УДК 517.937
DOI: 10.17277/vestnik.2017.02.pp.307-311

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

В. И. Фомин

Кафедра «Техническая механика и детали машин», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия; vasiliyfomin@bk.ru

Ключевые слова: классическая задача Коши; обобщенное уравнение Эйлера; операторное уравнение Риккати; скалярное уравнение Риккати; уравнение Эйлера.

Аннотация: Показано, что исследование малых стабилизирующих возмущений обобщенного векторного уравнения Эйлера второго порядка в банаховом пространстве сводится к изучению операторного уравнения Риккати.

В монографии [1] для задачи

$$(t+\varepsilon)^2 x''_\varepsilon(t) + (t+\varepsilon) A x'_\varepsilon(t) + B x_\varepsilon(t) = f(t)\,,\ 0 \le t < \infty\,,$$

$$x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}\,,\ x'_\varepsilon(0) = x'_{\varepsilon,0}\,,$$

где A, B – линейные операторы, действующие в банаховом пространстве E (рассмотрены отдельно случаи, когда A, B ограничены и A, B неограничены); $f(t) \in C\big([0,\infty); E\big)$; ε – малый положительный параметр, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \mathrm{const}$, найдены условия, при выполнении которых данная задача разрешима и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t), \quad 0 < t < \infty,$$

где $x_0(t)$ – ограниченное в точке вырождения $t = 0$ решение уравнения Эйлера

$$t^2 x''(t) + t A x'(t) + B x(t) = f(t), \quad 0 < t < \infty.$$

В данной работе в банаховом пространстве E рассматривается задача вида

$$(t+\varepsilon)^2 x''_\varepsilon(t) + (t+\varepsilon) A(t) x'_\varepsilon(t) + B(t) x_\varepsilon(t) = f(t), \quad 0 \le t \le T; \tag{1}$$

$$x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}, \quad x'_\varepsilon(0) = x'_{\varepsilon,0}, \tag{2}$$

где $A(t), B(t) \in C\big([0,T]; L(E)\big)$; $f(t) \in C\big([0,T]; E\big)$; $L(E)$ – банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E.

Соответствующее вырождающееся уравнение ($\varepsilon = 0$), которое будем называть обобщенным уравнением Эйлера, имеет вид

$$t^2 x''(t) + t A(t) x'(t) + B(t) x(t) = f(t), \quad 0 < t \le T. \tag{3}$$

Сведем задачу (1), (2) к классической задаче Коши. Пусть

$$t = \varepsilon e^{s} - \varepsilon. \tag{4}$$

Тогда

$$s = \ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}$$

и $0 \le s \le T_\varepsilon$ при $0 \le t \le T$, где $T_\varepsilon = \ln\dfrac{T+\varepsilon}{\varepsilon}$.

Получаем:

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon\left(\varepsilon e^{s} - \varepsilon\right) ::= u_\varepsilon(s);$$

$$x'_\varepsilon(t) = \left[u_\varepsilon(s)\right]'_t = u'_\varepsilon(s) s'_t = \frac{1}{t+\varepsilon}\, u'_\varepsilon(s);$$

$$x''_\varepsilon(t) = \left[\frac{1}{t+\varepsilon}\, u'_\varepsilon(s)\right]'_t = \frac{1}{(t+\varepsilon)^2}\left[u''_\varepsilon(s) - u'_\varepsilon(s)\right];$$

$$A(t) = A\left(\varepsilon e^{s} - \varepsilon\right) ::= A_{1\varepsilon}(s);$$

$$B(t) = B\left(\varepsilon e^{s} - \varepsilon\right) ::= A_{2\varepsilon}(s);$$

$$f(t) = f\left(\varepsilon e^{s} - \varepsilon\right) ::= g_\varepsilon(s);$$

$$u_\varepsilon(0) = x_\varepsilon\left(\varepsilon e^{0} - \varepsilon\right) = x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0};$$

$$u'_\varepsilon(s) = (t+\varepsilon)\, x'_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{s} x'_\varepsilon\left(\varepsilon e^{s} - \varepsilon\right);$$

$$u'_\varepsilon(0) = \varepsilon e^{0}\, x'_\varepsilon\left(\varepsilon e^{0} - \varepsilon\right) = \varepsilon\, x'_\varepsilon(0) = \varepsilon\, x'_{\varepsilon,0}.$$

Таким образом, задача (1), (2) с помощью замены переменной (4) сводится к задаче вида

$$u''_\varepsilon(s) + [\,A_{1\varepsilon}(s) - I\,]\, u'_\varepsilon(s) + A_{2\varepsilon}(s)\, u_\varepsilon(s) = g_\varepsilon(s), \quad 0 \le s \le T_\varepsilon; \tag{5}$$

$$u_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}\,,\ u'_\varepsilon(0) = \varepsilon\, x'_{\varepsilon,0}\,. \tag{6}$$

Заметим, что уравнение (3) с помощью подстановки $t = e^{s}$ сводится к уравнению вида

$$u''(s) + [\,\tilde{A}(s) - I\,]\, u'(s) + \tilde{B}(s)\, u(s) = g(s), \quad -\infty < s \le \ln T,$$

где $u(s) ::= x(e^{s})$, $\tilde{A}(s) ::= A(e^{s})$, $\tilde{B}(s) ::= B(e^{s})$, $g(s) ::= f(e^{s})$.

При каждом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (5), (6) – частный случай классической задачи Коши

$$u''(t) + A_1(t)\, u'(t) + A_2(t)\, u(t) = h(t), \quad 0 \le t \le T_*; \tag{7}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0. \tag{8}$$

Чтобы найти решение задачи (7), (8) нужно предварительно научиться решать соответствующее однородное уравнение

$$u''(t) + A_1(t)\,u'(t) + A_2(t)\,u(t) = 0, \quad 0 \le t \le T_*. \tag{9}$$

Будем искать решения уравнения (9) в виде

$$u(t) = e^{\Lambda(t)} y, \tag{10}$$

где y – некоторый ненулевой фиксированный элемент из E,

$$\Lambda(t) \in C^1\left([0, T_*]; L(E)\right),$$

$$e^{\Lambda(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\Lambda(t)]^k}{k!}.$$

Подставим функцию вида (10) в уравнение (9). Для этого найдем ее производные первого и второго порядка. Применяя формулу

$$\left[e^{\Lambda(t)}\right]' = \Lambda'(t)\,e^{\Lambda(t)},$$

имеем

$$u'(t) = \Lambda'(t)\,e^{\Lambda(t)} y,$$

$$u''(t) = \left[\Lambda''(t) + \left[\Lambda'(t)\right]^2\right] e^{\Lambda(t)} y.$$

Получаем:

$$\left[\Lambda''(t) + \left[\Lambda'(t)\right]^2\right] e^{\Lambda(t)} y + A_1(t)\Lambda'(t)e^{\Lambda(t)} y + A_2(t)e^{\Lambda(t)} y = 0$$

или

$$\left[\Lambda''(t) + \left[\Lambda'(t)\right]^2 + A_1(t)\Lambda'(t) + A_2(t)\right] e^{\Lambda(t)} y = 0.$$

Таким образом, для того чтобы векторная функция вида (10) была решением уравнения (9), достаточно, чтобы операторная функция $\Lambda(t)$ удовлетворяла уравнению

$$\Lambda''(t) + \left[\Lambda'(t)\right]^2 + A_1(t)\Lambda'(t) + A_2(t) = 0, \quad 0 \le t \le T_*. \tag{11}$$

Назовем (11) характеристическим уравнением для уравнения (9). Положим $\Lambda'(t) = K(t)$, тогда $\Lambda''(t) = K'(t)$ и уравнение (11) принимает вид

$$K'(t) + K^2(t) + A_1(t)\,K(t) + A_2(t) = 0\,,\ 0 \le t \le T_*,$$

или

$$K'(t) = -A_2(t) - A_1(t)\,K(t) - K^2(t)\,,\ 0 \le t \le T_*. \tag{12}$$

Уравнение (12) – частный случай операторного уравнения Риккати

$$Y'(t) = P(t) + Q(t)\,Y(t) + R(t)\,Y^2(t) \tag{13}$$

$(P(t) = -A_2(t),\ \ Q(t) = -A_1(t),\ \ R(t) \equiv -I)$, являющегося обобщением скалярного уравнения Риккати [2, с. 70]

$$y'(t) = p(t) + q(t)\,y(t) + r(t)\,y^2(t).$$

Как и в скалярном случае, решение уравнения (13) не удается свести к операции интегрирования. Некоторые результаты об операторном уравнении Риккати изложены в работе [3].

Если

$$A_2(t) \equiv \mathrm{O}, \quad 0 \le t \le T_*, \tag{14}$$

где O – нулевой оператор, то уравнение (12) принимает вид

$$K'(t) + A_1(t)\,K(t) = -K^2(t), \quad 0 \le t \le T_*,$$

то есть является операторным уравнением Бернулли, решение которого можно найти с помощью подстановки $K(t) = U(t)\,V(t)$. Однако при выполнении условия (14) уравнение (7) принимает простой вид

$$u''(t) + A_1(t)\,u'(t) = h(t), \quad 0 \le t \le T_*,$$

и заменой $u'(t) = w(t)$ сводится к уравнению первого порядка

$$w'(t) + A_1(t)\,w(t) = h(t), \quad 0 \le t \le T_*.$$

Для изучения уравнения (12) используем подход из [2, с. 70]. Пусть известно некоторое частное решение $\tilde{K}(t)$ уравнения (12). Положим

$$K(t) = \tilde{K}(t) + H(t).$$

Тогда уравнение (12) принимает вид

$$\tilde{K}'(t) + H'(t) = -A_2(t) - A_1(t)\,\tilde{K}(t) - A_1(t)\,H(t) - \tilde{K}^2(t) - 2\,\tilde{K}(t)H(t) - H^2(t)$$

или

$$H'(t) + [A_1(t) + 2\,\tilde{K}(t)]\,H(t) = -H^2(t), \quad 0 \le t \le T_*.$$

Получили операторное уравнение Бернулли, решение которого находится подстановкой $H(t) = U(t)V(t)$.

Таким образом, задача отыскания решения уравнения (9) сводится к нахождению частного решения операторного уравнения Риккати (12).

Список литературы

1. Фомин, В. И. Векторное уравнение Эйлера второго порядка в банаховом пространстве / В. И. Фомин. – М. : Спектр, 2012. – 136 с.

2. Агафонов, С. А. Дифференциальные уравнения / С. А. Агафонов, А.Д. Герман, Т. В. Муратова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 352 с.

3. Егоров, А. И. Уравнения Риккати / А. И. Егоров. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 320 с.

An Application of the Riccati Operator Equation

V. I. Fomin

Department "Technical Mechanics and Machine Parts", TSTU, Tambov, Russia;
vasiliyfomin@bk.ru

Keywords: classical Cauchy problem; Euler's equation; generalized Euler equation; Riccati operator equation; Scalar Riccati equation.

Abstract: The investigation of small stabilizing perturbations of the generalized second-order Euler vector equation in a Banach space is reduced to the study of the Riccati operator equation.

References

1. Fomin V.I. *Vektornoe uravnenie Eilera vtorogo poryadka v banakhovom prostranstve* [Vector Euler equation of the second order in a Banach space], Moscow: Spektr, 2012, 136 p. (In Russ.)

2. Agafonov S.A., German A.D., Muratova T.V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], Moscow: Izdatel'stvo MGTU imeni N.E. Baumana, 2004, 352 p. (In Russ.)

3. Egorov A.I. *Uravneniya Rikkati* [The Riccati equations], Moscow: FIZMATLIT, 2001, 320 p. (In Russ.)

Über eine Anwendung der Operatorengleichung von Riccati

Zusammenfassung: Es ist gezeigt, dass die Forschung der kleinen stabilisierenden Störungen der verallgemeinerten Vektorgleichung von Euler der zweiten Ordnung im Banachraum auf das Erlernen der Operatorengleichungen von Riccati zurückgeführt wird.

Sur une application de l'équation opérationnelle de Riccati

Résumé: Est montré que la recherche des petites perturbations stabilisantes de l'équation d'Euler de second ordre de la synthèse vectorielle dans l'espace de Banach se réduit à l'étude de l'équation opérationnelle de Riccati.

Автор: ***Фомин Василий Ильич*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Техническая механика и детали машин», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.

Рецензент: ***Федоров Виктор Александрович*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей физики, ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина», г. Тамбов, Россия.
