УДК 517.518
DOI: 10.17277/vestnik.2017.03.pp.488-501

ДВУХСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ МАЖОРАНТ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СРЕДНИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

А. Д. Нахман

Кафедра «Техническая механика и детали машин», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия; alextmb@mail.ru

Ключевые слова: весовые оценки; двухсторонние оценки; мажоранта; максимальная функция; экспоненциальные средние.

Аннотация: В терминах ядер Фейера и элементов суммирующей последовательности построена мажоранта семейства полунепрерывных средних ряда Фурье. Получены оценки ее весовых L^p-норм. Доказана теорема типа Фробениуса; в частности, ее условия выполнены для кусочно-выпуклых последовательностей. В случае мажоранты обобщенных средних Пуассона–Абеля установлена ее эквивалентность максимальной функции Харди–Литтлвуда.

1. Введение. Максимальная функция Харди–Литтлвуда

Рассмотрим произвольную 2π-периодическую суммируемую на $Q=(-\pi,\pi]$ функцию $f(x)$, ее коэффициенты Фурье

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-ikt)\,dt \tag{1}$$

и ряд Фурье

$$S[f,x]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\exp(ikx). \tag{2}$$

Важным инструментом исследования поведения ряда (2) и его линейных средних является максимальный оператор Харди–Литтлвуда $f \mapsto f^*(x)$, где

$$f^*(x)=\sup_{J_x}\frac{1}{|J_x|}\int_{J_x}|f(x)|\,dx, \tag{3}$$

а супремум берется по всем интервалам J_x с лебеговской мерой $|J_x|>0$, содержащим произвольно выбранную точку x. Как известно [1, с. 58 – 61], оператор, определяемый соотношением (3) и действующий в лебеговых пространствах $L^p(Q)$, $p>1$, является ограниченным. Более общая проблема нахождения характеристик весовых лебеговых пространств, обеспечивающих ограниченность (3), окончательно решена Б. Макенхоуптом в 1972 г. [2] в следующем виде.

Пусть $L_v^p = L_v^p(Q)$ – класс измеримых на Q 2π-периодических функций f, таких что

$$\| f \|_{v,p} = \left(\int_Q | f(x) |^p \, v(x) dx \right)^{1/p} < \infty \,, \; p \geq 1 \,.$$

Здесь весовая функция $v = v(x) \geq 0$ также измерима на Q и 2π-периодична; в случае $v \equiv 1$ имеем пространства $L^p = L^p(Q)$; $L = L(Q) = L^1(Q)$. Положим

$$A_p(v;\Omega) = \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(t) dt \right) \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v^{-1/(p-1)}(t) dt \right)^{p-1} , \quad p \geq 1 \,,$$

где Ω – произвольный интервал, $|\Omega| > 0$, а множитель $\left(\int_\Omega v^{-1/(p-1)}(t) dt \right)^{p-1}$ считается равным $\operatorname*{esssup}_{t \in \Omega} \frac{1}{v(t)}$ при $p = 1$ по определению.

Говорят, что выполнено A_p-условие Розенблюма–Макенхоупта [2, 3] и применяют обозначение $v \in A_p$, если $\sup_\Omega A_p(v;\Omega) < \infty$, $p \geq 1$. В настоящей работе, как и в [2], полагаем, что $0 \cdot \infty = 0$. Тогда можно считать, что каждая $f \in L_v^p(Q)$ является также функцией из класса $L(Q)$ (см., напр., [4]). Исключив из рассмотрения тривиальный случай $v(x) \sim \infty$, получаем на основании A_p-условия, что $\int_Q v(x) dx < \infty$, а тогда для всякого измеримого по Лебегу множества E можно ввести меру

$$\mu(E) = \int_E v(x) dx.$$

Согласно результатам [2], оценка «сильного типа»

$$\| f^* \|_{v,p} \leq C_{v,p} \, \| f \|_{v,p} \tag{4}$$

равносильна условию $v \in A_p$, если $p > 1$. Кроме того, оценка «слабого типа»

$$\mu\{x \in Q \,|\, f^*(x) > \varsigma > 0\} \leq C_{v,p} \left(\frac{\| f \|_{v,p}}{\varsigma} \right)^p \tag{5}$$

равносильна условию $v \in A_p$, $p \geq 1$. Здесь и в дальнейшем C – постоянные (вообще говоря, различные), которые могут зависеть лишь от указанных индексов.

В связи с изложенными выше результатами, в настоящей работе решаются следующие задачи:

1) строится мажоранта семейства линейных полунепрерывных средних рядов Фурье;

2) устанавливается ее оценка (сверху) посредством максимальной функции Харди;

3) доказываются оценки ее весовых L^p-норм, и, как их следствие – теоремы о суммируемости;

4) обобщается на случай общих полунепрерывных средних классическая теорема Фробениуса;

5) в случае мажоранты обобщенных средних Пуассона–Абеля установлена ее эквивалентность максимальной функции Харди–Литтлвуда.

2. Мажоранта средних

В различных вопросах анализа возникает задача об исследовании поведения при $h \to +0$ семейств линейных средних ряда (2)

$$U_h(f) = U(f, x; \lambda, h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{|k|}(h) c_k(f) \exp(ikx), \qquad (6)$$

где

$$\Lambda = \{\lambda_k(h),\ k = 0, 1,\ \ldots;\ \lambda_0(h) = 1\} \qquad (7)$$

– бесконечная, вообще говоря, произвольная последовательность («суммирующая последовательность»), определяемая значениями параметра $h > 0$. В случае, когда h – дискретный параметр, близкие задачи (а именно, суммируемость рядов Фурье в точках Лебега и равномерно на промежутке непрерывности функции f) изучали многие авторы (см. статью [5] и библиографию в ней). Важнейшими примерами семейств (6) являются классические средние Фейера (последовательность средних арифметических частных сумм ряда [1, с. 148 – 152], соответствующих случаю:

$$\lambda_k(h) = \lambda_k\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{k}{n+1},\ k = 0, \ldots, n;\ \lambda_k\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 \text{ при } k \ge n+1;\ n = 0, 1, \ldots,$$

а также средние Пуассона–Абеля, порождаемые суммирующей последовательностью $\lambda_k(h) = \exp(-hk)$, $k = 0, 1, \ldots$ [1, с. 160 – 165]. Положим

$$\sum(h, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\left|\Delta^2 \lambda_k(h)\right|$$

и

$$U_*(f) = U_*(f, x; \lambda) = \sup_{h>0} \frac{|U(f, x; \lambda, h)|}{\sum(h, \lambda)}.$$

Введем в рассмотрение ядра Дирихле и Фейера, соответственно [1, с. 86, 148 – 149]:

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \cos \nu t = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2} t};\quad F_k(t) = \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} D_k(t) = \frac{\sin^2 \frac{k+1}{2} t}{2(k+1) \sin^2 \frac{1}{2} t}. \qquad (8)$$

Обозначим

$$\bar{U}_h(f) = \bar{U}(f, x; \lambda, h) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\left|\Delta^2 \lambda_k(h)\right| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)|\ F_k(t)\, dt, \qquad (9)$$

где $\Delta\lambda_k = \lambda_k(h) - \lambda_{k+1}(h)$, $\Delta^2 \lambda_k = \Delta\lambda_k - \Delta\lambda_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$ – первые и вторые (соответственно) конечные разности элементов последовательности (7); пусть

$$\bar{U}_*(f) = \bar{U}_*(f, x; \lambda) = \sup_{h>0} \frac{\bar{U}(f, x; \lambda, h)}{\sum(h, \lambda)}.$$

Лемма 2.1. Если выполнены условия:

$$\lambda_k(h) = o\left(\frac{1}{\ln k}\right) \qquad (10)$$

и

$$\Delta\lambda_k(h) = o\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \to \infty, \qquad (11)$$

то в каждой точке x имеет место оценка

$$|U(f, x; \lambda, h)| \leq C\bar{U}(f, x; \lambda, h). \tag{12}$$

Доказательство. Воспользовавшись интегральной формой (1) коэффициентов Фурье и преобразованием Абеля [1, т. 1, с. 15], запишем

$$U_h(f) = U(f, x; \lambda, h) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{\lambda_0(h)}{2} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(h) \cos k(x-t) \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{N\to+\infty} \left\{ \lambda_N(h) \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\ D_N(t)\, dt + N\Delta\lambda_{N-1}(h) \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\ F_{N-1}(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{N-2} (k+1)\Delta^2\lambda_k(h) \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_k(t)\, dt \right\}. \tag{13}$$

Далее (см. (8)) воспользуемся хорошо известными оценками (см., напр, [2, 6]) интегралов, содержащихся в правой части (13):

$$\int_{-\pi}^{\pi} | f(x+t)| \cdot | D_k(t)| dt \,|\leq Cf^*(x) \ln k, \quad k = 2, 3, ...; \tag{14}$$

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} | f(x+t)| F_k(t)\, dt \right| \leq Cf^*(x), \quad k = 0, 1, ... \tag{15}$$

Согласно (14), (15) и с учетом (10), (11), получаем из (13)

$$\left| U(f, x; \lambda, h) \right| \leq \frac{1}{\pi} \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-2} (k+1) |\Delta^2\lambda_k(h)| \int_{-\pi}^{\pi} | f(x+t)| F_k(t)\, dt = \bar{U}(f, x; \lambda, h), \tag{16}$$

вычисляя пределы в правой части (13), предположили $f^*(x) < \infty$ в каждой рассматриваемой точке x, что не ограничивает общности ввиду соглашения $0 \cdot \infty = 0$.

Утверждение леммы 2.1 теперь вытекает из (16).

Замечание 2.1. Преимущество рассмотрения мажорантного для (6) оператора (9) состоит в том, что средние Фейера ряда Фурье (средние (6) с интегральным ядром Фейера) хорошо изучены, и это обстоятельство облегчает возможность перенесения на (6) некоторых классических результатов.

Лемма 2.2. Если выполнены условия (10) и (11), то в каждой точке x имеет место оценка

$$\bar{U}_*(f, x; \lambda) \leq C_\lambda f^*(x). \tag{17}$$

Доказательство. Можно считать $f^*(x) < \infty,$ иначе оценка (17) тривиальна. Согласно (9) и (15) имеем

$$\bar{U}(f, x; \lambda, h) \leq C f^*(x) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left| \Delta^2\lambda_k(h) \right|, \tag{18}$$

откуда и вытекает утверждение леммы 2.2.

Замечание 2.2. Благодаря оценкам (12) и (17) справедливо также неравенство

$$U_*(f, x; \lambda) \leq C_\lambda f^*(x). \tag{19}$$

3. Весовые оценки (оценки сверху)

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (10), (11) и $v \in A_p$. Тогда имеют место оценки:

$$\| \bar{U}_*(f) \|_{v,p} \le C_{\lambda,p} \| f \|_{v,p}, \quad p > 1; \tag{20}$$

$$\mu\left\{x \in Q \mid \bar{U}_*(f, x; \lambda) > \varsigma > 0\right\} \le C_{\lambda,p} \left(\frac{\| f \|_{v,p}}{\varsigma}\right)^p, \quad p \ge 1. \tag{21}$$

Результат немедленно вытекает из (17) и оценок, соответственно, сильного и слабого типов (4) и (5).

Замечание 3.1. Согласно оценке (19), неравенства (20) и (21) остаются справедливыми с заменой в них $\bar{U}_*(f, x;\lambda)$ на $U_*(f, x;\lambda)$.

Следующие результаты относятся к общему случаю выпуклых (вогнутых) или кусочно-выпуклых суммирующих последовательностей. Последовательность (7) называется выпуклой (вогнутой), если $\Delta^2\lambda_k(h) > 0$ $(\Delta^2\lambda_k(h) < 0)$. Последовательность (7) кусочно-выпукла, если $\Delta^2\lambda_k(h)$ меняет свой знак конечное число раз, $k = 0, 1, \ldots$.

Теорема 3.2. Предположим, что последовательность (7) выпукла (вогнута), выполнено условие (10) и $v \in A_p$. Тогда имеют место оценки

$$\| (\sup_{h>0} \bar{U}_h(f)) \|_{v,p} \le C_{\lambda,p} \| f \|_{v,p}, \quad p > 1; \tag{22}$$

$$\mu\left\{x \in Q \mid \sup_{h>0} \bar{U}(f, x; \lambda, h) > \varsigma > 0\right\} \le C_{\lambda,p} \left(\frac{\| f \|_{v,p}}{\varsigma}\right)^p, \quad p \ge 1. \tag{23}$$

Если выполнено также условие (11), то оценки (22) и (23) справедливы в случае всякой кусочно-выпуклой последовательности (7).

Замечание 3.2. Оценки (22) и (23) остаются, очевидно, справедливыми, если в них $\sup_{h>0} \bar{U}(f, x; \lambda, h)$ заменить на $\sup_{h>0} | U(f, x; \lambda, h) |$.

Рассмотрим, для определенности, случай выпуклой последовательности (7). В этом случае оказывается выполненным [1, т. 1, с. 156] соотношение (11). Используя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\Delta^2\lambda_k(h) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} (k+1)\Delta^2\lambda_k(h) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\lambda_0(h) - \lambda_{N+1}(h) - (N+1)\Delta\lambda_{N+1}(h)\right) = \lambda_0(h) = 1. \tag{24}$$

Значит, в силу (18), имеет место оценка

$$\bar{U}(f, x; \lambda, h) \le C \; f^*(x), \tag{25}$$

откуда и вытекают утверждения (22) и (23).

Если же последовательность (7) кусочно-выпукла, то $\Delta^2\lambda_k(h)$ сохраняет свой знак при $m \le k \le n$ для некоторых натуральных m и n. Выполняя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{k=m}^{n} (k+1)\Delta^2\lambda_k(h) = \lambda_{m+1}(h) - \lambda_{n+1}(h) + (m+1)\lambda_m(h) - (n+1)\Delta\lambda_{n+1}(h). \tag{26}$$

При этом из условий (10) и (11) вытекает равномерная ограниченность слагаемых в правой части (26). Теперь сумма $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|$ равна конечному числу слагаемых, каждое из которых имеет вид (25), так что

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right| \le C_\lambda. \tag{27}$$

Следовательно, оценка (25) с $C = C_\lambda$ остается справедливой и в случае кусочной выпуклости (7). Теорема 3.2 доказана.

4. Теорема типа Фробениуса

Говорят, что ряд Фурье суммируем методом Фейера в точке x к числу s, если

$$\sum_{l=-k}^{k}\left(1-\frac{|l|}{|k|+1}\right)c_l(f)\exp(ilx) \to s, \quad k \to \infty.$$

Указанная суммируемость означает [1, с. 148], что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\ F_k(t)\,dt \to s, \quad k \to \infty. \tag{28}$$

В общем случае сходимости средних (6) к числу s будем говорить, что ряд Фурье (2) суммируем к этому числу методом (7). Классическая теорема Фробениуса [7, с. 28] утверждает, что ряд, суммируемый к числу s методом Фейера, суммируем методом Пуассона–Абеля к тому же числу. В следующем утверждении данный результат распространяется на случай общих средних (6).

Теорема 4.1. Пусть последовательность (7), удовлетворяет условиям (10), (11), (27) и

$$\lim_{h\to 0}\lambda_k(h) = 1, \ \ k = 0, 1, \ldots. \tag{29}$$

Тогда, если ряд Фурье (2) суммируем методом Фейера в точке x к числу s, то он суммируем к s в той же точке λ-методом, то есть методом, определяемым последовательностью (7) .

В основе доказательства лежит соотношение (13):

$$U(f,x;\lambda,h) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2\lambda_k(h)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_k(t)\,dt - s\right) + s\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2\lambda_k(h). \tag{30}$$

Если принять во внимание равенство (24), то из (29) и (30) получаем

$$|U(f,x;\lambda,h)-s| \le \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,|\Delta^2\lambda_k(h)|\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_k(t)\,dt - s\right|. \tag{31}$$

Согласно условию теоремы, имеет место соотношение (28), то есть для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_k(t)\,dt - s\right| < \varepsilon$$

для всех значений k, больших некоторого $k_0 = k_0(\varepsilon, x) > 1$. Значит, в силу (31),

$$|U(f,x;\lambda,h)-s| \le \sum_{k=0}^{k_0}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_k(t)\,dt - s\right| +$$

$$+\varepsilon\sum_{k=0}^{k_0}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|. \qquad (32)$$

Используя (32) и (15), имеем

$$|U(f,x;\lambda,h)-s| \le C(f^*(x)+s)\sum_{k=0}^{k_0}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right| + \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|. \qquad (33)$$

В сумме

$$\sum_{k=0}^{k_0}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right| = \sum_{k=0}^{k_0}(k+1)\,|\lambda_k(h)-2\lambda_{k+1}(h)+\lambda_{k+2}(h)|$$

содержится фиксированное (зависящее от ε и x) количество слагаемых, каждое из которых стремится к нулю при $h \to 0$ в силу (29). Значит, из (33) вытекает, что

$$\varlimsup_{h\to 0} |U(f,x;\lambda,h)-s| \le \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\lambda_k(h)\right|, \qquad (34)$$

при этом в случае $f^* = \infty$ (в выбранной точке x) принимаем во внимание вышеприведенное соглашение о том, что $0\cdot\infty = 0$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и условия (27) имеем, благодаря оценке (34),

$$\lim_{h\to 0} U(f,x;\lambda,h) = s, \qquad (35)$$

что и утверждалось в теореме 4.1.

Теперь воспользуемся тем известным фактом, что ряд Фурье $S[f, x]$ суммируем методом Фейера к функции $f(x)$ во всякой точке Лебега, то есть точке x, обладающей свойством

$$\int_{-\eta}^{\eta} |f(x+t)-f(x)|\,dt = o(\eta),\ \ \eta \to +0.$$

Заметим, что точки Лебега функций $f \in L(Q)$ расположены почти всюду [1, с. 111]. Очевидно, что всякая точка x непрерывности функции $f(x)$ является ее точкой Лебега.

Следствие 4.1. Пусть последовательность (7), удовлетворяет условиям (10), (11), (27) и (29). Тогда соотношение

$$\lim_{h\to 0} U(f,x;\lambda,h) = f(x)$$

имеет место в каждой точке Лебега функции $f \in L(Q)$.

Рассмотрим теперь произвольную точку x, в которой существуют и конечны оба односторонних предела $f(x-0)$ и $f(x+0)$.

Следствие 4.2. Пусть последовательность (7), удовлетворяет условиям (10), (11), (27) и (29). Тогда

$$\lim_{h\to +0} U(f,x;\lambda,h) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Утверждение следствия вытекает из соответствующего результата для средних Фейера [1, с. 149] и теоремы 4.1.

5. Суммируемость μ-почти всюду и в метрике $L_\nu^p(Q)$

Теорема 5.1. Пусть последовательность (7), удовлетворяет условиям (10), (11), (27) и (29). Если $\nu \in A_p$, то соотношение

$$\lim_{h\to 0} U_h(f) = f \tag{36}$$

имеет место μ-почти всюду для каждой $f \in L_\nu^p(Q)$ и в метрике $L_\nu^p(Q)$ при любом $p \ge 1$. Утверждения сохраняются для выпуклых последовательностей, удовлетворяющих лишь условиям (10) и (29) и кусочно-выпуклых последовательностей, удовлетворяющих условиям (10), (11) и (29). Кроме того, при сформулированных условиях на последовательность (7) соотношение (36) имеет место равномерно по *x* для каждой непрерывной *f*.

Утверждения теоремы 5.1 вытекают стандартным образом из результатов теорем 3.1 и 3.2 и равномерной ограниченности соответствующих констант Лебега, определяемых методом суммирования (7) [4].

6. Экспоненциальные методы суммирования

Рассмотрим полунепрерывные методы суммирования, соответствующие случаю:

$$\lambda_0(h) = 1, \quad \lambda_k(h) = \lambda(x,h)|_{x=k}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{37}$$

где $\lambda(x, h) = \exp(-h\varphi(x))$, а функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, дважды непрерывно дифференцируема на $(0, +\infty)$ и возрастает к $+\infty$. Потребуются равенства:

$$\lambda'_x(x,h) = -h\varphi'(x)\exp(-h\varphi(x));$$

$$\lambda''_x(x,h) = h\,(h(\varphi'(x))^2 - \varphi''(x))\exp(-h\varphi(x)). \tag{38}$$

В случае (37) в силу теоремы Лагранжа и (38) имеем:

$$\Delta\lambda_k(h) = h\varphi'(k+\theta_1)\exp\left(-h\varphi(k+\theta_1)\right);$$

$$\Delta\lambda_{k+1}(h) = h\varphi'(k+1+\theta_2)\exp\left(-h\varphi(k+\theta_2)\right); \tag{39}$$

$$\Delta^2\lambda_k(h) = (1+\theta_2-\theta_1)h\left(h(\varphi'(k+\theta))^2 - \varphi''(k+\theta)\right)\exp\left(-h\varphi(k+\theta)\right), \tag{40}$$

здесь $\theta = \theta_3(1+\theta_2-\theta_1)$, $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$, так что $0 < \theta < 2$.

Положим

$$\psi(x) = h(\varphi'(x))^2 - \varphi''(x), \quad x > 0. \tag{41}$$

Теорема 6.1. Если $\nu \in A_p$, функция $\varphi(x)$, определенная в (37), удовлетворяет условию

$$\exp\left(-h\varphi(x)\right)\ln x = o(1), \quad x \to +\infty, \quad h > 0, \tag{42}$$

и $\varphi''(x) \le 0$ на $(0, +\infty)$, то имеют место утверждения (22), (23), (36) теорем 3.2 и 5.1 при соответствующем значении *p*.

Действительно, при условии (42) выполнено (10) и, согласно (40), последовательность (7) является выпуклой. Условие (29), очевидно, выполнено в силу определения (37).

Теорема 6.2. Пусть $v \in A_p$, функция $\varphi(x)$, определенная в (37), удовлетворяет условиям (42) и

$$hx\varphi'(x)\exp(-h\varphi(x)) = o(1), \quad x \to +\infty,\ h > 0, \tag{43}$$

а функция $\psi(x)$ в (41) меняет на $(0,+\infty)$ знак конечное число раз. Тогда имеют место утверждения (22), (23), (36) теорем 3.2 и 5.1 при соответствующем значении p.

Действительно, условие (42) обеспечивает выполнимость (10), тогда как (43) обеспечивает справедливость соотношения (11) (см. также (39)). Далее, согласно (40), последовательность (7) будет кусочно-выпуклой. Остается применить результаты п. 5.

7. Мажоранта обобщенных средних Пуассона–Абеля: весовые оценки

Выберем в (37)

$$\varphi(x) = x^{\alpha}, \quad \alpha > 0, \tag{44}$$

так что

$$\lambda_k(h) = \exp(-hk^{\alpha}), \quad k = 0, 1, \dots . \tag{45}$$

Обозначим в этом случае семейство (6) через $U_{h,\alpha}(f) = U_{\alpha}(f, x; h)$ и рассмотрим мажоранту (9) соответствующих средних

$$\bar{U}_{\alpha}(f, x; h) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\left|\Delta^2 \exp(-hk^{\alpha})\right| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)|\, F_k(t)\, dt;$$

пусть

$$\bar{U}(f) = \bar{U}_{*,\alpha}(f, x) = \sup_{h>0} \bar{U}_{\alpha}(f, x; h). \tag{46}$$

Легко проверить, что функция (44) удовлетворяет условиям (42) и (43); кроме того $\varphi''(x) \le 0$ на $(0,+\infty)$ при $0 < \alpha \le 1$, и функция (41) меняет знак один раз при $\alpha > 1$, так что последовательность (45) в первом случае выпукла, а во втором – кусочно-выпукла. Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 7.1. 1. Если ряд Фурье (2) суммируем методом Фейера в точке x к числу s, то он суммируем к s в той же точке методом (45) при всех $\alpha > 0$. В частности, он суммируем к значениям $f(x)$ в каждой точке Лебега x и к числу $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ в каждой же точке x, где существуют оба односторонних предела $f(x-0)$ и $f(x+0)$.

2. Пусть $v \in A_p$. Тогда

1) для максимального оператора (46) при соответствующих значениях p и всех $\alpha > 0$ имеют место оценки (22) и (23);

2) соотношение

$$\lim_{h \to 0} U_{h,\alpha}(f) = f \tag{47}$$

имеет место μ-почти всюду для каждой $f \in L_v^p(Q)$ и в метрике $L_v^p(Q)$ при любом $p \ge 1$.

Кроме того, соотношение (47) справедливо равномерно по x для всякой непрерывной 2π-периодической функции.

8. Мажоранта обобщенных средних Пуассона–Абеля: двухсторонние оценки

Теорема 8.1. При каждом $\alpha > 0$ существуют положительные постоянные $C_{1,\alpha}$ и $C_{2,\alpha}$, такие что

$$C_{1,\alpha}\, f^*(x) \le \overline{U}_{*,\alpha}(f,x) \le C_{2,\alpha}\, f^*(x). \tag{48}$$

Доказательство. В силу леммы 2.2 достаточно установить только оценку снизу. Начнем со случая $\alpha > 1$. Вторые разности последовательности (7), согласно (40) и (44) имеют вид

$$\Delta_k^2(h,\alpha) = (1+\theta_2-\theta_1)\ \alpha h\ \left(\alpha h(k+\theta)^\alpha - (\alpha-1)\right)(k+\theta)^{\alpha-2}\ \exp\left(-h(k+\theta)^\alpha\right),$$

где $\theta = \theta_3(1+\theta_2-\theta_1)$, $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$; ясно, что они сохраняют знак «+» при всех целых значениях k, больших $\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha h}\right)^{1/\alpha}$. Выберем m, таким что

$$m \ge \left(\frac{\alpha-1}{\alpha h}\right)^{1/\alpha}. \tag{49}$$

Запишем (9) в виде

$$\overline{U}(f,x;\lambda,h) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,|\Delta^2\lambda_k(h)|\ \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\ F_k(x-t)\,dt \tag{50}$$

и рассмотрим произвольный интервал $J = J_x$, содержащий произвольно выбранную точку x; будем поначалу считать $0 < |J| \le \dfrac{\pi}{18}$. Обозначим $\rho = \left[\dfrac{3}{2}m\right]+1$. Теперь

$$\bar{U}(f,x;\lambda,h) \ge \int_J |f(t)|\ \sum_{k=\rho}^{2m-1}\Delta^2\lambda_k(h)\ \frac{\sin^2\frac{k+1}{2}(x-t)}{2\sin^2\frac{1}{2}(x-t)}\,dt; \tag{51}$$

сумма в (51) будет не пустой при $m \ge 4$. Если положить

$$m = \left[\frac{\pi}{2|J|}\right], \tag{52}$$

(а тогда $m \ge 8$) то в (51) $\dfrac{k+1}{2}|x-t| \le m|J| \le \dfrac{\pi}{2}$, а значит, справедлива оценка

$$\bar{U}(f,x;\lambda,h) \ge C\sum_{k=\rho}^{2m-1}(k+1)^2\Delta^2\lambda_k(h)\ \int_J|f(t)|\,dt \ge$$
$$\ge Cm^2\left(\Delta\lambda_\mu(h) - \Delta\lambda_{2m}(h)\right)\int_J|f(t)|\,dt. \tag{53}$$

Таким образом, (53) установлено, если (см. (49) и (52))

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/\alpha}\frac{1}{h^{1/\alpha}} \le m \le \frac{\pi}{2|J|}. \tag{54}$$

Существование соответствующего целого положительного m обеспечено при выборе $h > 0$ таким, чтобы длина интервала (54) была равна единице:

$$h = \omega_\alpha\,|J|^\alpha. \tag{55}$$

Здесь выражение

$$\omega_\alpha = \frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\frac{2}{\pi-2|J|}\right)^\alpha$$

при $0<|J|\le\frac{\pi}{18}$ заключено между двумя положительными (зависящими от $\alpha>1$) постоянными. Теперь из (53) – (55) получаем

$$\overline{U}(f,x;\lambda,h) \ge C_\alpha\left(\frac{1}{|J|}\right)^2\left(\Delta\lambda_\rho(h)-\Delta\lambda_{2m}(h)\right)\int_J |f(t)|\,dt. \qquad (56)$$

Осталось оценить снизу разность $\Delta\lambda_\rho(h)-\Delta\lambda_{2m}(h)$. Согласно (39) и (45) $\Delta\lambda_k(h)$ есть значение производной $\alpha h x^{\alpha-1}\exp(-hx^\alpha)$ функции $\exp(-hx^\alpha)$ в некоторой точке $k+\theta$, где $\theta\in(0,1)$. Значит с некоторыми $\theta_1\in(0,1)$, $\theta_2\in(0,1)$

$$\Delta\lambda_\rho(h)-\Delta\lambda_{2m}(h) =$$
$$= \alpha h\left((\rho+\theta_1)^{\alpha-1}\exp(-h(\rho+\theta_1)^\alpha\right) - (2m+\theta_2)^{\alpha-1}\exp\left(-h(2m+\theta_2)^\alpha\right). \qquad (57)$$

Применим теорему Лагранжа к (57):

$$\Delta\lambda_\rho(h)-\Delta\lambda_{2m}(h) =$$
$$=\alpha h\,(2m-\rho+\theta_2-\theta_1)\left(\alpha h\,(\tau_m)^\alpha-(\alpha-1)\right)(\tau_m)^{\alpha-2}\exp\left(-h\,(\tau_m)^\alpha\right); \qquad (58)$$

здесь вторая производная $\left(x^{\alpha-1}\exp(-hx^\alpha)\right)' = -\left(\alpha hx^\alpha-(\alpha-1)\right)x^{\alpha-2}\exp\left(-h\,x^\alpha\right)$ берется в точке

$$\tau_m = \rho+\theta_1+\theta_3\,(2\theta_2-\theta_1)m-\rho+\theta_2-\theta_1\,)=\rho(1-\theta_3)\,+2\theta_3 m+\theta_*,$$

где $\theta_*=\theta_1(1-\theta_3)+\theta_3\theta_2\in(0,2)$.

Заметим, что

$$\tau_m \ge \frac{3}{2}m(1-\theta_3)+2\theta_3 m+\theta_* = \frac{3}{2}m+\frac{1}{2}\theta_3 m+\theta_* \ge \frac{3}{2}m. \qquad (59)$$

С учетом неравенств (59) и $m\ge 8$ будем иметь

$$\frac{3}{2}m \le \tau_m \le 4m, \qquad (60)$$

а также

$$2m-\rho+\theta_2-\theta_1 \ge 2m-\left(\frac{3}{2}m+1\right)-1=\frac{m}{2}-2\ge\frac{m}{4}.$$

Осталось заметить, что в силу (54) и (59)

$$\left(\alpha h(\tau_m)^\alpha-(\alpha-1)\right)\ge\left(\alpha h(\frac{3}{2}m)^\alpha-(\alpha-1)\right)\ge$$
$$\ge\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha\alpha\frac{\alpha-1}{\alpha}-(\alpha-1)=(\alpha-1)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha-1\right)=C_\alpha>0,$$

а поэтому , согласно (58), (54) и (55)

$$\Delta\lambda_\mu(h)-\Delta\lambda_{2m}(h)\ge C_\alpha\;h\;m^{\alpha-1}\ge C_\alpha\,|J|^\alpha\left(\frac{1}{|J|}\right)^{\alpha-1}\ge C_\alpha|J|.$$

Теперь, в силу (54) и (55) имеем в (56)

$$\bar{U}(f, x; \lambda, h) \geq C_\alpha \left(\frac{1}{|J|}\right)^2 |J| \int_J |f(t)|\,dt = C_\alpha \frac{1}{|J|} \int_J |f(t)|\,dt.$$

Итак, при всех $\alpha > 1$, произвольном $J = J_x$, $0 < |J| \leq \frac{\pi}{18}$ получена оценка снизу

$$\bar{U}(f, x; \lambda, h) \geq C_\alpha \frac{1}{|J|} \int_J |f(t)|\,dt. \tag{61}$$

Оценка (61) сохранится и при $|J| > \frac{\pi}{18}$, если (50) использовать в виде

$$\bar{U}(f, x; \lambda, h) \geq \left|\Delta^2 \lambda_0(h)\right| \int_J |f(t)|\, F_0(x-t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}|1 - 2\exp(-h) + \exp(-2h)| \int_J |f(t)|\,dt \geq C_\alpha \frac{1}{|J|} \int_J |f(t)|\,dt$$

при выборе, например, $h = 1$.

Распространим (61) на случай $0 < \alpha \leq 1$. Как установлено выше (п. 6), в этом случае вторые разности $\Delta^2 \lambda_k(h)$ неотрицательны. Из (53) вытекает неравенство

$$\bar{U}(f, x; \lambda, h) \geq Cm^2 \left(\Delta\lambda_\rho(h) - \Delta\lambda_{2m}(h)\right) \int_J |f(t)|\,dt, \tag{62}$$

которое остается верным при выборе $m = \left[\frac{\pi}{2|J|}\right]$, $J = J_x$, $0 < |J| \leq \frac{\pi}{18}$. Далее, из (58) следует, что

$$\Delta\lambda_\rho(h) - \Delta\lambda_{2m}(h) \geq \alpha h\ (2m - \rho + \theta_2 - \theta_1)\ \left(\alpha h (\tau_m)^\alpha\right)(\tau_m)^{\alpha-2}\ \exp(-h(\tau_m)^\alpha).$$

С учетом (60) имеем

$$\Delta\lambda_\rho(h) - \Delta\lambda_{2m}(h) \geq C_\alpha h\ m\left(hm^\alpha\right)m^{\alpha-2}\ \exp\left(-h(\tau_m)^\alpha\right) =$$

$$= C_\alpha h^2\ m^{2\alpha-1}\ \exp\left(-h(\tau_m)^\alpha\right).$$

Теперь возьмем $h = 1/m^\alpha$. Снова используя (60), получим

$$\Delta\lambda_\rho(h) - \Delta\lambda_{2m}(h) \geq C_\alpha \frac{1}{m}$$

и, согласно (62), приходим к оценке (61).

В случае $|J| > \frac{\pi}{18}$ оценка (61) получается точно так же, как и выше.

Из неравенства (61) и определения (46) вытекает, что

$$\bar{U}_{*,\alpha}(f, x) \geq C_\alpha \frac{1}{|J_x|} \int_{J_x} |f(t)|$$

для всех $\alpha > 0$ и всякого интервала J_x, $|J_x| > 0$. Переходя к супремуму по всем J_x, в соответствии с определением (3), получаем

$$\bar{U}_{*,\alpha}(f, x) \geq C_\alpha f^*(x).$$

Оценка снизу в (48) установлена и теорема полностью доказана.

Теорема 8.2. При каждом $\alpha > 0$ и $p > 1$ следующие утверждения эквивалентны:

1) $v \in A_p$;

2) имеет место оценка (3);

3) имеет место оценка

$$\| \bar{U}_{*,\alpha}(f) \|_{v,p} \le C_{\alpha,p} \| f \|_{v,p} .$$

В случае $p \ge 1$ эквивалентны следующие утверждения:

1) $v \in A_p$;

2) имеет место оценка (4);

3) имеет место оценка

$$\mu \left\{ x \in Q \mid \bar{U}_{*,\alpha}(f,x) > \varsigma > 0 \right\} \le C_{\alpha,p} \left(\frac{\| f \|_{v,p}}{\varsigma} \right)^p, \quad p \ge 1.$$

Результат теоремы 8.2 есть немедленное следствие (48) и результатов Б. Макенхоупта [2].

Отметим, что изложенные результаты могут быть перенесены на случай прямоугольных средних кратных рядов Фурье.

Список литературы

1. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. В 2 т. Т. 1 / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – 615 с.

2. Muckenhoupt, B. Weighted Norm Inequalities for the Hardy Maximal Function / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 165. – P. 207 – 226.

3. Rozenblum, M. Summability of Fourier Series in $L^p(d\mu)$ / M. Rozenblum // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 105. – P. 32 – 42.

4. Nakhman, A. D. Regular Semi-Continuous Methods of Summation of Fourier Series / A. D. Nakhman, B. P. Osilenker // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2017. – Т. 23, № 1. – P. 135 – 148. doi: 10.17277/vestnik.2017.01.pp.135-148

5. Ефимов, А. В. О линейных методах суммирования рядов Фурье / А. В. Ефимов // Изв. АН СССР. Сер. Математика. – 1960. – № 24. – С. 743 – 756.

6. Nakhman, A. D. Exponential Methods of Summation of the Fourier Series / A. D. Nakhman, B. P. Osilenker // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2014. – Т. 20, № 1. – P. 101 – 109.

7. Бари, Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1961. – 936 с.

Bilateral Estimates of Majorants of Exponential Means of Fourier Series

A. D. Nakhman

Department of Engineering Mechanics and Machine Parts,
TSTU, Tambov, Russia; alextmb@mail.ru

Keywords: bilateral estimates; exponential means; majorants; maximal function; weighted estimates.

Abstract: In terms of Fejér kernels and elements of the summing sequence, a family of semi-continuous means of the Fourier series is constructed. The estimates of its L^p-weighted norm are obtained. A theorem of Frobenius type is proved; in particular, its conditions are satisfied for piecewise convex sequences. In the case of majorant of the generalized Poisson-Abel means, its equivalence to the Hardy-Littlewood maximal function is established.

References

1. Zygmund A. *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959.
2. Muckenhoupt B. Weighted Norm Inequalities for the Hardy Maximal Function, *Trans. Amer. Math. Soc.*,1972, vol. 165, pp. 207-226.
3. Rozenblum M. Summability of Fourier series in $L^p(d\mu)$, *Trans. Amer. Math. Soc.*,1962, vol. 105, pp. 32-42
4. Nakhman A.D. Regular semi-continuous methods of summation of Fourier series, *Transactions of Tambov State Technical University*, 2017, vol. 23, no. 1, pp.135-148, doi: 10.17277/vestnik.2017.01.pp.135-148
5. Efimov A.V. [On Linear Methods of Summation of Fourier Series], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Otdelenie matematicheskikh i estestvennykh nauk. Seriya Matematicheskaya* [Izvestiya of the USSR Academy of Sciences. Branch of Mathematical and Natural Sciences. Mathematical Series], 1960, no. 24, pp. 743-756. (In Russ.).
6. Nakhman A.D., Osilenker B.P. Exponential methods of summation of the Fourier series, *Transactions of Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 1, pp.101-109. (In Russ., abstract in Eng.)
7. Bari N.K. *Trigonometricheskie rjady* [*Trigonometric series*], Moscow: Fizmatlit, 1961, 936 p. (In Russ.)

Bilaterale Einschätzungen der Majoranten der exponentiellen mittleren Fourier-Reihen

Zusammenfassung: Im Sinne der Fejer-Kerne und der Elemente der summierenden Reihe ist eine Majorante der Familie der halbkontinuierlichen Mittelwerte der Fourier-Reihe aufgebaut. Die Schätzungen ihrer Gewichtsnormen sind erhalten. Ein Theorem von Frobenius-Typ ist bewiesen. Insbesondere sind seine Bedingungen für stückweise konvexe Sequenzen erfüllt. Im Falle einer Majorante von generalisierten Poisson-Abel Mitteln ist seine Äquivalenz der Hardy-Littlewood Maximalfunktion etabliert.

Les évaluations bilatérales des majorants des séries exponentielles moyennes de Fourier

Résumé: En termes des noyaux Fejér et les éléments de la séquence sommée est construit un majorant de la famille des semi-continues moyennes de la série de Fourier. Sont obtenues les évaluation de son poids -norme L^p. Est prouvé le théorème de type de Frobenius; en particulier, ses conditions sont exécutées pour les séquences continues par morceau. Dans le cas de majorant des moyennes de Poisson-Abel est établie son équivalence maximale de la fonction Hardy-Littlewood.

Автор: ***Нахман Александр Давидович*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Техническая механика и детали машин», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.

Рецензент: ***Пучков Николай Петрович*** – доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.