)}(x) = n\,g^{(n-1)}(x)+x\,g^{(n)}(x)\,.$$

Тогда

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le n \left\| g^{(n-1)} \right\| + c \left\| g^{(n)} \right\|, \tag{40}$$

где $c=\max\{|a|,|b|\}$.

Пусть n нечетно. Используя для $\left\| g^{(n-1)} \right\|$ и $\left\| g^{(n)} \right\|$ соответственно оценки (26) и (24), получаем в силу неравенства (40)

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le n\,\eta(n,\alpha,\beta)+c\,\varphi(n,\alpha,\beta)\,,$$

где $\varphi(n,\alpha,\beta)$ выражается формулой (25);

$$\eta(n,\alpha,\beta)=\left(|\alpha|^{n-1}+|\beta|^{n-1}\right)Q_{\alpha,\beta}+P_{\alpha,\beta}\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} C_{n-1}^{2m-1}\,|\alpha|^{n-2m}\,|\beta|^{2m-1}+$$

$$+Q_{\alpha,\beta}\sum_{m=1}^{\frac{n-3}{2}} C_{n-1}^{2m}\,|\alpha|^{n-1-2m}\,|\beta|^{2m}\,.$$

Пусть n четно. Используя для $\left\| g^{(n-1)} \right\|$ и $\left\| g^{(n)} \right\|$ соответственно оценки (24) и (26), получаем

$$\left\| f^{(n)} \right\| \le n\,\omega(n,\alpha,\beta)+c\,\psi(n,\alpha,\beta)\,,$$

где $\psi(n,\alpha,\beta)$ задается формулой (27);

$$\omega(n,\alpha,\beta)=|\alpha|^{n-1}Q_{\alpha,\beta}+|\beta|^{n-1}P_{\alpha,\beta}+P_{\alpha,\beta}\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}-1} C_{n-1}^{2m-1}\,|\alpha|^{n-2m}\,|\beta|^{2m-1}+$$

$$+Q_{\alpha,\beta}\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}-1} C_{n-1}^{2m}|\alpha|^{n-1-2m}|\beta|^{2m}.$$

Проведя такие же рассуждения, как в пунктах I, II, приходим к следующему выводу: чтобы интерполировать рассматриваемую функцию $f(x)=x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ на отрезке $[a,b]$ с заданной точностью δ_0, надо в качестве степени интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$ взять в случае нечетного n минимальное значение n, удовлетворяющее условию

$$\frac{(b-a)^n\,2^{1-2n}}{n!}\left[\,n\,\eta(n,\alpha,\beta)+c\,\varphi(n,\alpha,\beta)\,\right]\le\delta_0;$$

в случае четного n – минимальное значение n, удовлетворяющее условию

$$\frac{(b-a)^n\,2^{1-2n}}{n!}\left[\,n\,\omega(n,\alpha,\beta)+c\,\psi(n,\alpha,\beta)\,\right]\le\delta_0.$$

IV. $f(x)=x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$.

Запишем функцию $f(x)$ в виде $f(x)=x\,h(x)$, где $h(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ – функция, рассмотренная в пункте II. Имеем:

$$f^{(n)}(x)=n\,h^{(n-1)}(x)+x\,h^{(n)}(x),$$

$$\left\|f^{(n)}\right\|\le n\left\|h^{(n-1)}\right\|+c\left\|h^{(n)}\right\|. \tag{41}$$

Пусть n нечетно. Используя для $\left\|h^{(n-1)}\right\|$ и $\left\|h^{(n)}\right\|$ соответственно оценки (36) и (34), получаем в силу неравенства (41)

$$\left\|f^{(n)}\right\|\le n\,\rho(n,\alpha,\beta)+c\,\mu(n,\alpha,\beta), \tag{42}$$

где $\mu(n,\alpha,\beta)$ выражается формулой (35);

$$\rho(n,\alpha,\beta)=\left(|\alpha|^{n-1}+|\beta|^{n-1}\right)P_{\alpha,\beta}+Q_{\alpha,\beta}\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} C_{n-1}^{2m-1}|\alpha|^{n-2m}|\beta|^{2m-1}+$$

$$+P_{\alpha,\beta}\sum_{m=1}^{\frac{n-3}{2}} C_{n-1}^{2m}|\alpha|^{n-1-2m}|\beta|^{2m}.$$

Пусть n четно. Используя для $\left\|h^{(n-1)}\right\|$ и $\left\|h^{(n)}\right\|$ соответственно оценки (34) и (36), получаем

$$\left\|f^{(n)}\right\|\le n\,\kappa(n,\alpha,\beta)+c\,\nu(n,\alpha,\beta), \tag{43}$$

где $\nu(n,\alpha,\beta)$ задается формулой (37);

$$\kappa(n,\alpha,\beta)=|\alpha|^{n-1}P_{\alpha,\beta}+|\beta|^{n-1}Q_{\alpha,\beta}+Q_{\alpha,\beta}\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}-1} C_{n-1}^{2m-1}|\alpha|^{n-2m}|\beta|^{2m-1}+$$

$$+P_{\alpha,\beta}\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}-1} C_{n-1}^{2m}\,|\,\alpha\,|^{n-1-2m}\,|\,\beta\,|^{2m}\ .$$

Используя неравенства (14), (42), (43) приходим к следующему выводу: чтобы интерполировать рассматриваемую функцию $f(x)=x\,e^{\alpha x}\sin\beta x$ на отрезке $[a,b]$ с заданной точностью δ_0, надо в качестве степени интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$ взять в случае нечетного *n* минимальное значение *n*, удовлетворяющее условию

$$\frac{(b-a)^n\,2^{1-2n}}{n\,!}\ [\,n\,\rho\,(n,\alpha,\beta)+c\,\mu\,(n,\alpha,\beta)\,]\ \le\ \delta_0\ ;$$

в случае четного *n* – минимальное значение *n*, удовлетворяющее условию

$$\frac{(b-a)^n\,2^{1-2n}}{n\,!}\ [\,n\,\kappa\,(n,\alpha,\beta)+c\,\nu\,(n,\alpha,\beta)\,]\ \le\ \delta_0\ .$$

Аналогично интерполируется решение $y=\sum_{i=1}^{m} C_i\,y_i(x)+y_*$ линейного неоднородного дифференциального уравнения *m*-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида, при этом такая задача сводится к интерполяции функций из класса *K*, ибо частное решение y_* представляет собой линейную комбинацию функций из данного класса [2, с. 408].

Список литературы

1. Фомин, В. И. О минимизации степени интерполяционного многочлена / В. И. Фомин // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (26 января – 01 февраля 2017 г.). – Воронеж, 2017. – С. 203 – 204.

2. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1967. – 564 с.

3. Бахвалов, Н. С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) / Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 1973. – 832 с.

4. Ильин, В. А. Основы математического анализа: В 2-х ч. Ч. 1 . Учеб. для вузов, 7-е изд. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 648 с.

5. Фомин, В. И. Формула Лейбница для *m*-й производной произведения нескольких функций / В. И. Фомин // Современные методы теории функций и смежные проблемы: мат. Междунар. конф. : Воронежская зимняя математическая школа (26 января – 01 февраля 2017 г.). – Воронеж, 2017. – С. 205.

6. Сачков, В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики / В. Н. Сачков. – М. : Наука, 1982. – 384 с.

The Interpolation of Linear Differential Equations Solutions

V. I. Fomin

Department of Technical Mechanics and Machine Parts,
TSTU, Tambov, Russia; vasiliyfomin@bk.ru

Keywords: interpolation error; Lagrange interpolation polynomial; interpolation process; interpolation process convergence; fundamental solutions system.

Abstract: The article describes how to choose the degree of an interpolation polynomial in order to interpolate on a given interval with a given accuracy the solutions of linear differential equations with constant coefficients.

References

1. Fomin V.I. *Sovremennyye metody teorii funktsiy i smezhnyye problemy: materialy Mezhdunarodnoy konferentsii: Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola* [Modern methods of the theory of functions and adjacent problems: materials of the International Conference: Voronezh Winter Mathematical School], 26 January - 1 February, 2017, Voronezh, 2017, pp. 203-204. (In Russ.)
2. Matveyev N.M. *Metody integrirovaniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Methods of integration of ordinary differential equations], Moscow: Vysshaya shkola, 1967, 564 p. (In Russ.)
3. Bakhvalov N.S. *Chislennyye metody (analiz, algebra, obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya)* [Numerical Methods (Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations)], Moscow: Nauka, 1973, 632 p. (In Russ.)
4. Il'in V.A., Poznyak E.G. Osnovy matematicheskogo analiza: part. 1. Ucheb. dlya vuzov [Fundamentals of mathematical analysis: part. 1. Textbook. for the universities], Moscow: FIZMATLIT, 2005, 648 p. (In Russ.)
5. Fomin V.I. *Sovremennyye metody teorii funktsiy i smezhnyye problemy: materialy Mezhdunarodnoy konferentsii: Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola* [Modern methods of the theory of functions and adjacent problems: materials of the International Conference: Voronezh Winter Mathematical School], 26 January - 1 February, 2017, Voronezh, 2017, p. 205. (In Russ.)
6. Sachkov V.N. *Vvedeniye v kombinatornyye metody diskretnoy matematiki* [Introduction to combinatorial methods of discrete mathematics], Moscow: Nauka, 1982, 384 p. (In Russ.)

Über die Interpolation von Lösungen der linearen Differentialgleichungen

Zusammenfassung: Es wird gezeigt, wie der Grad eines Interpolationspolynoms gewählt wird, um die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in einem gegebenen Intervall mit einer gegebenen Genauigkeit zu interpolieren.

Sur l'interpolation des solutions des équations différentielles linéaires

Résumé: Est montré comment choisir le degré du polynôme d'interpolation pour interpoler dans une intervalle donnée avec une précision donnée des solutions des équations différentielles linéaires avec des coefficients constants.

Авторы: ***Фомин Василий Ильич*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Техническая механика и детали машин», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.

Рецензент: ***Жуковский Евгений Семенович*** – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института физики, математики и информатики ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г. Р. Державина», г. Тамбов, Россия.