

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИКИ

Е. И. Алгазин

*Кафедра «Электроника и электротехника»,
ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет»,
г. Новосибирск, Россия; evgeniialgazin@gmail.com*

Ключевые слова: временные соотношения; классическое описание электрических цепей; электрическая цепь.

Аннотация: Дано описание способа оценки текущего режима работы электрической цепи с точки зрения анализа ее энергетического состояния на интервале рассмотрения функционирования электрической цепи.

Введение

Рассмотрим простейшие одноконтурные электрические цепи из последовательного соединения элементов R–L–C, L–C и R–C.

До момента коммутации ключа на замыкание в последовательной цепи конденсатор был заряжен зарядом q до напряжения U_C .

После коммутации в цепи происходит разряд конденсатора и энергия, накопленная в электрическом поле конденсатора, трансформируется в энергию магнитного поля индуктивности и частично расходуется на нагрев резистора сопротивлением R .

В случае цепи L–C происходит незатухающий обмен энергией в виде периодического перехода ее из конденсатора в индуктивность. При этом диссипативных потерь энергии нет.

Частично рассмотрены вопросы устойчивости как в классическом понимании во временной области, так и в случае использования предложенного энергетического критерия для оценки устойчивости линейных систем. Для этого в схему вводится отрицательное сопротивление и анализируются вещественные части корней характеристического и алгебраического уравнений.

Постановка задачи

В работе приняты следующие допущения.

1. Сопротивления проводников учтены в резисторе сопротивлением R .
2. Конденсатор емкостью C не имеет токов утечки.
3. Индуктивность L не имеет межвитковых емкостей.
4. До момента коммутации ключа на замыкание конденсатор емкостью C был заряжен до напряжения U_C .

5. Актуальным принято время «жизни» цепи с момента $t_0 = 0$ до момента $U_C = 0$.

Необходимо предложить критерий анализа качества режима функционирования электрической цепи и оценить длительность интервала такого функциони-

рования. В дальнейшем на основе предложенного критерия проводить оценку качества работы блоков и модулей радиоэлектронной аппаратуры в автономном режиме с помощью имитационных программ [1, 2].

Пути решения

Для электрических цепей R–L–C, L–C и R–C интерес представляет собой длительность функционирования цепи в одном и том же режиме. Анализ такого режима при помощи характеристического уравнения, составленного на основе дифференциального уравнения состояния цепи, заключается в нахождении корней характеристического уравнения. Корни соответствуют трем видам режима функционирования электрической цепи: аperiodическому, критическому аperiodическому и колебательному. Но вид текущего режима можно оценить и с помощью корней алгебраического степенного уравнения относительно переменной t такой, что $0 < t < T$, где T – длительность интервала исчерпания энергии от значения E_{\max} до E_{\min} , принятого за ноль.

Интерес представляет случай, когда энергия из конденсатора емкостью C переходит в индуктивность L и наоборот с потерями на резисторе сопротивлением R . Тогда формально переменную t можно рассматривать как $t(E)$, учитывая энергию в конденсаторе как положительную, а энергию катушки – как отрицательную относительно энергии конденсатора.

Положительные затухающие полуволны показывают, сколько раз энергия была в конденсаторе; отрицательные – в индуктивности. Такой режим можно назвать колебательным в смысле времени «жизни» последовательной цепи R–L–C.

Затухание такой синусоиды обеспечивается наличием резистивного элемента.

На рисунке 1 показана функция изменения всей (полной) энергии системы от момента коммутации ключа до исчерпания энергии предварительно заряженного конденсатора ниже уровня, принятого за нулевой, где $E_0(t_0)$ – энергия, накопленная в электрическом поле конденсатора; T – интервал времени, в течение которого энергия $E_0(t_0)$ уменьшилась до нулевого значения.

График изменения функции, показывающей поведение переменной $t(E)$ в неклассическом понимании описания электрических цепей представлен на рис. 2, где $t(E_{\max})$ – момент коммутации ключа; E_0 – энергия, соответствующая первому значению. Энергия E со временем расходуется на нагрев резистора сопротивлением R , и поэтому колебания затухают по экспоненте. Это случай комплексно-сопряженных корней t_1 и t_2 , соответствующий в классическом понимании затухающему колебательному процессу, описываемому изменения U_C .

Из классической теории известно, что это устойчивый процесс и на фазовой плоскости он описывается затухающим узлом.

Если составим функционал энергий F элементов системы и приравняем его нулю (для случая последовательных цепей R–L–C, R–C), то в неклассическом

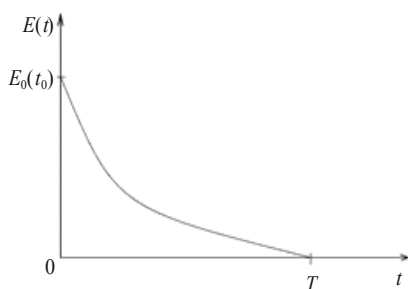


Рис. 1. Функция изменения энергии конденсатора в цепях R–C и R–L–C

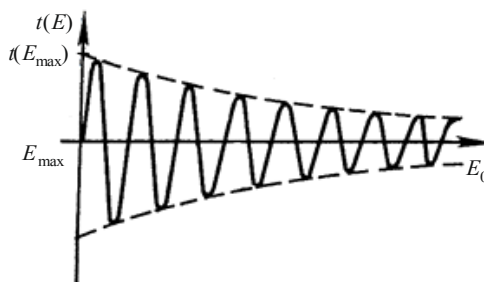


Рис. 2. График изменения функции, описывающей изменение времени как изменение энергии в цепи R–L–C

понимании, решая алгебраическое уравнение, полученное из функционала F , относительно переменной t , получим то его значение, при котором решением является значение времени, за которое энергия предварительно заряженного конденсатора израсходуется до нуля за счет потерь на резисторе. К тому же эти значения времени (комплексно-сопряженные) говорят о колебаниях направления обмена энергией между конденсатором и индуктивностью.

Аналитическое выражение функционала имеет вид

$$F = \frac{qU_C}{2} + L\frac{q^2}{2t^2} + \frac{Rq^2}{t} = 0. \quad (1)$$

Перейдем к решению относительно t и получим

$$t^2 + \frac{2Rq}{U_C}t + \frac{Lq}{U_C} = 0. \quad (2)$$

Если $R > 0$, то вещественные части корней находятся в левой части плоскости, что соответствует в классическом понимании фазовому портрету (рис. 3, а), где $\frac{di}{dt}$ – производная от тока по времени; i – координатная ось тока; $i'(0)$ – значение производной в начальный момент времени $t = 0$; i_{\max} – максимальное значение тока; $t = \infty$ – время установившегося режима.

Если $R < 0$, то вещественные части корней алгебраического уравнения находятся в правой части плоскости; фазовый портрет в классическом понимании представлен на рис. 3, б.

Проведенные расчеты цепи R–L–C показали, что режимы функционирования в классическом случае и случае использования энергетического критерия оценки устойчивости совпадают для колебательного и апериодического режимов.

1) $R = 10^3$ Ом, $L = 10^{-3}$ Гн, $C = 10^{-6}$ Ф:

– классический случай

$$P_{1,2} = -0,5 \cdot 10^{-6} \pm \sqrt{0,25 \cdot 10^{12} - 10^9}; \quad (3)$$

– случай использования энергетического критерия

$$t_{1,2} = -10^{-3} \pm \sqrt{10^{-6} - 10^{-9}}. \quad (4)$$

В итоге получим два вещественных корня в рассматриваемых случаях.

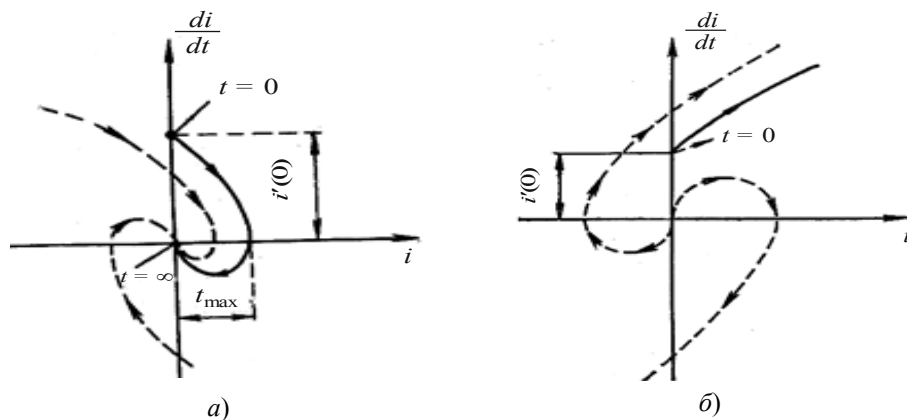


Рис. 3. Фазовый портрет устойчивой (а) и неустойчивой (б) систем в классическом понимании

2) $R = 1$ Ом, $L = 10^{-3}$ Гн, $C = 10^{-6}$ Ф:

– классический случай

$$P_{1,2} = -0,5 \cdot 10^{-3} \pm \sqrt{0,5 \cdot 10^6 - 10^9}; \quad (5)$$

– случай использования энергетического критерия

$$t_{1,2} = -10^{-6} \pm \sqrt{10^{-12} - 10^{-9}}. \quad (6)$$

В итоге получим два вещественных корня в рассматриваемых случаях.

3) $R = 20$ Ом, $L = 10^{-3}$ Гн, $C = 10^{-6}$ Ф:

– классический случай

$$P_{1,2} = -10^{-6} \mp \sqrt{0,5 \cdot 10^8 - 10^9}; \quad (7)$$

– случай использования энергетического критерия

$$t_{1,2} = -2 \cdot 10^{-5} \mp \sqrt{4 \cdot 10^{-10} - 10^{-9}}. \quad (8)$$

В итоге получим два вещественных корня в рассматриваемых случаях.

4) $R = 1$ Ом, $L = 10^{-1}$ Гн, $C = 10^{-5}$ Ф:

– классический случай

$$P_{1,2} = -5 \mp \sqrt{25 - 10^6}; \quad (9)$$

– случай использования энергетического критерия

$$t_{1,2} = -10^{-5} \mp \sqrt{10^{-10} - 10^{-6}}. \quad (10)$$

В итоге получим два вещественных корня в рассматриваемых случаях.

Для цепи L–C в отсутствие потерь на резистивном элементе функционал энергий будет иметь следующий вид

$$F = \frac{qU_C}{2} - L \frac{q^2}{2t^2} = E, \quad (11)$$

где E – значение энергии в цепи.

Время для неклассического случая имеет аналитическое выражение

$$t = \sqrt{\frac{Lq^2}{2E - U_Cq}}. \quad (12)$$

В классическом понимании поведение системы будет описываться следующим графиком изменения энергии в цепи во времени (рис. 4), где E_0 – энергия, накопленная в конденсаторе до момента коммутации.

Незатухающие колебания и фазовый портрет системы, в которой они осуществляются, представлены на рис. 5, 6, где t – координатная ось времени, I – максимальное значение тока.

Для случая цепи R–C функционал энергии имеет следующий вид

$$F = R \left(\frac{q}{t} \right)^2 t - \frac{qU_C}{2}. \quad (13)$$

Приравняв его нулю, найдем время, за которое энергия, запасенная в конденсаторе, будет исчерпана до нуля, превратившись в тепло на резисторе:

$$t = \frac{2Rq}{U_C}. \quad (14)$$

В классическом понимании это затухающий устойчивый процесс, имеющий устойчивый узел.



Рис. 4. Энергия в системе с элементами L–C

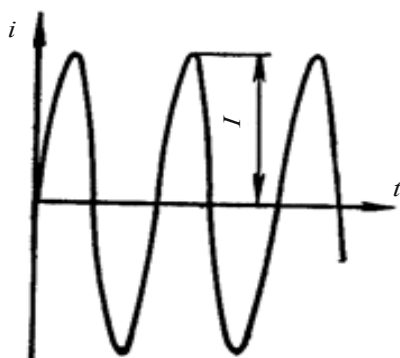


Рис. 5. Незатухающие колебания

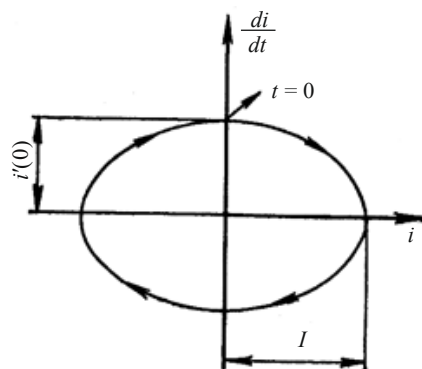


Рис. 6. Фазовый портрет незатухающих колебаний

Результаты

Предложенный подход позволяет обойтись без решения дифференциальных уравнений, описывающих состояние электрической цепи, или системы нескольких таких дифференциальных уравнений и заменить классический подход решением алгебраического степенного уравнения и анализом полученных корней.

Интерпретация рассмотренного подхода заключается в объяснении последствий введения в схему отрицательного сопротивления как основного элемента, влияющего на устойчивость цепи.

Выводы

Проведен анализ и найдено характеристическое уравнение, описывающее поведение исследуемой последовательной цепи, содержащей резистор, емкость и индуктивность, определяющих режим ее работы.

Решено алгебраическое уравнение, корни которого указывают значение времени t , представляющее собой длительность процесса израсходования первоначального запаса энергии в конденсаторе, полученной за счет заряда q .

Как показали расчеты, между классическим методом и предлагаемым имеется однозначное соответствие. Предложенный метод является адекватным и может быть использован для анализа.

Автор выражает благодарность за техническую помощь А. А. Чуликову.

Список литературы

1. Малкин, И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин. – М. : Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956. – 492 с.
2. Филиппов, Е. Нелинейная электротехника: учебное пособие / Е. Филиппов ; пер. и дополн. А. З. Кулебякина. – М. : Энергия, 1968. – 504 с.

Energy Sustainability Criteria of Linear Systems of Automation

E. I. Algazin

*Department of Electronics and Electrical Engineering,
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia,
evgenialgazin@gmail.com*

Keywords: classical description of electrical circuits; electrical circuit; time relations.

Abstract: The research aims to describe the way to assess the current operating mode of the electric circuit from the point of view of the analysis of its energy status considering the range of operation of the circuit.

References

1. Malkin I.G. *Nekotoryye zadachi teorii nelineynykh kolebaniy* [Some problems in the theory of nonlinear oscillations], Moscow: Gos. izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1956, 492 p. (In Russ.)
2. Filippov Ye. *Nelineynaya elektrotehnika: uchebnoye posobiye* [Non-linear electrical engineering: textbook], Moscow: Energiya, 1968, 504 p. (In Russ.)

Energiekriterium der Stabilität der linearen Automatisierungssysteme

Zusammenfassung: Es die Beschreibung eines Verfahrens zur Bewertung der aktuellen Betriebsart des elektrischen Stromkreises von dem Gesichtspunkt der Analyse ihres Energiezustands im Intervall der Prüfung der Funktionsweise des elektrischen Stromkreises gegeben.

Critère énergétique de la stabilité des systèmes linéaires d'automatisation

Résumé: Est donnée la description de la méthode de l'évaluation du mode du fonctionnement actuel du circuit électrique en termes d'analyse de son état énergétique à l'intervalle de l'examen du fonctionnement du circuit électrique.

Автор: *Алгazin Евгений Игоревич* – доктор технических наук, профессор кафедры «Электроника и электротехника», ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет», г. Новосибирск, Россия.

Рецензент: *Разинкин Владимир Павлович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Теоретические основы радиотехники», ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет», г. Новосибирск, Россия.