УДК 517.518
DOI: 10.17277/vestnik.2018.04.pp.670-683

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ В ТОЧКАХ ЛЕБЕГА СРЕДНИМИ РЯДОВ ФУРЬЕ

А. Д. Нахман

Кафедра «Техническая механика и детали машин», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия; alextmb@mail.ru

Ключевые слова: квазивыпуклые методы суммирования; обобщенные точки Лебега; оценки уклонений.

Аннотация: Рассмотрен однопараметрический класс обобщенных точек Лебега. Для каждой суммируемой 2π-периодической функции эти точки расположены почти всюду. Введены средние рядов Фурье, порождаемые линейными полунепрерывными методами суммирования. В случае квазивыпуклых суммирующих последовательностей установлена сходимость средних в каждой обобщенной точки Лебега. Предложены оценки уклонений средних от порождающей их функции. Получены приложения к экспоненциальным методам суммирования. В качестве следствий доказана суммируемость почти всюду рядов Фурье методами Чезаро и Пуассона–Абеля. Указаны мультипликаторы сходимости. Предложены направления распространения результатов на случай кратных рядов Фурье.

1. Постановка задачи

Пусть $L(Q)$ – класс произвольных 2π-периодических суммируемых на $[-\pi, \pi]$ функций $f(x)$,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-ikt)\,dt, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.1}$$

– коэффициенты Фурье любой такой функции f и

$$s[f, x] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\exp(ikx) \tag{1.2}$$

– ее ряд Фурье.

В различных вопросах анализа возникает задача об исследовании поведения при $h \to +0$ семейств линейных средних ряда (1.2)

$$U_h(f) = U(f, x; \lambda, h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{|k|}(h) c_k(f)\exp(ikx), \tag{1.3}$$

где

$$\Lambda = \{\lambda_k(h);\ h > 0,\ k = 0,1,...;\ \lambda_0(h) = 1\} \ - \tag{1.4}$$

бесконечная, вообще говоря, произвольная последовательность, определяемая значениями параметра $h > 0$. В случае когда h – дискретный параметр, близкие задачи (а именно, суммируемость рядов Фурье в точках Лебега и равномерно на промежутке непрерывности функции f) изучали авторы работ [1 – 3] и др.

В работах [4, 5] установлены максимальные оценки средних (1.4) и суммируемость ряда (1.2) квазивыпуклыми методами (1.4) в точках Лебега произвольной $f \in L(Q)$. В настоящей статье изучается суммируемость ряда (1.2) в точках, введенных в работе [6], и обладающих рядом интересных свойств. Получены также оценки уклонения средних от порождающей их функции $f \in L(Q)$.

2. Квазивыпуклые методы суммирования

Последовательность (1.4) называется выпуклой (вогнутой), если $\Delta_k^2 = \Delta^2\lambda_k(h) > 0$ $(\Delta_k^2 < 0)$, где $\Delta_k^2 = \Delta_k - \Delta_{k+1}$, $\Delta_k = \Delta\lambda_k = \lambda_k(h) - \lambda_{k+1}(h)$, $k = 0,1,...$

Последовательность (1.4) кусочно-выпукла, если Δ_k^2 меняет свой знак конечное число раз, $k = 0,1,...$

Как показано в [4], выпуклые (вогнутые) и кусочно-выпуклые последовательности являются частными случаями последовательностей квазивыпуклых, то есть таких, для которых сумма

$$\sum(h,\lambda) = \max_k |\lambda_k(h)| + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,|\Delta^2\lambda_k(h)| \tag{2.1}$$

равномерно по h ограничена.

Лемма 2.1. При всех $N = 0,1,...$ имеют место следующие соотношения [7]:

$$\sum_{k=0}^{N}|\Delta\ \lambda_k(h)| \le \max_{k=0,1,...}|\lambda_k(h)| + \sum_{k=0}^{N}(k+1)\,|\Delta^2\lambda_k(h)|\,; \tag{2.2}$$

$$\lambda_N(h) = \sum_{s=N}^{\infty}\Delta\lambda_k(h)\,; \tag{2.3}$$

$$(N+1)\,|\Delta\lambda_N(h)| \le \sum_{k=N}^{\infty}(k+1)\,|\Delta^2\lambda_k(h)|\,. \tag{2.4}$$

В частности, из (2.2) и условия квазивыпуклости следует, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta\ \lambda_k(h)|$$

сходится при всех $h > 0$, так что, согласно (2.3),

$$\lim_{N\to\infty}\lambda_N(h) = 0 \quad (h > 0).$$

3. Точки Лебега

«Классические» точки Лебега функции определяются как точки x, в каждой из которых имеет место соотношение

$$\int_{-\eta}^{\eta} |f(x+t)-f(x)|\,dt = o(\eta),\ \ \eta \to +0 .$$

Очевидно, что всякая точка x непрерывности функции $f(x)$ является ее точкой Лебега. Заметим, что точки Лебега функций $f \in L(Q)$ расположены почти всюду [8, т. 1, с. 111]. Как известно, в каждой из них ряд Фурье (1.2) суммируем методами Чезаро, Пуассона–Абеля и др. Если указанные факты положить в основу определения обобщенных точек Лебега, то (как станет ясно из дальнейшего рассмотрения), имеет смысл рассматривать точки, в которых «усредненное уклонение» функции

$$R_k(f,x;\eta,\gamma) = \sup_{j=0,1,\dots;\, j<\log_2(2\pi k)} \frac{k}{2^j \eta_\gamma(j)} \int_{-2^j/k}^{2^j/k} |f(x+t)-f(x)|\,dt,\ \ k=1,2,\dots \quad (3.1)$$

бесконечно мало, если $k \to \infty$, а выбор семейства функций η_γ осуществлен некоторым специальным образом, например $\eta_\gamma(j) = 2^{\gamma j}$, $\gamma > 0$ [6].

Работа [6] относится к случаю функций нескольких переменных. Для функций одной переменной обобщением одного из основных результатов [6] является следующее утверждение.

Лемма 3.1. Пусть $\{\eta_\gamma\}$ – семейство положительных функций $\eta_\gamma = \eta_\gamma(\tau)$, определяемых значениями параметра $\gamma > 0$ и возрастающих по аргументам $\tau \ge 0$ и γ. Пусть при этом $\eta_\gamma(0) = 1$ и ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\eta_\gamma(j)} \quad (3.2)$$

сходится. Тогда соотношение

$$\lim_{k\to\infty} R_k(f,x;\eta,\gamma) = 0 \quad (3.3)$$

имеет место почти всюду в Q для всякой $f \in L(Q)$.

Доказательство аналогично [6], поскольку оно опирается на свойства возрастания функции $\eta_\gamma(\tau) = 2^{\gamma\tau}$ $(\tau > 0)$ по переменной γ и сходимость ряда вида (3.2), но эти же свойства постулируются в общем случае функций $\eta_\gamma = \eta_\gamma(\tau)$.

4. Оценки интегралов, содержащих ядра Дирихле и Фейера

Введем в рассмотрение так называемые ядра Дирихле и Фейера [8, т. 1, с. 86, 148]

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \cos \nu t = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t},\ \ F_k(t) = \frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k} D_k(t) = \frac{\sin^2 \frac{k+1}{2}t}{2(k+1)\sin^2\frac{1}{2}t} \quad (4.1)$$

соответственно; полагаем $D_{-1}(t) = F_{-1}(t) \equiv 0$.

Лемма 4.1. Для любой функции η_γ, удовлетворяющей условиям леммы 3.1, имеет место оценка

$$\int_{-\pi}^{\pi} | f(x+t) - f(x) | \, | D_k(t) | \, dt \le C\eta_\gamma\big(\log_2 2\pi(k+1)\big)\log_2 2\pi(k+1) \times$$

$$\times R_{k+1}(f, x; \eta, \gamma), \quad k = 0, 1, ... \qquad (4.2)$$

При дополнительном условии сходимости ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta_\gamma(j)}{2^j} \qquad (4.3)$$

справедливо также соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} | f(x+t) - f(x) | \; F_k(t) \, dt \le C \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta_\gamma(j)}{2^j} \right) R_{k+1}(f, x; \eta, \gamma), \quad k = 0, 1, ... \qquad (4.4)$$

Здесь и в дальнейшем через C обозначены постоянные, вообще говоря, различные и зависящие только от явно указанных индексов.

Доказательство. Воспользуемся неравенствами, очевидным образом вытекающими из (4.1):

$$| D_k(t) | + F_k(t) \le C(k+1), \; k = 0, 1, ... ; \qquad (4.5)$$

$$| D_k(t) | \le C \frac{1}{|t|}, \; 0 < |t| \le \pi, \quad k = 0, 1, ... ; \qquad (4.6)$$

$$F_k(t) \le C \frac{1}{(k+1)t^2}, \; 0 < |t| \le \pi, \; k = 0, 1, ..., \qquad (4.7)$$

и при каждом $k = 0, 1, ...$ выберем натуральное S такое, что $\dfrac{2^{S-1}}{k+1} \le \pi < \dfrac{2^S}{k+1}$

Установим (4.2). Согласно (4.5), (4.6) и (3.1), будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} | f(x+t) - f(x) | | D_k(t) | \, dt \le$$

$$\le C \left((k+1) \int_{|t| \le \frac{1}{k+1}} | f(x+t) - f(x) | \, dt + \sum_{j=1}^{S} \frac{k+1}{2^{j-1}} \int_{\frac{2^{j-1}}{k+1} \le |t| \le \frac{2^j}{k+1}} | f(x+t) - f(x) | \, dt \right) \le$$

$$\le C \left(\eta_\gamma(0) \frac{k+1}{2^0 \eta_\gamma(0)} \int_{|t| \le \frac{2^0}{k+1}} | f(x+t) - f(x) | \, dt + \sum_{j=1}^{S} \eta_\gamma(j) \frac{k+1}{\eta_\gamma(j) 2^j} \int_{|t| \le \frac{2^j}{k+1}} | f(x+t) - f(x) | \, dt \;) \right) \le$$

$$\le C\big(\eta_\gamma(0) + S\eta_\gamma(S)\big) \sup_{j = 0, 1, ...; \, j < \log_2(2\pi(k+1))} \frac{k+1}{2^j \eta_\gamma(j)} \int_{-2^j/(k+1)}^{2^j/(k+1)} | f(x+t) - f(x) | \, dt \le$$

$$\le C \; \eta_\gamma\big(\log_2 2\pi(k+1)\big)\log_2 2\pi(k+1) \; R_{k+1}(f, x; \eta, \gamma) \, .$$

Оценка (4.2) доказана.

Докажем (4.4). В силу (4.5) и (4.7) получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} | f(x+t) - f(x) | \; F_k(t)\,dt \le$$

$$\le C\left((k+1) \int_{|t| \le \frac{1}{k+1}} | f(x+t) - f(x) | \,dt + \sum_{j=1}^{S} \frac{k+1}{(2^{j-1})^2} \int_{\frac{2^{j-1}}{k+1} \le |t| \le \frac{2^j}{k+1}} | f(x+t) - f(x) | \,dt \right) \le$$

$$\le C\left(\eta_\gamma(0) \frac{k+1}{2^0 \eta_\gamma(0)} \int_{|t| \le \frac{2^0}{k+1}} | f(x+t) - f(x) | \,dt + \sum_{j=1}^{S} \frac{\eta_\gamma(j)}{2^j} \left(\frac{k+1}{\eta_\gamma(j) 2^j} \int_{|t| \le \frac{2^j}{k+1}} | f(x+t) - f(x) | \,dt \right)\right) \le$$

$$\le C\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta_\gamma(j)}{2^j} \right) R_{k+1}(f, x; \eta, \gamma).$$

Лемма доказана.

В качестве примеров функций η_γ, удовлетворяющих условиям сходимости рядов (3.2), (4.3), укажем следующие:

$$\eta_\gamma(\tau) = 2^{\gamma\tau}, \; \tau \ge 0, \; 0 < \gamma < 1; \tag{4.8}$$

$$\eta_\gamma(\tau) = (\tau+1)^{\gamma+1}, \; \tau \ge 0, \;\; \gamma > 0; \tag{4.9}$$

$$\eta_\gamma(\tau) = (\tau+2) \log_2^{\gamma+1}(\tau+2), \; \tau \ge 0, \;\; \gamma > 0. \tag{4.10}$$

5. Оценки уклонения

Лемма 5.1. Пусть семейство функций $\eta_\gamma = \eta_\gamma(j)$, $\gamma > 0$, таково, что ряды (3.2) и (4.3) являются сходящимися. Тогда при всех $h > 0$ в каждой точке x имеет место оценка

$$\left| \sum_{k=-N}^{N} \lambda_{|k|}(h) c_k(f) \exp(ikx) - f(x) \right| \le C_{\eta,\gamma} \Big((| \lambda_N(h) | \times$$

$$\times \eta_\gamma\big(\log_2 2\pi(N+1)\big) \log_2 2\pi(N+1) R_{N+1}(f, x; \eta, \gamma) +$$

$$+ N \, | \Delta\lambda_N(h) | \, R_N(f, x; \eta, \gamma) + \sum_{k=0}^{N-2} (k+1) \, | \Delta^2 \lambda(h) | R_{k+1}(f, x; \eta, \gamma) \Big), \quad N = 0, 1, \ldots \tag{5.1}$$

Доказательство. Используя интегральную форму комплексных коэффициентов Фурье (1.1), получим с помощью преобразования Абеля [8, т. 1, с. 15]

$$\sum_{k=-N}^{N} \lambda_{|k|}(h) c_k(f) \exp(ikx) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f(x)) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(h) \cos k(x-t) \right) dt =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+t)-f(x)\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(h)\cos kt\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+t)-f(x)\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(h)\left(D_k(t)-D_{k-1}(t)\right)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lambda_N(h)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+t)-f(x)\right)D_N(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+t)-f(x)\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{N-1}\Delta\lambda_k(h)\,D_k(t)\;dt\,.$$

Применив очевидное соотношение

$$D_k(t)=(k+1)F_k(t)-kF_{k-1}(t),\quad k=0,1,...$$

и (повторно) преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{k=-N}^{N}\lambda_{|k|}(h)c_k(f)\exp(ikx)-f(x)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lambda_N(h)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+t)-f(x)\right)D_N(t)\,dt+\frac{1}{\pi}N\,\Delta\lambda_N(h)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+t)-f(x)\right)\times$$

$$\times F_{N-1}(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{N-2}(k+1)\Delta^2\lambda_k(h)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+t)-f(x)\right)F_k(t)\,dt\,. \qquad (5.2)$$

Из равенства (5.2), в силу оценок (4.2) и (4.4), будет следовать утверждение (5.1), и лемма доказана.

Теорема 5.1. Пусть семейство функций $\eta_\gamma=\eta_\gamma(\tau)$, $\gamma>0$, таково, что ряды (3.2) и (4.3) являются сходящимися. Пусть также последовательность (1.4) квазивыпукла, $h>0$ и

$$\sup_{N=0,1,...}\{|\lambda_N(h)|\,\eta_\gamma\left(\log_2 2\pi(N+1)\right)\log_2 2\pi(N+1)\}<\infty\,. \qquad (5.3)$$

Тогда ряд (1.3) сходится при всех $h>0$ в каждой точке x, в которой имеет место соотношение (3.3), и при этом справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_{|k|}(h)c_k(f)\exp(ikx)-f(x)\right|\le C_{\eta,\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,|\,\Delta^2\lambda_k(h)\,|\;R_{k+1}(f,x;\eta,\gamma)\,. \qquad (5.4)$$

Замечание. Сумма ряда в правой части (5.4) конечна в каждой точке x, в которой справедливо (3.3). Действительно, в силу (3.3), последовательность $\{R_k(f,x;\eta,\gamma)\}$ равномерно (по k) ограничена, и остается (см. (2.1)) воспользоваться квазивыпуклостью (1.4).

Доказательство. Установим сходимость ряда (1.3) в вышеуказанных точках x. Рассмотрим представление (5.2). Первое слагаемое в его правой части стремится к нулю при $N \to \infty$ в силу (4.2), (5.3) и (3.3). То же самое, согласно (3.3), верно и для второго слагаемого. Действительно, имеет место неравенство (4.4), а множители $(N+1)\,|\Delta\lambda_N(h)|$ будут равномерно (по N) ограниченными, если принять во внимание оценку (2.4) и квазивыпуклость (1.4). Наконец, абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2\lambda_k(h)\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x+t)-f(x)\big)\,F_k(t)\,dt\,,$$

порождаемого третьим слагаемым в правой части (5.2), очевидна в силу (4.4) и (3.3).

Теперь оценка (5.4) – прямое следствие представления (5.2) из только что проведенных рассуждений.

6. Суммируемость почти всюду

Теорема 6.1. Пусть семейство функций $\eta_\gamma = \eta_\gamma(\tau)$, $\gamma > 0$, таково, что ряды (3.2) и (4.3) являются сходящимися. Пусть также последовательность (1.4) квазивыпукла и выполнено условие

$$\lim_{h\to+0}\lambda_k(h)=1, \qquad k=0,1,... \tag{6.1}$$

Тогда соотношение

$$\lim_{h\to+0}U(f,x;\lambda,h)=f(x) \tag{6.2}$$

имеет место в каждой обобщенной точке Лебега (точке, где выполнено (3.3)), то есть почти всюду в Q.

Доказательство. В основе доказательства будет лежать оценка (5.4). В силу (3.3), для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $R_{k+1}(f,x;\eta,\gamma) < \varepsilon$ справедливо в соответствующей точке *x* при всех значениях *k*, больших некоторого $\nu = \nu(\varepsilon, x)$. Следовательно,

$$|U(f,x;\lambda,h)-f(x)|\le C_{\eta,\gamma}\left(\sum_{k=0}^{\nu}(k+1)\,|\Delta^2\lambda(h)|\;R_{k+1}(f,x;\eta,\gamma)+\varepsilon\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=\nu+1}^{\infty}(k+1)\,|\Delta^2\lambda(h)|\right). \tag{6.3}$$

Далее, согласно (6.1), справедливо соотношение $\Delta^2\lambda_k(h)\to 0$ при $h\to+0$ и $k=0,1,...,\nu$. Значит, первая из сумм (состоящая из фиксированного числа слагаемых) в правой части (6.3) стремится к нулю в каждой точке *x,* где значения $R_{k+1}(f,x;\eta,\gamma)$ конечны (в частности, где выполнено (3.3)). В то же время, вторая из сумм в (6.3), ввиду квазивыпуклости (1.4), не превосходит значения ε, умноженного на некоторую (зависящую лишь от λ) константу. Следовательно,

$$\lim_{h\to+0}|U(f,x;\lambda,h)-f(x)|\le C_{\eta,\gamma,\lambda}\,\varepsilon\,,$$

откуда, в силу произвольности ε, и следует выполнимость соотношения (6.2) в каждой обобщенной точке Лебега. Теорема доказана.

7. Экспоненциальные методы суммирования

В настоящем параграфе ограничиваемся рассмотрением экспоненциальных методов суммирования, соответствующих случаю $\lambda_k(h)=\lambda(x,h)|_{x=k}$, $k=1,2,\dots$, где $\lambda(x,h)=\exp(-h\varphi(x))$, $\exp(-h\varphi(0))=1$, а функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0,+\infty)$ и дважды дифференцируема на $(0,+\infty)$.

Рассмотрим, как выглядит условие (5.3) в случаях (4.8) – (4.10). Если $\eta_\gamma(\tau)=2^{\gamma\tau}$, $0<\gamma<1$, то (5.3) принимает вид

$$\exp(-h\varphi(N))\ (N+1)^\gamma \log_2 2\pi(N+1) < C_{h,\gamma}. \tag{7.1}$$

Поскольку логарифмическая функция растет медленнее степенной, условие (7.1) будет выполнено, если потребовать, чтобы

$$\exp(-h\varphi(N))\ (N+1)^\beta < C_{h,\beta},\quad N=0,1,\dots \tag{7.2}$$

с каким либо β, $0<\gamma<\beta<1$.

В случае $\eta_\gamma(\tau)=(\tau+1)^{\gamma+1}$, $\gamma>0$, условие (5.3) равносильно следующему

$$\exp(-h\varphi(N))\ (\log_2 2\pi(N+1))^{\gamma+2} < C_{h,\gamma},\quad N=0,1,\dots \tag{7.3}$$

Если же $\eta_\gamma(\tau)=(\tau+2)\log_2^{\gamma+1}(\tau+2)$, $\gamma>0$, то (5.3) принимает вид

$$\exp(-h\varphi(N))\ (\log_2 2\pi(N+1))^2 \log_2^{\gamma+1}\left(\log_2 2\pi(N+1)\right) < C_{h,\gamma},\ N=0,1,\dots \tag{7.4}$$

Таким образом, при выполнении какого-либо из условий (7.1), (7.3), (7.4), в каждой точке x соотношение

$$\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(-h\varphi(|k|))c_k(f)\exp(ikx)-f(x)\right|\le$$

$$\le C_{\eta,\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\exp(-h\varphi(k))\right|\ R_{k+1}(f,x;\eta,\gamma) \tag{7.5}$$

имеет место, если функция $\eta_\gamma(\tau)$ выбрана соответствующим образом.

Перейдем к рассмотрению примеров.

1) Пусть $\varphi(x)=\ln(x+1)$, в этом случае $\exp(-h\varphi(N))=(N+1)^{-h}$, $N=0,1,\dots$, и суммирующая последовательность (1.4) выпукла.

Выбор фиксированного γ в условии (7.1), либо β в (7.2) не представляется возможным, поскольку эти условия будут выполнены при γ или β, зависящих от переменной величины h. Следовательно, к данному методу суммирования не применимы результаты [6]. Условие же (7.3) оказывается выполненным при произвольном фиксированном $\gamma>0$, так что имеет место (7.5) с $\eta_\gamma(\tau)=(\tau+1)^{\gamma+1}$. Действительно ($s+2$)-кратное применение правила Лопиталя показывает, что предел

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(\log_2 2\pi(N+1))^{\gamma+2}}{(N+1)^h}=C_\gamma\lim_{N\to\infty}\frac{(\ln N))^{\gamma+2}}{N^h}=$$

$$=C_{\gamma,h}\lim_{N\to\infty}\frac{(\ln N))^{\gamma+1}}{N^h}=...=C_{\gamma,h}\lim_{N\to\infty}\frac{(\ln N))^{\gamma-s}}{N^h}$$

будет равен нулю при любом $h>0$, если выбрать наименьшее целое s из условия $s\ge\gamma$. Значит последовательность

$$\left\{\frac{(\log_2 2\pi(N+1))^{\gamma+2}}{(N+1)^h}\right\}$$

ограничена, что предполагалось в (7.3), и (7.5) справедливо с $\eta_\gamma(\tau)=(\tau+1)^{\gamma+1}$. Заметим, что наряду с фактом суммируемости ряда Фурье почти всюду методом [4]

$$\lambda_k(h)=\frac{1}{(k+1)^h},\quad k=0,1,...,\quad h\to+0$$

теперь установлен также характер точек суммируемости.

2) В случае $\varphi(x)=x^\alpha$ последовательность (1.4) выпукла при $0<\alpha\le1$ и кусочно-выпукла при $\alpha>1$; следовательно, выполнено условие ее квазивыпуклости. Здесь имеет место соотношение (7.2) с любым фиксированным β, выбранным из условия $0<\gamma<\beta<1$, так что (7.5) справедливо с $\eta_\gamma(\tau)=2^{\gamma\tau}$. Действительно, согласно правилу Лопиталя,

$$\lim_{N\to\infty}\exp(-hN^\alpha)\,(N+1)^\beta=C_{h,\alpha,\beta}\lim_{N\to\infty}\frac{N^{\beta-\alpha}}{\exp(hN^\alpha)},\qquad N=0,1,... \tag{7.6}$$

Если $\alpha\ge\beta$, то предел в правой части (7.6) равен нулю; в случае же $0<\alpha<\beta$ равенство нулю этого предела устанавливается s-кратным применением правила Лопиталя, где s – наименьшее положительное целое, выбранное из условия $\beta\le s\alpha$. Таким образом, последовательность $\left\{\exp(-hN^\alpha)(N+1)^\beta\right\}$ ограничена, что и утверждалось.

Заметим, что частным случаем метода суммирования $\lambda_k(h)=\exp(-hk^\alpha)$, $k=0,1,...,$ является классический метод Пуассона–Абеля, соответствующий случаю $\alpha=1$, $h=\ln\frac{1}{r}$, $\quad 0<r<1$.

8. Методы Чезаро

Рассмотрим в определении (1.4) случай треугольных суммирующих матриц (параметр h дискретен [1, 2]):

$$\Lambda=\{\lambda_k^n;\ k=0,1,...,n;\ n=0,1,...;\ \lambda_0^n=1;\ \lambda_k^n=0,\ k>n\}. \tag{8.1}$$

В этом случае преобразования п. 5 приводят к соотношению

$$\sum_{k=-n}^{n} \lambda_k^n c_k(f) \exp(ikx) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+t) - f(x)\right) \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k^n D_k(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n} (k+1)\Delta^2 \lambda_k^n \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+t) - f(x)\right) F_k(t)\, dt$$

и, следовательно,

$$\left| \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k^n c_k(f) \exp(ikx) - f(x) \right| \le C_{\eta,\gamma,\lambda}\, R_{k+1}(f, x; \eta, \gamma) \tag{8.2}$$

для всякой квазивыпуклой последовательности (8.1).

Рассмотрим теперь классические методы суммирования Чезаро, для которых в (8.1) $\lambda_k^n = \dfrac{A_{n-k}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$; здесь $\{A_k^{\alpha}\}$ – последовательность биномиальных коэффициентов. Как известно [9, с. 482 – 483], в этом случае последовательность (8.1) является вогнутой при $0 < \alpha \le 1$. Следовательно, оценка (8.2) имеет место для средних Чезаро, если $0 < \alpha \le 1$. Поскольку суммируемость ряда в данной точке при $\alpha = \alpha_1$ влечет за собою суммируемость в той же точке при $\alpha = \alpha_2$, $\alpha_2 > \alpha_1$, то имеем тогда следствием результата (8.2) суммируемость ряда Фурье методами Чезаро почти всюду при любых $\alpha > 0$.

9. Мультипликаторы сходимости

Говорят, что члены последовательности $\{\lambda_k\}$, $k = 0,1,...$, являются мультипликаторами сходимости ряда Фурье (1.2) в точке *x*, если в этой точке сходится ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{|k|} c_k(f) \exp(ikx). \tag{9.1}$$

Мультипликаторы сходимости почти всюду ряда Фурье указаны в [8, т. 1, с. 156].

Методы п. 5 оказываются применимыми в случае мультипликаторов и позволяют уточнить информацию о сходимости ряда (9.1), а именно, здесь указываются точки сходимости.

Имеет место следующий аналог теоремы 5.1.

Теорема 9.1. Пусть семейство функций $\eta_\gamma = \eta_\gamma(\tau)$, $\gamma > 0$, таково, что ряды (3.2) и (4.3) являются сходящимися. Пусть также последовательность $\Lambda = \{\lambda_k;\ k = 0,1,...;\ \lambda_0 = 1\}$ квазивыпукла и

$$\sup_{N=0,1,...} \{|\lambda_N|\, \eta_\gamma\left(\log_2 2\pi(N+1)\right) \log_2 2\pi(N+1)\} < \infty.$$

Тогда ряд (9.1) сходится в каждой точке *x*, в которой имеет место соотношение (3.3).

Доказательство вытекает из равенства (5.2), в котором вместо $\lambda_k(h)$ записаны мультипликаторы λ_k.

В частности (см. п. 7), если $\eta_\gamma(\tau) = 2^{\gamma\tau}$, $\gamma \in (0,1)$, то в качестве мультипликаторов сходимости почти всюду можно выбрать $\lambda_k = \dfrac{1}{(k+1)^{\alpha}}$, $\alpha > \gamma$; $k = 0,1,...$.

10. Суммирование двойных рядов Фурье

Выше указывалось, что работа [6], в которой введены обобщенные точки Лебега, относится к случаю функций нескольких переменных. Распространим результаты настоящей работы на кратные ряды Фурье. Ограничимся случаем 2π-периодических по каждой переменной функций $f = f(x,y)$, $f \in L\ln^{+} L(Q)$. Пусть

$$c_{kl}(f) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,z)\exp(-i(kt+lz))\,dtdz,\ k,l = 0,\pm 1,\pm 2,...$$

– коэффициенты Фурье любой такой функции f и

$$s[f;x,y] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{kl}(f)\exp(i(kx+ly)) \tag{10.1}$$

– ее двойной ряд Фурье, частичные суммы которого понимаются в смысле Прингсхейма [8, т. 2, с. 454].

Для простоты изложения будем рассматривать только мультипликативные полунепрерывные методы суммирования $\lambda_{kl}(h,\theta) = \lambda_k^{(1)}(h)\lambda_l^{(2)}(\theta)$, где члены каждой из последовательностей $\{\lambda_k^{(1)}\}$, $\{\lambda_l^{(2)}\}$ определены в виде (1.4). Введем в рассмотрение λ-средние ряда (10.1)

$$U_{h\theta}(f) = U(f,x,y;\lambda,h,\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda_{|k|}^{(1)}(h)\lambda_{|l|}^{(2)}(\theta)c_{kl}(f)\exp(i(kx+ly)). \tag{10.2}$$

Обобщенные точки Лебега функций $f \in L\ln^{+} L(Q)$ определяются как точки (x,y), в которых

$$\lim_{k,l\to\infty} R_{k,l}(f,x,y;h,\gamma;\rho,\delta) = 0\,, \tag{10.3}$$

где

$$R_{k,l}(f,x,y;h,\gamma;\rho,\delta) =$$

$$= \sup_{i,j=0,1,...;\,i,j<\log_2(2\pi k)} \frac{kl}{2^{i+j}\eta_\gamma(i)\rho_\delta(j)}\int_{-2^i/k}^{2^i/k}\int_{-2^j/l}^{2^j/l} |f(x+t,y+z)-f(x,y)|\,dtdz,\quad k,l = 1,2,...,$$

а функции η_γ и ρ_δ удовлетворяют условиям леммы 3.1. Как показано в [6], для каждой $f \in L\ln^{+} L(Q)$ такие точки расположены почти всюду. Имеет место следующий аналог теоремы 5.1.

Теорема 10.1. Пусть выбор функций η_γ и ρ_δ, $\gamma,\delta > 0$, таков, что ряды (3.2) и (4.3) являются сходящимися. Пусть также каждая из последовательностей $\{\lambda_k^{(1)}\}$, $\{\lambda_l^{(2)}\}$ квазивыпукла и удовлетворяет условию вида (5.3) при всех $h > 0$, $\theta > 0$. Тогда ряд (10.2) сходится в каждой точке (x,y), в которой имеет место соотношение (10.3), и при этом справедлива оценка

$$|U(f,x,y;\lambda,h,\theta)-f(x,y)|\leq C_{\eta,\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(k+1)(l+1)\left|\Delta^2\lambda_k^{(1)}(h)\Delta^2\lambda_l^{(2)}(\theta)\right|\times$$

$$\times R_{k+1,l+1}(f,x,y;h,\gamma;\rho,\delta)\,.$$

Утверждение теоремы 10.1 перестает быть, вообще говоря, верным для функций $f(x,y)\in L(Q)$. В этом случае рассматривают так называемую ограниченную суммируемость [8, т. 2, с. 465 – 473]. Отметим, что некоторые результаты работы [10] могут быть перенесены на изучаемые здесь полунепрерывные методы суммирования двойных рядов Фурье.

Список литературы

1. Никольский, С. М. О линейных методах суммирования рядов Фурье / С. М. Никольский // Изв. Акад. наук СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук. Сер. мат. – 1948. – № 12. – С. 259 – 278.

2. Ефимов, А. В. О линейных методах суммирования рядов Фурье / А. В. Ефимов // Изв. Акад. наук СССР. Отделение мат. и естеств. наук. Сер. мат. – 1960. – № 24. – С. 743 – 756.

3. Баусов, Л. И. О линейных методах суммирования рядов Фурье /Л. И. Баусов // Мат. сб., 1965. – Т. 68 (110), № 3. – С. 313 – 327.

4. Nakhman, A. D. Exponential Methods of Summation of the Fourier Series / A. D. Nakhman, B. P. Osilenker // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. –2014. – Т. 20, № 1. – С. 101 – 109.

5. Осиленкер, Б. П. Поведение экспоненциальных средних рядов Фурье и сопряженных рядов Фурье в точках Лебега / Б. П. Осиленкер, А. Д. Нахман // Вестн. МГСУ. – 2014. – № 10. – С. 54 – 63. doi: 10.22227/1997-0935.2014.10.54-63

6. Габисония, О. Д. О точках суммируемости двойных рядов Фурье некоторыми линейными методами / О. Д. Габисония // Известия вузов. Матем. – 1972. – № 5. – С. 29 – 37.

7. Nakhman, A. D. Regular Semi-Continuous Methods of Summation of Fourier Series / A. D. Nakhman, B. P. Osilenker // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2017. – Т. 23, № 1. – С. 135 – 148. doi: 10.17277/vestnik.2017.01.pp.135-148

8. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : пер. с англ. : в 2 т. / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – 2 т.

9. Бари, Н. К. Тригонометрические ряды : монография / Н. К. Бари. – М. : Физматлит, 1961. – 936 с.

10. Нахман, А. Д. Обобщенные средние Валле-Пуссена кратных рядов Фурье / А. Д. Нахман // Известия вузов. Матем. – 1990. – № 1. – С. 61 – 69.

Approximation of Functions in Lebesgue Points by the Mean Fourier Series

A. D. Nakhman

Department of Technical Mechanics and Machine Parts, TSTU, Tambov, Russia; alextmb@mail.ru

Keywords: quasiconvex summation methods; generalized Lebesgue points; deviation estimates.

Abstract: The one-parameter class of generalized Lebesgue points is considered. For each summable-periodic function, these points are located almost everywhere. The mean Fourier series, which are generated by linear semi-continuous summation methods, are introduced. In the case of quasi-convex summing sequences, the convergence of averages is established at each generalized Lebesgue point. The estimates of deviations of averages from their generating function are proposed. Applications to exponential summation methods are obtained. As a corollary, summability is proved almost everywhere of Fourier series by the Cesàro methods and the Poisson-Abel type methods. Convergence multipliers are indicated. The directions of distribution of results in the case of multiple Fourier series are proposed.

References

1. Nikol'skij C.M. [On Linear Methods of Summation of Fourier Series], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Otdelenie matematicheskikh i estestvennykh nauk. Seriya Matematicheskay*a [Izvestiya of the USSR Academy of Sciences. Branch of Mathematical and Natural Sciences. Mathematical Series], 1948, no. 12, pp. 259-278. (In Russ.)

2. Efimov A.V. [On Linear Methods of Summation of Fourier Series], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Otdelenie matematicheskikh i estestvennykh nauk. Seriya Matematicheskay*a [Izvestiya of the USSR Academy of Sciences. Branch of Mathematical and Natural Sciences. Mathematical Series], 1960, no. 24, pp. 743-756. (In Russ.)

3. Bausov L.I. [On linear methods of summation of Fourier series], *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical collection], 1965, vol. 68 (110), no. 3, pp. 313-327. (In Russ.)

4. Nakhman A.D., Osilenker B.P. [Exponential methods of summation of Fourier series], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 101-109. (In Eng., abstract in Russ.)

5. Osilenker B.P., Nakhman A.D. [Behavior of exponential means of Fourier series and conjugate Fourier series at Lebesgue points], *Vestnik MGSU* [Bulletin of MGSU], 2014, no.10, pp. 53-63, doi: 10.22227/1997-0935.2014.10.54-63 (In Russ., abstract in Eng.)

6. Gabisoniya, O.D. [On points of summability of double Fourier series by some linear methods], *Izvestiya vuzov* [Proceedings of high schools], 1972, no. 5, pp. 29-37. (In Russ.)

7. Nakhman A.D., Osilenker B.P. [Regular semicontinuous methods for summing Fourier series], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2017, vol. 23, no. 1, pp.135-148, doi: 10.17277/vestnik.2017.01.pp.135-148 (In Eng., abstract in Russ.)

8. Zygmund A. *Trigonometricheskie ryady* [Trigonometric series], Cambridge University Press, 1959. (In Russ.)

9. Bari N.K. *Trigonometricheskie ryady* [Trigonometric series], Moscow: Fizmatlit, 1961, 936 p. (In Russ.)

10. Nakhman A.D. [The generalized Vallee-Poussin means of multiple Fourier series], *Izvestiya vuzov* [Proceedings of high schools], 1990, no. 1, pp. 61-69. (In Russ.)

Approximation von Funktionen in Lebesgue-Punkten mit Durchschnitten der Fourier-Reihen

Zusammenfassung: Es wird die Ein-Parameter-Klasse von verallgemeinerten Lebesgue-Punkten betrachtet. Für jede summierbare 2π periodische Funktion befinden sich diese Punkte fast überall. Es werden die Durchschnitte der Fourier-Reihen vorgestellt, die durch lineare semikontinuierliche Summationsmethoden erzeugt werden. Im Falle von quasi-konvexen summierenden Sequenzen ist die Konvergenz der Durchschnitte in jedem verallgemeinerten Lebesgue-Punkt festgelegt. Es werden Schätzwerte für Abweichungen der Durchschnittswerte von ihrer Erzeugungsfunktion vorgeschlagen. Anwendungen für exponentielle Summierungsmethoden sind erhalten. Infolgedessen ist die Summierbarkeit fast überall in Fourier-Reihen durch Cesàro-Methoden und Poisson-Abel-Methoden nachgewiesen. Konvergenzmultiplikatoren sind angegeben. Die Richtungen der Verteilung der Ergebnisse auf Vielfache der Fourier-Reihen sind vorgeschlagen.

Approximation des fonctions dans les points de Lebesgue et les séries moyennes de Fourier

Résumé: Est considéré la classe uniparamétrique de la synthèse des points de Lebesgue. Pour chaque fonction 2π-périodique résumée, ces points sont situés presque partout. Sont introduites des séries moyennes de Fourier générées par des méthodes de sommation semi-continues linéaires Dans le cas des séquences récapitulatives quasi-convexes, la convergence moyenne est établie à chaque point commun de Lebesgue. Sont proposées des estimations des évasions moyennes de la fonction qui en résulte. Sont obtenues des annexes à la méthode exponentielle de sommation. Sont proposés les orientations de la diffusion des résultats dans le cas des séries multiples de Fourier.

Автор: ***Нахман Александр Давидович*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Техническая механика и детали машин», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.

Рецензент: ***Куликов Геннадий Михайлович*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий научно-исследовательской лабораторией «Механика интеллектуальных материалов и конструкций», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.