

**ГЕОМЕТРИЯ НЕПОДВИЖНОЙ КАПЛИ ЖИДКОСТИ,
ЛЕЖАЩЕЙ НА НАКЛОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

А. Н. Пахомов, Н. Ц. Гатапова, Ю. В. Пахомова

*Кафедра «Технологические процессы, аппараты и техносферная безопасность»,
ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия; panpost@yandex.ru*

Ключевые слова: дисперсные системы; капля; краевой угол; наклон; поверхностное натяжение; подложка; смачиваемость; сушка; форма; шероховатость.

Аннотация: Для моделирования кинетики сушки жидких дисперсных продуктов на подложках важное значение имеют форма и геометрические размеры капли высушиваемого материала. Рассмотрена задача определения геометрии капли жидкости, лежащей на наклонной плоскости при различных условиях смачиваемости. Приведены результаты расчета геометрии капли воды и жидкой послеспиртовой барды, нанесенных на фторопластовую подложку.

Обозначения

P – давление, Па;	x, y – координата.
R – радиус, м;	
g – ускорение свободного падения, м/с ² ;	Индексы
b – ширина, м;	к – капиллярное;
d – диаметр, м;	с – статическое;
C, B – коэффициент;	о – общее;
α – угол наклона, град.;	г – геометрическое;
ρ – плотность, кг/м ³ ;	от – отекание;
θ – угол смачивания, град.;	нат – натекание;
σ – коэффициент поверхностного натяжения, Н/м;	н – наклон;
δ – толщина, м;	m – максимальное.

Сушка капель жидких дисперсных продуктов широко распространена в промышленности (сушка продуктов химического синтеза, пищевых полупродуктов и отходов, растительного сырья и т.п.). Как правило, процесс проводят в пневматических и распылительных сушилках, в сушилках с кипящим слоем инертных тел [1 – 4].

Математическое описание процесса осложняется тем, что в аппарате испаряется одновременно множество капель разного размера. Капли определенным образом взаимодействуют между собой: дробятся, сливаются, фиксируются на поверхностях аппарата и т.п. При этом в сушильном аппарате наблюдается нестационарное распределение температур и концентраций пара [2, 5]. Поэтому для разработки адекватного математического аппарата, позволяющего описывать раз-

личные случаи поведения высыхающих капель, необходимы исследования в модельных условиях сушки капель продуктов, характеризующихся различием теплофизических свойств, на подложках с разным углом наклона, шероховатостью и смачиваемостью [1 – 3, 6].

Исследованию кинетики сушки неподвижных капель на горизонтальных подложках посвящен ряд работ [1 – 7]. В частности, в работе [7] проведен анализ геометрии слоев и капель на горизонтальных подложках. Геометрия капли, неподвижно лежащей на подложке, определяется поверхностным натяжением, углами смачивания и наклона подложки. На форму и размер капли оказывают существенное влияние чистота и шероховатость поверхности подложки, а также чистота самой жидкости (наличие примесей других жидкостей, растворенных веществ, твердой фазы). В условиях работы с промышленными жидкостями однозначных данных по величинам краевого угла смачивания и поверхностного натяжения, как правило, получить не удастся. Например, в работе [8] показано, что в зависимости от свойств жидкости и подложки угол смачивания послеспиртовой барды на фторопласте может находиться в диапазоне $45 \dots 90^\circ$. В работах [7 – 9] представлены расчетные зависимости, позволяющие моделировать процесс испарения капли заданного объема с горизонтальной подложки.

Поиск путей интенсификации сушки капель на подложках приводит к необходимости решения задачи о форме капли, лежащей на наклонной поверхности [5, 8]. Знание геометрии капли, неподвижно лежащей на поверхности заданного наклона, позволяет не только в дальнейшем перейти к возможности расчета формы движущейся капли (и формы коалесцирующих капель), но и представляет собой отдельный интерес: подобные капли наблюдаются в распылительных сушилках и оказывают заметное воздействие на характер формирования агрегатов частиц у стенок аппарата.

Для вывода системы уравнений, позволяющей рассчитать форму неподвижной капли на наклонной поверхности, запишем постановку задачи для слоя жидкости на полубесконечной горизонтальной пластине для случаев смачивания (угол смачивания $\theta < 90^\circ$) и не смачивания поверхности (угол смачивания $\theta > 90^\circ$) (рис. 1):

$$\Delta P_c = \rho g \delta(x); \quad (1)$$

$$\Delta P_k = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right); \quad (2)$$

$$\Delta P_o = \Delta P_c + \Delta P_k, \quad (3)$$

где ΔP_c – статическое давление в слое, ΔP_k – капиллярное давление по закону Лапласа, ΔP_o – общее давление.

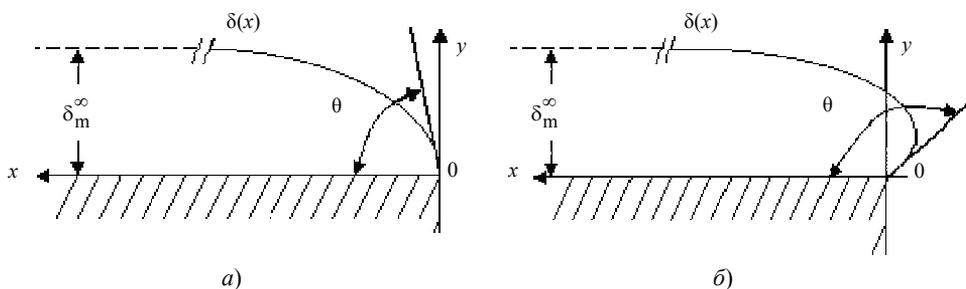


Рис. 1. Форма полубесконечного слоя жидкости, лежащего на горизонтальной пластине:
a – $\theta < 90^\circ$; *б* – $\theta > 90^\circ$

Поскольку при $x \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow \delta_m^\infty$ (см. рис. 1) поверхность стремится к плоской горизонтальной, то при этом $R \rightarrow \infty$, $\Delta P_k \rightarrow 0$. Таким образом, суммарное общее давление в любом сечении $x \geq 0$ равно только статическому в бесконечно удаленном сечении

$$\rho g \delta(x) + \frac{\sigma}{R(x)} = \rho g \delta_m^\infty. \quad (4)$$

Для случая цилиндрического слоя кривизна поверхности в декартовых координатах выражается формулой

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}, \quad (5)$$

где

$$\frac{dy}{dx} = \delta'(x), \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \delta''(x). \quad (6)$$

Подставляя выражение (5) в (4), получаем исходное уравнение для интегрирования

$$\frac{\sigma \delta''(x)}{\left(1 + (\delta'(x))^2\right)^{3/2}} = \rho g (\delta_m^\infty - \delta(x)). \quad (7)$$

Граничные условия:

$$\delta'(0) = \operatorname{tg}(\theta); \quad (8)$$

$$\delta'(\delta_m^\infty) = 0. \quad (9)$$

Систему уравнений (1) – (9) можно решить аналитически или численно. Пример получения аналитического решения для случаев $\theta < 90^\circ$ и $\theta > 90^\circ$ представлен в работе [2].

Рассмотрим постановку задачи для случая капли жидкости, лежащей на горизонтальной подложке шириной $2b$ (рис. 2). Профиль цилиндрического слоя здесь симметричен относительно полуширины. Он будет совпадать также с профилем капли, лежащей на диске радиусом $R = b$.

В этом случае, искривленный слой жидкости стремится изогнуть подложку аналогично надутому пузырю. Общее давление на подложке неизвестно. Ясно только, что оно постоянно в слое, так как иначе в нем должно было бы быть самопроизвольное течение жидкости. Запишем давление в слое в виде $\rho g C_1$.

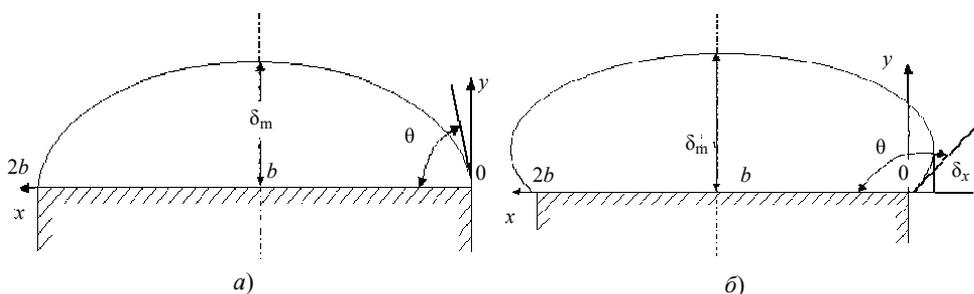


Рис. 2. Форма капли жидкости на горизонтальной подложке:

$a - \theta < 90^\circ$; $b - \theta > 90^\circ$

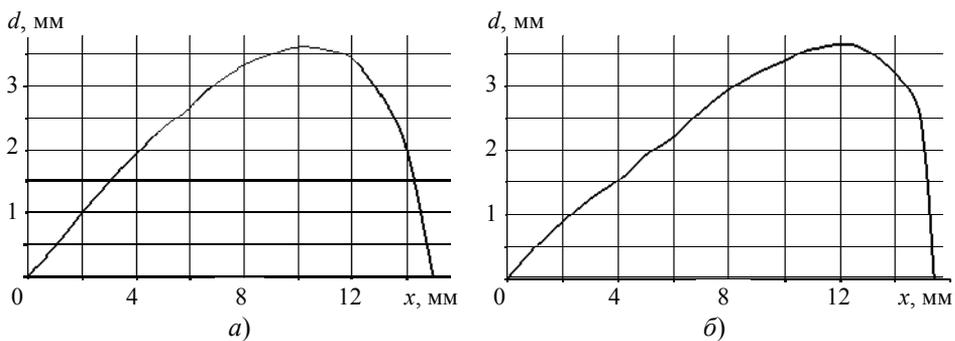


Рис. 4. Расчетная форма неподвижной капли:

a – вода, $\theta = 90^\circ$, $d = 15$ мм, $\sigma = 0,07$ Н/м, $\rho = 998$ кг/м³;

b – жидкая послеспиртовая барда, $\theta = 60^\circ$, $d = 15$ мм, $\sigma = 0,055$ Н/м, $\rho = 1012$ кг/м³

С учетом того, что $x_1 = x - \delta(x) \operatorname{tg} \alpha_n$, получаем

$$\rho g [x - \delta(x) \operatorname{tg} \alpha_n] \sin \alpha_n + \rho g \frac{\delta(x)}{\cos \alpha_n} + \frac{\sigma}{R(x)} = \rho g C_1. \quad (18)$$

Необходимо отметить, что даже при упрощениях граничных условий аналитическое решение уравнения (18) невозможно. Уравнение (18) с учетом граничных условий решается численно со следующими допущениями.

Угол натекания $\theta_{\text{нат}}$ приближенно можно считать равным статическому углу смачивания на горизонтальной поверхности, так как на краю пластины конечных размеров, в отличие от бесконечной поверхности, слой с большим углом θ становится неустойчивым вследствие наличия на кромке подложек некоторой шероховатости.

Для пластин, использованных в работах, угол оттекания $\theta_{\text{от}}$ приближенно можно считать примерно равным углу наклона пластины α_n , то есть принять поверхность жидкости в этой области горизонтальной. Действительно, при увеличении наклона пластины или при добавлении жидкости в слой угол $\theta_{\text{от}}$ будет уменьшаться, но стать меньше α_n он не может, так как в этом случае у верхней кромки появилась бы область отрицательной кривизны, что для покоящегося на пластине слоя невозможно.

Для инженерных расчетов в первом приближении можно принять, что высота слоя, отсчитанная от нижней кромки наклонной пластины, примерно равна предельной высоте слоя на горизонтальной пластине $\delta_{\text{накл}} \approx \delta_m^\infty$.

На рисунке 4 представлены результаты расчетов формы неподвижных капель воды и жидкой послеспиртовой барды, лежащих на фторопластовой подложке (подложка условно показана горизонтально, угол наклона $\alpha_n = 10^\circ$).

Дальнейшим развитием математического описания, представленного в настоящей статье, будет поиск зависимостей для формы капли, движущейся по наклонной поверхности, и формы капли, получающейся при коалесценции двух капель в нестационарном режиме.

Список литературы

1. Пахомов, А. Н. Возможности самоорганизации дисперсных систем при сушке на подложке / А. Н. Пахомов, Ю. В. Пахомова, Е. А. Ильин // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 633 – 637.

2. Пахомова, Ю. В. Особенности механизма и кинетики сушки капель дисперсий (на примере сушки послеспиртовой барды) / Ю. В. Пахомова, В. И. Коно-

валов, А. Н. Пахомов // Вест. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 70 – 82.

3. Пахомов, А. Н. Интенсификация процесса сушки жидкой послеспиртовой барды в аппарате с кипящим слоем инертных тел [Электронный ресурс] / А. Н. Пахомов, Н. С. Сорокина, А. В. Баландина // Инженерный вестник Дона. – 2014. – № 4. – Режим доступа : <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2727> (дата обращения: 30.11.2018).

4. Возможности повышения энергоэффективности утилизации жидкой послеспиртовой барды // А. Н. Пахомов [и др.] // Наука в центральной России. – 2012. – № 5S. – С. 15 – 17.

5. Пахомов, А. Н. Алгоритм расчета кинетики испарения капли с диффузионно-непроницаемой подложки / А. Н. Пахомов, Е. А. Ильин // Вопр. соврем. науки и практики. Ун-т им. В. И. Вернадского. – 2013. – № 2 (46). – С. 292 – 296.

6. Анализ свойств жидкой послеспиртовой барды / А. Н. Пахомов [и др.] // Наука в центральной России. – 2013. – № 1. – С. 67 – 70.

7. Коновалов, В. И. Геометрия, циркуляция и тепломассоперенос при испарении капли на подложке / В. И. Коновалов, А. Н. Пахомов, Ю. В. Пахомова // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2011. – Т. 17, № 2. – С. 371 – 387.

8. Пахомов, А. Н. Расчет кинетики сушки капли жидкости на подложке / А. Н. Пахомов, Б. Ш. Д. Аль Саиди, Е. А. Ильин // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2013. – Т. 19, № 2. – С. 339 – 345.

9. Пахомов, А. Н. Типы кинетических кривых, получаемых при сушке капель жидких дисперсных продуктов / А. Н. Пахомов, Ю. В. Пахомова // Химическая технология. – 2014. – Т. 15, № 10. – С. 620 – 623.

Geometry of a Fixed Drop of Liquid Lying on an Inclined Surface

A. N. Pakhomov, N. Ts. Gatapova, Yu. V. Pakhomova

*Department of Technological Processes, Devices and Technosphere Safety,
TSTU; panpost@yandex.ru*

Keywords: drop; shape; substrate; slope; roughness; contact angle; surface tension; wettability; drying; disperse systems.

Abstract: To simulate the kinetics of drying liquid disperse products on substrates, the shape and geometrical dimensions of a drop of the material being dried are important. The paper considers the problem of determining the geometry of a drop of liquid lying on an inclined plane under various conditions of wettability. The results of the calculation of the geometry of a drop of water and a liquid industrial-distillery stillage deposited on a fluoroplastic substrate are given.

References

1. Pakhomov A.N., Pakhomova Yu.V., Il'in Ye.A. [Possibilities of self-organization of dispersed systems when drying on a substrate], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2012, vol. 18, no. 3, pp. 633-637 (In Russ., abstract in Eng.)

2. Pakhomova Yu.V., Konovalov V.I., Pakhomov A.N. [Peculiarities of the mechanism and kinetics of drying dispersion drops (by the example of drying of distillery stillage)], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 70-82 (In Russ., abstract in Eng.)

3. <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2727> (accessed 30 November 2018).

4. Pakhomov A.N., Il'in Ye.A., Balandina A.V., Kozlova L.A., Khatuntseva Ye.A. [Opportunities for improving the energy efficiency of disposing of liquid underspiral

bards], *Nauka v tsentral'noy Rossii* [Science in Central Russia], 2012, no. 5S, pp. 15-17 (In Russ., abstract in Eng.)

5. Pakhomov A.N., Il'in Ye.A. [Algorithm for calculating the kinetics of evaporation of a droplet from a diffusion-impermeable substrate], *Voprosy sovremennoy nauki i praktiki. Universitet im. V. I. Vernadskogo* [Problems of Contemporary Science and Practice. Vernadsky University], 2013, no. 2 (46), pp. 292-296 (In Russ., abstract in Eng.)

6. Pakhomov A.N., Banin R.Yu., Yeliseyeva I.G., Chernykh Ye.A. [Analysis of the properties of liquid distillery stillage], *Nauka v tsentral'noy Rossii* [Science in Central Russia], 2013, no. 1, pp. 67-70 (In Russ., abstract in Eng.)

7. Kononov V.I., Pakhomov A.N., Pakhomova Yu.V. [Geometry, circulation and heat and mass transfer during evaporation of a drop on a substrate], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 371-387 (In Russ., abstract in Eng.)

8. Pakhomov A.N., Al' Saidi B.Sh.D., Il'in Ye.A. [Calculation of the kinetics of drying a drop of liquid on a substrate], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2013, vol. 19, no. 2, pp. 339-345 (In Russ., abstract in Eng.)

9. Pakhomov A.N., Pakhomova Yu.V. [Types of kinetic curves obtained by drying droplets of liquid dispersed products], *Khimicheskaya tekhnologiya* [Chemical Technology], 2014, vol. 15, no. 10, pp. 620-623. (In Russ.)

Geometrie des festen Flüssigkeitstropfens der auf einer geneigten Oberfläche liegt

Zusammenfassung: Für die Modellierung der Trocknungskinetik von flüssigen dispergierten Produkten auf Substraten sind die Form und die geometrischen Größen des Tropfens des zu trocknenden Materials wichtig. In der Arbeit wird die Aufgabe der Bestimmung der Geometrie eines Flüssigkeitstropfens betrachtet, der auf der geneigten Ebene unter verschiedenen Benetzungsbedingungen liegt. Es sind die Ergebnisse der Berechnung der Geometrie des Wassertropfens und der flüssigen Schlempe angegeben, die auf das Fluorkunststoffsubstrat aufgetragen sind.

Géométrie d'une goutte de liquide fixe située sur une surface inclinée

Résumé: Pour modéliser la cinétique du séchage des produits dispersés liquides sur les substrats, la forme et la taille géométrique des gouttes du matériau séché sont importantes. Dans l'article est examinée la tâche de la détermination de la géométrie d'une goutte de liquide située sur un plan incliné dans de diverses conditions de la mouillabilité. Les résultats du calcul de la géométrie des gouttes d'eau et de la drêche liquide après alcool appliquées sur le substrat fluoroplastique sont mentionnés.

Авторы: *Пахомов Андрей Николаевич* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Технологические процессы, аппараты и техносферная безопасность»; *Гатапова Наталья Цибиковна* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Технологические процессы, аппараты и техносферная безопасность»; *Пахомова Юлия Владимировна* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Технологические процессы, аппараты и техносферная безопасность», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.

Рецензент: *Туголуков Евгений Николаевич* – доктор технических наук, профессор кафедры «Техника и технологии производства нанопродуктов», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.